Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 17

Α. Δροσόπουλος

08-12-2022

Outline

Topic

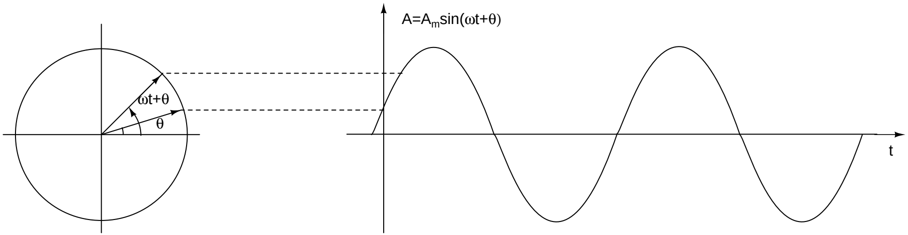
Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

- Σχέση τάσης – ρεύματος για πυκνωτές/πηνία περιλαμβάνει παραγώγους και ολοκληρώματα επομένως η εφαρμογή κανόνων Kirchhoff οδηγεί σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις κυματομορφές τάσης – ρεύματος σε ένα κύκλωμα.
- Όταν οι διεγέρσεις τάσης και ρεύματος σε ένα κύκλωμα που περιέχει γραμμικά στοιχεία (R, L, C) είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, μπορούμε να κάνουμε μετασχηματισμό Fourier ή Laplace και να μετατρέψουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 1)

Για διεγέρσεις μιας συχνότητας και για ημιτονικές συναρτήσεις παρατηρήστε το διάγραμμα όπου φαίνεται ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα περιστρεφόμενο μιγαδικό διάνυσμα με μια ημιτονική συνάρτηση.

Όλα τα ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις στο κύκλωμα για την παραπάνω περίπτωση περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα άρα, «παγώνοντας» το χρόνο, μπορούμε να περιγράψουμε ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις με μιγαδικά διανύσματα.



Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 2)

Ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση γράφεται

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad y(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

Θυμηθείτε και τη σχέση του Euler

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

Οπότε

$$Ae^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t + \theta) + jA\sin(\omega t + \theta)$$

$$\mathfrak{Re}\{Ae^{j(\omega t+\theta)}\} = A\cos(\omega t + \theta) \quad \text{και} \quad \mathfrak{Im}\{Ae^{j(\omega t+\theta)}\} = A\sin(\omega t + \theta)$$

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 3)

- Επομένως, αν παραστήσουμε ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση με τον μιγαδικό αριθμό $Ae^{j\theta}$ μπορούμε να γυρίσουμε στην αρχική ημιτονοειδή μορφή πολ/ζοντας με $e^{j\omega t}$ και παίρνοντας το φανταστικό ή πραγματικό μέρος ανάλογα αν θέλουμε σαν αναφορά το ημίτονο ή το συνημίτονο.
- Επιπλέον, εφόσον το μέγεθος που μετράμε στα ημιτονοειδή ρεύματα είναι η ενεργός τιμή, αντί του πλάτους A στον παραπάνω μιγαδικό αριθμό, χρησιμοποιούμε την ενεργό τιμή A_{rms}.

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 4)

Οπότε, ο φάσορας ή παραστατικός μιγάδας ενός ημιτονοειδούς ρεύματος $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ ή τάσης $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta)$ είναι

$$\dot{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\, e^{j\theta} = I_{rms} \underline{/\theta} \quad \text{ή} \quad \dot{V} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\, e^{j\theta} = V_{rms} \underline{/\theta}$$

και από τον φάσορα ή παραστατικό μιγάδα πηγαίνουμε στο ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση

$$\dot{I} = I_{rms} \underline{/\theta} \Rightarrow i(t) = \mathfrak{Im}\{I_{rms} \underline{/\theta} \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}\} = I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το ημίτονο, ή

$$\dot{V} = V_{rms} \underline{/\theta} \Rightarrow v(t) = \mathfrak{Re}\{V_{rms} \underline{/\theta} \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}\} = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το συνημίτονο.

Άσκηση

Δυο κυματομορφές τάσης δίδονται από τις σχέσεις

$$v_1(t) = 12\sin(314t + 45^\circ)\ \text{V} \qquad \text{και} \qquad v_2(t) = 6\sin(314t - 15^\circ)\ \text{V}$$

Να βρείτε τη συχνότητα των τάσεων, τη διαφορά φάσης μεταξύ τους και να γράψετε τους φάσορες.

Η συχνότητα f σε Hz είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50\ \text{Hz}$$

Η διαφορά φάσης είναι

$$45^\circ - (-15^\circ) = 60^\circ$$

δηλ. η $v_1(t)$ προηγείται της $v_2(t)$ κατά 60° ή η $v_2(t)$ έπεται της $v_1(t)$ κατά 60°. Οι φάσορες με βάση το ημίτονο είναι

$$\dot{V}_1 = \frac{12}{\sqrt{2}}\,\underline{/45^\circ} = 8.485\,\underline{/45^\circ}\ \text{V} \qquad \text{και} \qquad \dot{V}_2 = \frac{6}{\sqrt{2}}\,\underline{/-15^\circ} = 4.243\,\underline{/-15^\circ}\ \text{V}$$

Σύνθετη Αντίσταση

Οι αντικαταστάσεις κυματομορφών με φάσορες είναι στην ουσία μετασχηματισμοί Fourier. Και εφόσον στους μετασχηματισμούς Fourier

$$\frac{d}{dt} \to j\omega \qquad \text{και} \qquad \int dt \to \frac{1}{j\omega}$$

για το πηνίο

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \to \dot{V} = j\omega L\dot{I}$$

και για τον πυκνωτή

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt \to \dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

Σύνθετη Αντίσταση (συνέχεια 1)

Δηλαδή έχουμε τις σύνθετες αντιστάσεις (ή εμπεδήσεις)

για το πηνίο

$$Z_L = jX_L = j\omega L \quad \Omega$$

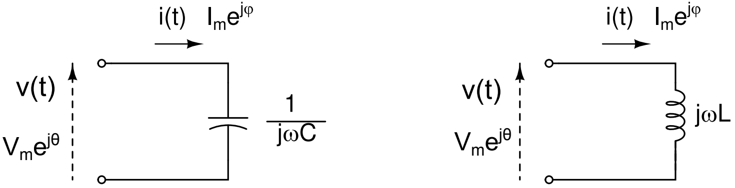
και για τον πυκνωτή

$$Z_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad \Omega$$

Φυσικά για την ωμική αντίσταση δεν αλλάζει τίποτα, $R \rightarrow R$ και η φάση της τάσης / ρεύματος που την διαρρέουν παραμένει ίδια με αυτήν του κλάδου που ευρίσκονται.

Προσοχή. Οι σύνθετες αντιστάσεις ΔΕΝ είναι φάσορες. Μπορούμε όμως να τις χρησιμοποιούμε σε κυκλώματα όπως ακριβώς και τις ωμικές αντιστάσεις αν αντικαταστήσουμε επίσης και όλες τις τάσεις/ρεύματα με τους αντίστοιχους φάσορες.

Σχέση Τάσης/Ρεύματος



Για τον πυκνωτή:

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = \frac{1}{j\omega C} \;\Rightarrow\; \frac{V_m}{I_m}\, e^{j(\theta-\phi)} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\pi/2} \;\Rightarrow$$

$$\theta - \phi = -\pi/2 \;\Rightarrow\; \phi = \theta + \pi/2$$

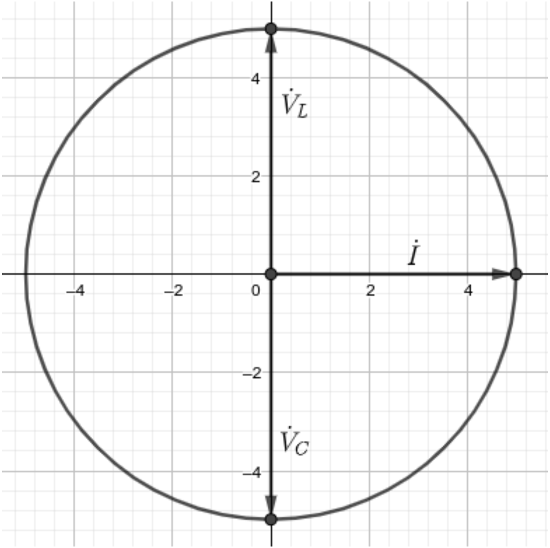
δηλ. το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90° ή η τάση καθυστερεί του ρεύματος κατά 90°.

Για το πηνίο:

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = j\omega L \;\Rightarrow\; \frac{V_m}{I_m}\, e^{j(\theta-\phi)} = \omega L\, e^{j\pi/2} \;\Rightarrow\; \theta - \phi = \pi/2 \;\Rightarrow\; \phi = \theta - \pi/2$$

δηλ. το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά 90° ή η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90°.

Σχέση Τάσης/Ρεύματος (συνέχεια 1)



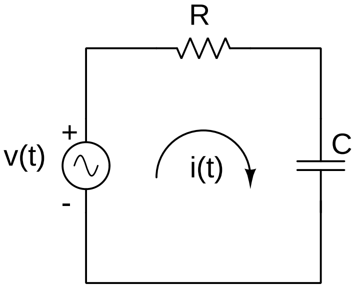
Topic

1 Εναλλασσόμενο

2 Ασκήσεις

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10\sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1\ \mathrm{k\Omega}$ και $C = 3\ \mu\mathrm{F}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 1)

$\omega = 628$ rad/s και $\dot{V} = (10/\sqrt{2})\ \underline{/15^\circ} = 7.071\ \underline{/15^\circ}$ V

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 1000 - \frac{j}{1884 \times 10^{-6}} = 1000 - j530.8 = 1132.14\ \underline{/-27.96^\circ}\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 4.571 + j4.256 = 6.246\ \underline{/42.96^\circ}\ \text{mA} \ \Rightarrow$$

$$i(t) = 6.246\sqrt{2}\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{mA} = 8.833\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = 4.571 + j4.256 = 6.246\ \underline{/42.96^\circ}\ \text{V} \ \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 6.246\sqrt{2}\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{V} = 8.833\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{V}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = 2.259 - j2.426 = 3.315\ \underline{/-47.04^\circ}\ \text{V} \ \Rightarrow$$

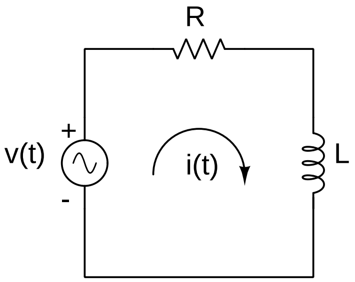
$$v_C(t) = 3.315\sqrt{2}\sin(628t - 47.04^\circ)\ \text{V} = 4.688\sin(628t - 47.04^\circ)\ \text{V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> w=628; R=1e3; C=3e-6; V0=10; Zc=-j/(w*C);
>> Z=R+Zc
Z =  1000.00 -  530.79i
>> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
   1132.137    -27.959
>> V=(V0/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V =  6.8301 + 1.8301i
>> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
    7.0711   15.0000
>> I=V/Z
I =  0.0045709 + 0.0042563i
>> [abs(I) angle(I)*180/pi]
ans =
    0.0062458   42.9587172
>> Vr=I*R
Vr =  4.5709 + 4.2563i
>> [abs(Vr) angle(Vr)*180/pi]
ans =
    6.2458   42.9587
>> Vc=I*Zc
Vc =  2.2592 - 2.4262i
>> [abs(Vc) angle(Vc)*180/pi]
ans =
    3.3152  -47.0413
```

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10\sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1\ \mathrm{k\Omega}$ και $L = 150\ \mathrm{mH}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> w=628; R=1e3; L=150e-3; V0=10; ZL=j*w*L;
>> Z=R+ZL
Z =  1000.000 +   94.200i
>> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
   1004.4270      5.3814
>> V=(V0/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V =  6.8301 + 1.8301i
>> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
    7.0711   15.0000
>> I=V/Z
I =  0.0069409 + 0.0011763i
>> [abs(I) angle(I)*180/pi]
ans =
   0.0070399   9.6186176
>> Vr=I*R
Vr =  6.9409 + 1.1763i
>> [abs(Vr) angle(Vr)*180/pi]
ans =
   7.0399   9.6186
>> VL=I*ZL
VL = -0.11081 + 0.65384i
>> [abs(VL) angle(VL)*180/pi]
ans =
    0.66316   99.61862
```

Άσκηση (συνέχεια 3)

$$\dot{V} = (10/\sqrt{2}) \,\underline{/15^\circ} = 7.071 \,\underline{/15^\circ} \text{ V}$$

$$Z = R + j\omega L = 1004.43 \,\underline{/5.38^\circ} \;\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 7.04 \,\underline{/9.62^\circ} \text{ mA} \;\Rightarrow$$

$$i(t) = 9.956 \sin(628t + 9.62^\circ) \text{ mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} R = 7.04 \,\underline{/9.62^\circ} \text{ V} \;\Rightarrow$$

$$v_R(t) = 9.956 \sin(628t + 9.62^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot Z_L = 0.663 \,\underline{/99.6^\circ} \text{ V} \;\Rightarrow$$

$$v_L(t) = 0.938 \sin(628t + 99.6^\circ) \text{ V}$$