Ηλεκτρικά Κυκλώματα I

Διάλεξη 11

Α. Δροσόπουλος

18-11-2022

Outline

1. Ενημέρωση
2. Θεωρήματα Thevenin και Norton
3. Μέγιστη μεταφορά ισχύος στο συνεχές
4. Παραδείγματα και ασκήσεις
5. Επανάληψη μιγαδικών

Topic

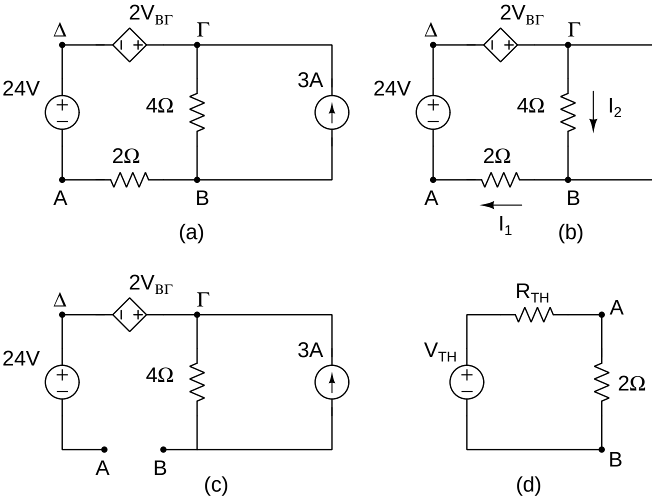
Ενημέρωση

- Τετάρτη 23/11/22 ορκωμοσία Πολιτικών Μηχανικών στο αμφιθέατρο. Το δικό μας μάθημα εκείνη την ημέρα θα γίνει στην ώρα μας, 12:00-14:00, στην αίθουσα Β2, κάτω από τη βιβλιοθήκη.
- Εργαστήριο. Επανάληψη παραδοτέα. Αναφορά. Φύλλο μετρήσεων. Διακριτά. Μορφοποίηση (Word, Libreoffice ή χειρόγραφα). Ανάρτηση κατά προτίμηση σε pdf. Docx δεκτή. Για παραπάνω από ένα αρχεία, μπορείτε να τα βάλετε σε έναν φάκελο και να «ζιπάρετε» τον φάκελο σε ένα αρχείο το οποίο κατόπιν αναρτάτε.
- Εργαστήριο: Σχηματικά. Σύγχυση τι αποτελεί «μέτρηση» και τι αποτελεί «υπολογισμό». Χρήση octave και spice.

Topic

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί η τάση V_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα (a) με α) κανόνες Kirchhoff και β) θεώρημα Thevenin.



Παράδειγμα 6b - Kirchhoff

Κλαδικά ρεύματα

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{κόμβος B:} & -I_1 + I_2 - 3 & = & 0 \\ \text{αριστερός βρόγχος:} & -2V_{\text{ΒΓ}} + 4I_2 + 2I_1 & = & 24 \\ & V_{\text{ΒΓ}} & = & -4I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -I_1 + I_2 & = & 3 \\ 2I_1 + 12I_2 & = & 24 \end{array}$$

```
octave:1> A=[-1 1; 2 12]; b=[3; 24]; I=inv(A)*b
I =
  -0.85714
   2.14286

octave:2> Vab = -2*I(1)
Vab =  1.7143
```

Παράδειγμα 6c - Thevenin

$$V_{AB|oc} = -24 - 2V_{\mathrm{B\Gamma}} + V_{\mathrm{\Gamma B}} = -24 - 3V_{\mathrm{B\Gamma}} = -24 - 3(-3 \cdot 4) = 12 \text{ V}$$

$$2V_{\mathrm{B\Gamma}} + 24 = 4I_2 \Rightarrow 2(-4I_2) + 24 = 4I_2 \Rightarrow I_2 = 2 \text{ A}$$

$$I_{AB|sc} = 3 - I_2 = 1 \text{ A}$$

$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = 12\ \Omega$$

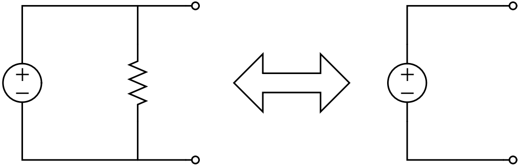
$$V_{AB} = \frac{2V_{TH}}{2 + R_{TH}} = 1.714 \text{ V}$$

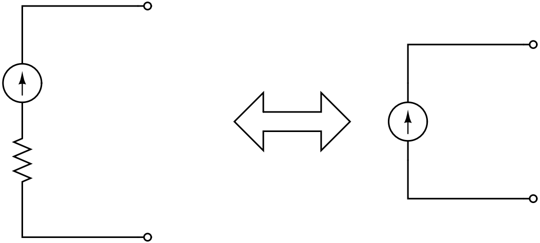
Σημαντική Παρατήρηση

Οι εξαρτημένες πηγές τάσης ή ρεύματος είναι τα μόνα μη γραμμικά στοιχεία στα μέχρι τώρα κυκλώματά μας. Η διαδικασία εύρεσης ισοδυνάμου Thevenin / Norton διαφέρει. Πρέπει να βρεθούν:

- η τάση με ανοικτούς ακροδέκτες $V_{oc} = V_{TH}$
- το ρεύμα βραχυκυκλώσεως $I_{sc} = I_N$ και
- η αντίσταση Thevenin / Norton είναι τότε ο λόγος $R_{TH} = R_N = V_{oc}/I_{sc} = V_{TH}/I_N$.

Σημαντική Παρατήρηση 2

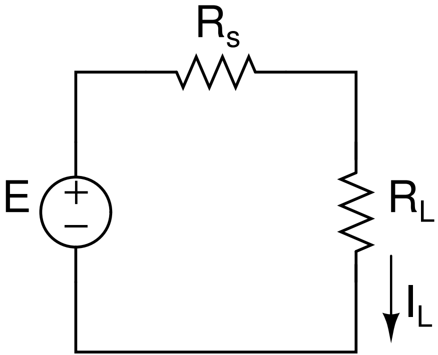




Topic

Μέγιστη μεταφορά ισχύος

Η πραγματική πηγή έχει ΗΕΔ E και εσωτερική αντίσταση R_s. Πότε έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος από την πηγή στο φορτίο R_L;



Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 2)

Το ρεύμα που περνάει από το φορτίο είναι

$$I_L = \frac{E}{R_s + R_L}$$

και η ισχύς είναι

$$P_L = I_L^2 R_L = \frac{E^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

Ακρότατο $R_{L,0}$ η λύση της

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

$R_{L,0}$ μέγιστο $\left.\frac{d^2 P_L}{dR_L^2}\right|_{R_L = R_{L,0}} < 0$ και ελάχιστο $\left.\frac{d^2 P_L}{dR_L^2}\right|_{R_L = R_{L,0}} > 0$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 3)

$$\frac{dP_L}{dR_L} = E^2 \, \frac{1 \cdot (R_s + R_L)^2 - R_L \cdot 2 \cdot (R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4} = 0 \;\Rightarrow$$

$$(R_s + R_L) \cdot \Big((R_s + R_L) - 2 \cdot R_L \Big) = 0 \;\Rightarrow\; R_L = R_s$$

$$\frac{d^2 P_L}{dR_L^2} = E^2 \, \frac{-1 \cdot (R_s + R_L)^3 - (R_s - R_L) \cdot 3 \cdot (R_s + R_L)^2}{(R_s + R_L)^6}$$

και για $R_L = R_s$

$$\left. \frac{d^2 P_L}{dR_L^2} \right|_{R_L = R_s} = -\frac{E^2}{(2R_s)^3} < 0$$

άρα $R_{L,0} = R_s$ είναι ακρότατο που οδηγεί σε μέγιστη ισχύ.

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 4)

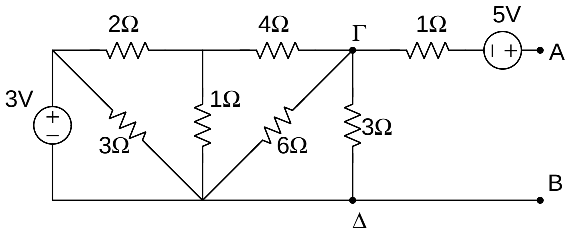
Στη γενική περίπτωση όπου έχουμε ένα οποιοδήποτε γραμμικό κύκλωμα και θέλουμε την μέγιστη ισχύ σε κάποιο φορτίο R_L, αντικαθιστούμε το κύκλωμα (μείον το φορτίο R_L) με το ισοδύναμό του κατά Thevenin, οπότε έχουμε πάλι τη μορφή του απλού βρόχου που εξετάσαμε προηγουμένως. Μέγιστη ισχύ τώρα έχουμε για $R_L = R_{TH}$ και η μέγιστη ισχύς είναι

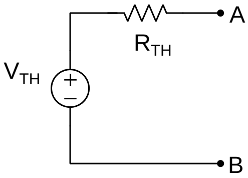
$$P_{L,\text{μεγ}} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

Topic

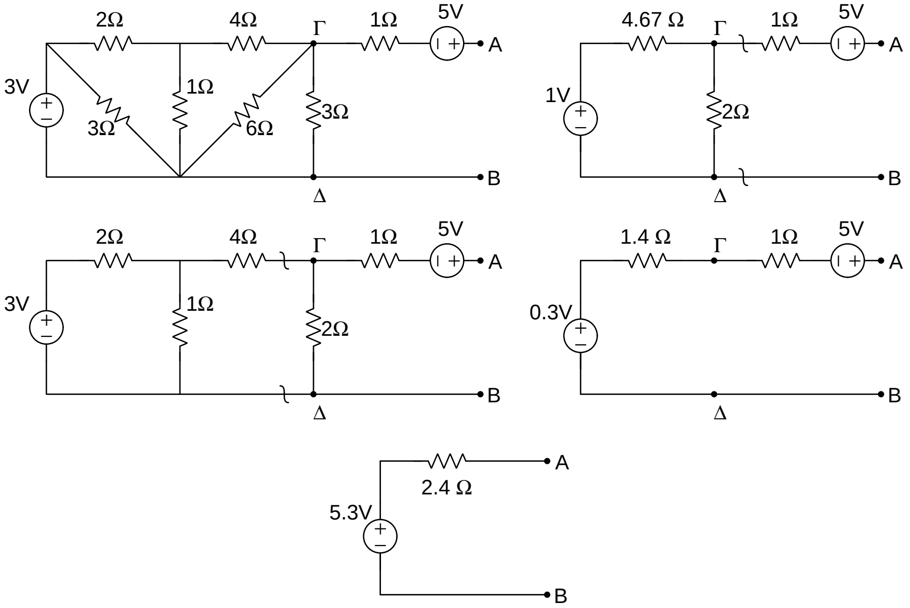
Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί το κατά Thevenin ισοδύναμο ως προς τους ακροδέκτες Α, Β του παρακάτω κυκλώματος. Να προσδιορισθεί κατόπιν η τιμή του φορτίου R_L στους ακροδέκτες Α, Β που καταναλώνει μέγιστη ισχύ από το κύκλωμα και να βρεθεί η τιμή της.





Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)



Παράδειγμα 1 (συνέχεια 2)

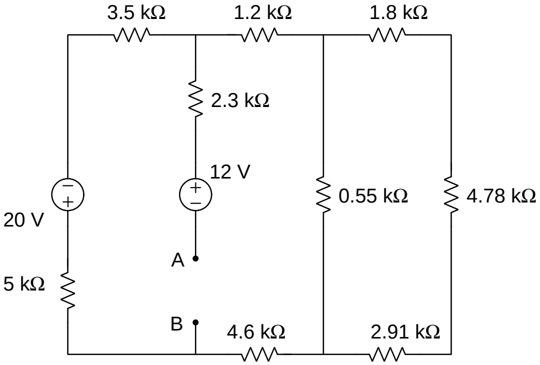
$$R_L = 2.4\ \Omega$$

$$P_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = 2.926\ \mathrm{W}$$

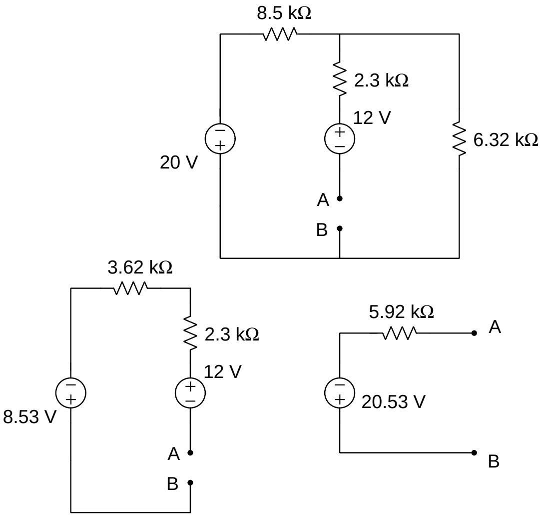
Παράδειγμα 2

Δίδεται το παρακάτω κύκλωμα. Να υπολογιστούν:

- Η τάση V_{AB} με ανοικτούς τους ακροδέκτες A, B.
- Η συνολική αντίσταση κατά Thevenin που φαίνεται στους ανοικτούς ακροδέκτες A, B.
- Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_{AB} όταν οι ακροδέκτες A, B είναι βραχυκυκλωμένοι.
- Εάν προσθέσουμε ένα φορτίο R_L μεταξύ των ακροδεκτών A, B, ποια είναι η τιμή του φορτίου έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη κατανάλωση ισχύος από το κύκλωμα και ποια είναι αυτή η ισχύς;



Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)



Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

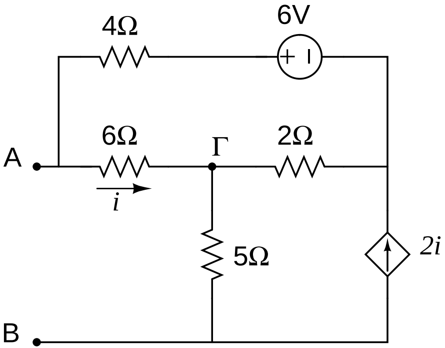
$$R_L = 5.92\ \mathrm{k\Omega}$$

$$P_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = 17.8\ \mathrm{mW}$$

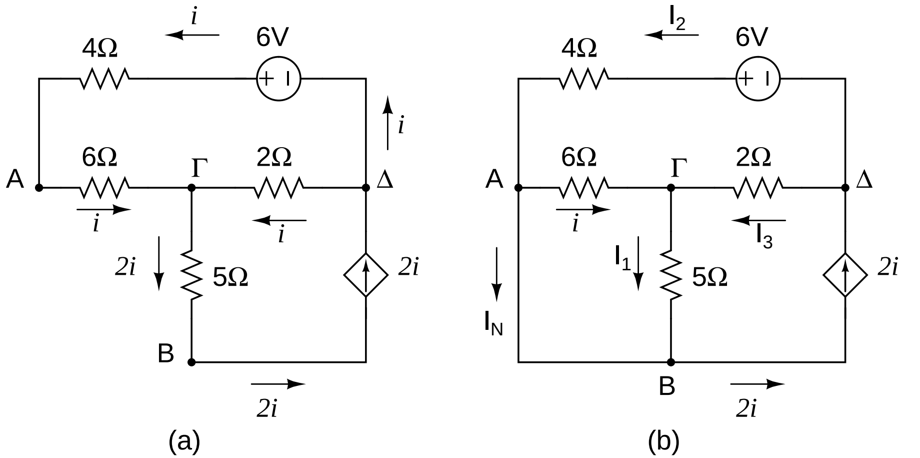
Παράδειγμα 3

Δίδεται το παρακάτω κύκλωμα όπου i το κλαδικό ρεύμα μεταξύ Α και Γ. Να υπολογιστούν:

- Η τάση V_{AB} με ανοικτούς τους ακροδέκτες Α, Β.
- Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_{AB} όταν οι ακροδέκτες Α, Β είναι βραχυκυκλωμένοι.
- Η συνολική αντίσταση κατά Thevenin που φαίνεται στους ανοικτούς ακροδέκτες Α, Β.
- Εάν προσθέσουμε ένα φορτίο R_L μεταξύ των ακροδεκτών Α, Β, ποια είναι η τιμή του φορτίου έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη κατανάλωση ισχύος από το κύκλωμα και ποια είναι αυτή η ισχύς;



Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)



Σχήμα: Με κλαδικά ρεύματα

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

Τα κλαδικά ρεύματα με τον 1ο κανόνα Kirchhoff (κόμβος Γ) φαίνονται καθαρά στο κύκλωμα (a). Εφαρμόζοντας 2ο κανόνα Kirchhoff στον επάνω βρόγχο ΑΓΔΑ έχουμε:

$$6i - 2i - 6 + 4i = 0 \Rightarrow i = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ A}$$

άρα η τάση V_{AB} με ανοικτούς τους ακροδέκτες Α, Β (τάση Thevenin V_{TH}) είναι:

$$V_{AB} = V_{A\Gamma} + V_{\Gamma B} = 6i + 2i \cdot 5 = 16i = 12 \text{ V}$$

Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_{AB} είναι το ρεύμα Norton. Από κόμβους και βρόγχους στο κύκλωμα, με Α, Β βραχυκυκλωμένα (κύκλωμα (b)) έχουμε

$$\begin{aligned}
\text{κόμβος Α:} &\quad I_2 = i + I_N \\
\text{κόμβος Β:} &\quad I_1 + I_N = 2i \\
\text{κόμβος Γ:} &\quad i + I_3 = I_1 \\
\text{κόμβος Δ:} &\quad 2i = I_3 + I_2 \\
\text{βρόγχος ΑΓΔΑ:} &\quad 6i - 2I_3 - 6 + 4I_2 = 0 \\
\text{βρόγχος ΑΓΒΑ:} &\quad 6i + 5I_1 = 0
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 3)

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$I_1 = -\frac{6i}{5}$$

$$I_3 = I_1 - i = -\frac{6i}{5} - i = -\frac{11i}{5}$$

$$I_2 = 2i - I_3 = 2i + \frac{11i}{5} = \frac{21i}{5}$$

$$I_N = I_2 - i = \frac{21i}{5} - i = \frac{16i}{5}$$

$$6i - 2\left(-\frac{11i}{5}\right) - 6 + 4\left(\frac{21i}{5}\right) = 0 \;\Rightarrow\; i = \frac{30}{136} = \frac{15}{68} \text{ A}$$

οπότε

$$I_N = \frac{16}{5} \cdot \frac{15}{68} = \frac{12}{17} = 0.706 \text{ A}$$

Εφόσον έχουμε εξαρτημένη πηγή στο κύκλωμα, η αντίσταση Thevenin είναι

$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = \frac{12}{12/17} = 17 \;\Omega$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 4)

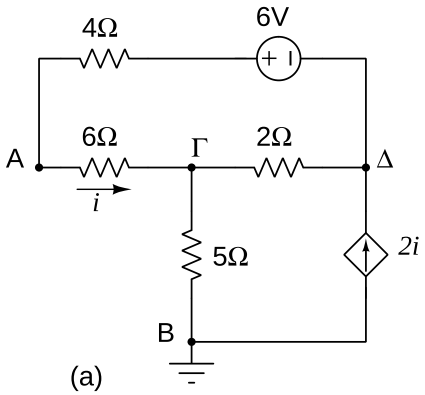
Για μέγιστη κατανάλωση / μεταφορά ισχύος

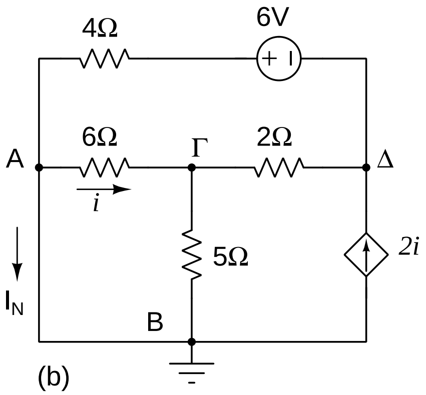
$$R_L = R_{TH} = 17\ \Omega$$

και η μέγιστη ισχύς είναι

$$P_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{12^2}{4 \cdot 17} = \frac{144}{68} = 2.118\ \mathrm{W}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 5)





Σχήμα: Με κομβική ανάλυση

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 6)

$$\left.\begin{aligned} -i + \frac{V_\Gamma}{5} + \frac{V_\Gamma - V_\Delta}{2} &= 0 \\ i + \frac{V_\Delta - V_\Gamma}{2} - 2i &= 0 \\ i &= \frac{(6 + V_\Delta) - V_\Gamma}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} V_\Gamma\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) - V_\Delta\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{6}{10} \\ V_\Gamma\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\right) + V_\Delta\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{6}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$V_\Gamma = 7.5\ \mathrm{V} \qquad V_\Delta = 9\ \mathrm{V} \qquad i = 0.75\ \mathrm{A} \qquad V_{TH} = 6i + V_\Gamma = 12\ \mathrm{V}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 7)

```
octave:19> A=[1/10+1/5+1/2 -(1/10+1/2); 1/10-1/2 -1/10+1/2]
A =
   0.80000  -0.60000
  -0.40000   0.40000

octave:20> b=[6/10; 6/10]
b =
   0.60000
   0.60000

octave:21> V=inv(A)*b
V =
   7.5000
   9.0000

octave:22> i=((6+V(2))-V(1))/10
i =  0.75000
octave:23> Vac=i*6
Vac =  4.5000
octave:24> Vab=Vac+V(1)
Vab =  12.000
```

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_\Gamma}{6}+\frac{V_\Gamma}{5}+\frac{V_\Gamma-V_\Delta}{2} &= 0 \\ \frac{6+V_\Delta}{4}+\frac{V_\Delta-V_\Gamma}{2}-2i &= 0 \\ i &= -\frac{V_\Gamma}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} V_\Gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)-V_\Delta\frac{1}{2} &= 0 \\ V_\Gamma\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+V_\Delta\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) &= -\frac{6}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I_N=\frac{6+V_\Delta}{4}+\frac{V_\Gamma}{6}=0.706\ \mathrm{A}$$

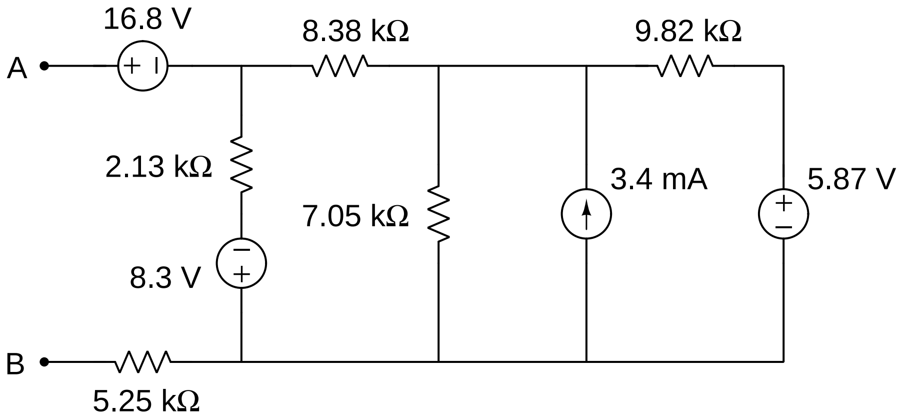
$$R_{TH}=\frac{V_{TH}}{I_N}=17\ \Omega$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 9)

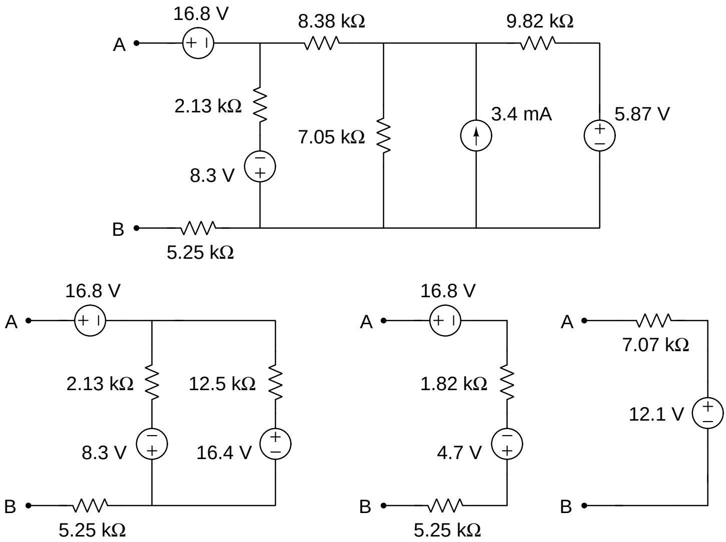
```
octave:30> A=[1/6+1/5+1/2 -1/2; -1/2+1/3 1/4+1/2]
A =
   0.86667  -0.50000
  -0.16667   0.75000

octave:31> b=[0; -6/4]
b =
   0.00000
  -1.50000

octave:32> V=inv(A)*b
V =
  -1.3235
  -2.2941

octave:33> In=(6+V(2))/4 + V(1)/6
In =  0.70588
octave:34> Rth=Vab/In
Rth =  17.000
```

Παράδειγμα 4

Στο παρακάτω κύκλωμα, να υπολογιστεί η τάση $V_{AB}|_{oc}$ με ανοικτούς τους ακροδέκτες A και B. Επίσης, με κλειστούς τους ακροδέκτες A και B να υπολογιστεί το ρεύμα βραχυκυκλώσεως $I_{AB|sc}$. Να υπολογιστεί κατόπιν το ρεύμα I_0 που διέρχεται από ένα φορτίο $R_L = 8.6\ \text{k}\Omega$ όταν αυτό τοποθετηθεί μεταξύ των A και B. Τέλος, να υπολογιστεί η τιμή του R_L έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη κατανάλωση ισχύος και να ευρεθεί η μέγιστη αυτή ισχύς.



Παράδειγμα 4 (συνέχεια 1)



Παράδειγμα 4 (συνέχεια 2)

```
octave:1> i1=5.87/9.82
i1 =  0.59776
octave:2> i2=i1+3.4
i2 =  3.9978
octave:3> r1 = 9.82*7.05/(9.82+7.05)
r1 =  4.1038
octave:4> v1=i2*r1
v1 =  16.406
octave:5> r2=r1+8.38
r2 =  12.484
octave:6> Em = (16.4/12.5-8.3/2.13)/(1/12.5+1/2.13)
Em = -4.7039
octave:7> Rm=1/(1/12.5+1/2.13)
Rm =  1.8199
octave:8> Vth=16.8-4.7
Vth =  12.100
octave:9> Rth=1.82+5.25
Rth =  7.0700
octave:10> In=Vth/Rth
In =  1.7115
octave:11> I0=Rth*In/(Rth+8.6)
I0 =  0.77218
octave:12> Pmax=Vth^2/(4*Rth)
Pmax =  5.1772
```

Παράδειγμα 4 (συνέχεια 3)

$$V_{TH} = 12.1\ \text{V} \qquad R_{TH} = 7.07\ \text{k}\Omega \qquad I_N = 1.71\ \text{mA}$$

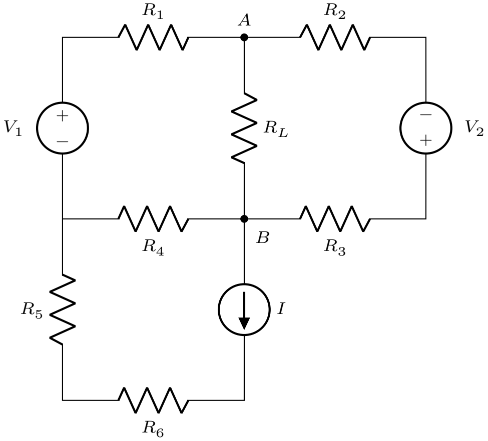
$$I_0 = 0.772\ \text{mA}$$

$$P_{\max} = 5.18\ \text{mW}$$

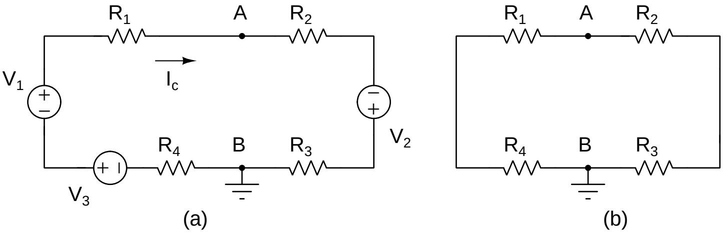
220907

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε: $V_1 = 167$ V, $V_2 = 95$ V, $I = 56.3$ mA, $R_1 = 72.4$ kΩ, $R_2 = 25.1$ kΩ, $R_3 = 24$ kΩ, $R_4 = 81$ kΩ, $R_5 = 64$ kΩ, $R_6 = 42$ kΩ.

1. Να υπολογιστεί η R_L υπό συνθήκες μέγιστης ισχύος καθώς και η μέγιστη ισχύς.
2. Η R_L αποτελείται από σύρμα με ειδική αντίσταση $\rho = 52.6\ \Omega \cdot$ mm, μήκος ℓ και διάμετρο $d = 2.1$ mm. Πόσο είναι το μήκος του σύρματος εάν $R_L = R_{TH}$;



220907 (2)



Στον κλάδο με τη πηγή ρεύματος οι R_5, R_6 βγαίνουν εκτός και η πηγή ρεύματος I με την παράλληλη αντίσταση R_4 μετασχηματίζεται σε πηγή τάσης $V_3 = IR_4 = 4560.3$ V σε σειρά με την R_4 (Σχ.(a)).

Με κανόνα τάσης Kirchhoff το ρεύμα βρόχου I_c είναι:

$$I_c = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 23.8 \text{ mA}$$

Άρα η τάση Thevenin είναι:

$$V_{TH} = I_c(R_2 + R_3) - V_2 = 1074.26 \text{ V}$$

220907 (3)

Σβήνοντας τις πηγές (Σχ. (b)), η αντίσταση Thevenin είναι:

$$R_{TH} = (R_1 + R_4) \parallel (R_2 + R_3) = 37.2 \text{ k}\Omega$$

Σε συνθήκες μέγιστης ισχύος, $R_L = R_{TH}$ και η μέγιστη ισχύς:

$$P_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = 7.76 \text{ W}$$

Το μήκος του σύρματος είναι:

$$R_L = \rho\frac{\ell}{S} = \rho\frac{4\ell}{\pi d^2} \Rightarrow \ell = \frac{R_L \pi d^2}{4\rho} = 2.45 \text{ m}$$

Topic

Αναπαράσταση μιγαδικών

- Καρτεσιανή μορφή

$$z = x + jy$$

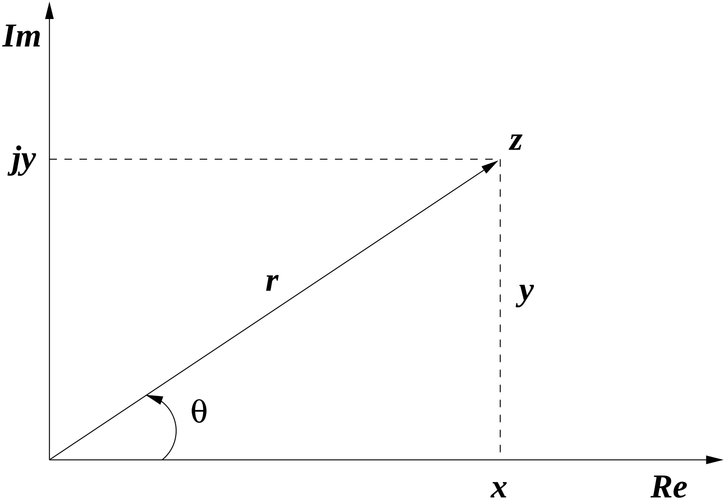
όπου $j = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα, x είναι το *πραγματικό μέρος* του z και y είναι το *φανταστικό μέρος* του z.

$$x = \Re e\{z\} \qquad\qquad y = \Im m\{z\}$$

- Ιδιότητες φανταστικής μονάδας

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j} &= -j \\
j^2 &= -1 \\
j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\
j^4 &= j^2 \cdot j^2 = 1 \\
j^5 &= j \cdot j^4 = j \\
&\vdots \\
j^{n+4} &= j^n
\end{aligned}$$

Αναπαράσταση μιγαδικών (συνέχεια 1)



Αναπαράσταση μιγαδικών (συνέχεια 2)

- Πολική μορφή

$$z = |z| \angle\theta = r \angle\theta$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ή

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \sin\theta$$

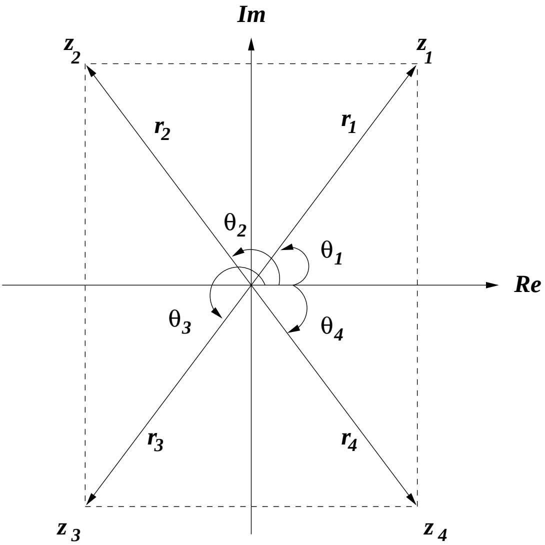
και

$$z = x + jy = r \angle\theta = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

- Εκθετική μορφή

$$z = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Μετατροπές



Μετατροπές (συνέχεια 1)

Στην μετατροπή από καρτεσιανή σε πολική μορφή χρειάζεται προσοχή στον προσδιορισμό της σωστής τιμής της γωνίας θ ανάλογα με το τεταρτημόριο όπου βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός. Υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες:

$$z = x + jy \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{1ο τετ}$$

$$z = -x + jy \qquad \theta = 180^\circ - \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{2ο τετ}$$

$$z = -x - jy \qquad \theta = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -180^\circ + \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{3ο τετ}$$

$$z = x - jy \qquad \theta = 360^\circ - \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{4ο τετ}$$

όπου $x > 0$, $y > 0$.

Παράδειγμα 1

Να εκφράσετε τον $z_1 = 6 + j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_1 = 6 + j8$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{8}{6} = 53.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_1 = 10 \underline{/53.13^\circ}$ και η εκθετική $z_1 = 10e^{j53.13^\circ}$.

```
>> z1=6+j*8
z1 =  6 + 8i
>> r1=sqrt(real(z1)^2 + imag(z1)^2)
r1 =  10
>> r1=abs(z1)
r1 =  10
>> theta1 = atan(imag(z1)/real(z1))*180/pi
theta1 =  53.130
>> theta1 = atan2(imag(z1),real(z1))*180/pi
theta1 =  53.130
>> theta1 = angle(z1)*180/pi
theta1 =  53.130
```

Παράδειγμα 2

Να εκφράσετε τον $z_2 = -6 + j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_2 = -6 + j8$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο επομένως

$$r_2 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_2 = 180^\circ - \tan^{-1}\frac{8}{6} = 126.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_2 = 10 \underline{/126.87^\circ}$ και η εκθετική $z_2 = 10e^{j126.87^\circ}$.

```
>> z2=-6+j*8
z2 = -6 + 8i
>> r2=abs(z2)
r2 =  10
>> theta2 = atan(imag(z2)/real(z2))*180/pi
theta2 = -53.130
>> theta2 = atan2(imag(z2),real(z2))*180/pi
theta2 =  126.87
>> theta2 = angle(z2)*180/pi
theta2 =  126.87
```

Παράδειγμα 3

Να εκφράσετε τον $z_3 = -6 - j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_3 = -6 - j8$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_3 = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{8}{6} = 233.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_3 = 10\ \underline{/233.13^\circ}$ και η εκθετική $z_3 = 10e^{j233.13^\circ}$. Επίσης σωστό είναι

$$\theta_3 = -180^\circ + \tan^{-1}\frac{8}{6} = -126.87^\circ$$

και πολική μορφή $z_3 = 10\ \underline{/-126.87^\circ}$ και εκθετική $z_3 = 10e^{-j126.87^\circ}$.

```
>> z3=-6-j*8
z3 = -6 - 8i
>> r3=abs(z3)
r3 =  10
>> theta3 = atan(imag(z3)/real(z3))*180/pi
theta3 =  53.130
>> theta3 = atan2(imag(z3),real(z3))*180/pi
theta3 = -126.87
>> theta3 = angle(z3)*180/pi
theta3 = -126.87
```

Παράδειγμα 4

Να εκφράσετε τον $z_4 = 6 - j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_4 = 6 - j8$ ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_4 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_4 = 360^\circ - \tan^{-1}\frac{8}{6} = 306.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_4 = 10\,\underline{/306.87^\circ}$ και η εκθετική $z_4 = 10e^{j306.87^\circ}$. Επίσης σωστό είναι

$$\theta_4 = -\tan^{-1}\frac{8}{6} = -53.13^\circ$$

και πολική μορφή $z_4 = 10\,\underline{/-53.13^\circ}$ και εκθετική $z_4 = 10e^{-j53.13^\circ}$.

```
>> z4=6-j*8
z4 =  6 - 8i
>> r4=abs(z4)
r4 =  10
>> theta4 = atan(imag(z4)/real(z4))*180/pi
theta4 = -53.130
>> theta4 = atan2(imag(z4),real(z4))*180/pi
theta4 = -53.130
>> theta4 = angle(z4)*180/pi
theta4 = -53.130
```

Κομπιουτεράκι

Κομπιουτεράκι 2

- **Coordinate Conversion (Pol (x , y) , Rec (r , θ))**
  - Calculation results are automatically assigned to variables E and F.
  - Example 1: To convert polar coordinates（r = 2,θ=60˚）to rectangular coordinates(x , y) (Deg).

x =1 [SHIFT] [Rec (] 2 [,] 60 [)] [=]

Rec(2,60)
1.

y=1.732050808 [RCL] [F]

F=
1.732050808

  - Press [RCL] [E] to display the value of x ,or [RCL] [F] to display the value of y .
  - Example 2: To convert rectangular coordinates（1, √3）to polar coordinates(r ,θ) (Rad).

r=2 [Pol (] 1 [,] [√] 3 [)] [=]

Pol(1,√3)
2.

θ=1.047197551 [RCL] [F]

F=
1.047197551

  - Press [RCL] [E] to display the value of r or [RCL] [F] to display the value of θ.

Παράδειγμα 5

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή.
$z_1 = 12\,\underline{/-60^\circ}$, $z_2 = -50\,\underline{/285^\circ}$, $z_3 = 8e^{j10^\circ}$, $z_4 = 20e^{-j\pi/3}$.

```
>> z1=12*exp(-j*60*pi/180)
z1 =   6.0000 - 10.3923i
>> z2=-50*exp(j*285*pi/180)
z2 = -12.941 + 48.296i
>> z3=8*exp(j*10*pi/180)
z3 =  7.8785 + 1.3892i
>> z4=20*exp(-j*pi/3)
z4 =  10.000 - 17.321i
```

Αριθμητικές πράξεις

Δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$ είναι ίσοι αν και μόνον αν και τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι αντιστοίχως ίσα

$$x_1 = x_2 \qquad \text{και} \qquad y_1 = y_2$$

Ο *συζυγής μιγαδικός* του μιγαδικού αριθμού $z = x + jy = r \underline{/\theta} = re^{j\theta}$ είναι

$$z^* = x - jy = r \underline{/-\theta} = re^{-j\theta}$$

Δοθέντων δυο μιγαδικών αριθμών $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$ το άθροισμά τους είναι

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

και η διαφορά τους

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Αριθμητικές πράξεις (συνέχεια 1)

Στην πράξη, η πρόσθεση και αφαίρεση μεταξύ μιγαδικών αριθμών γίνεται πιο απλά στην καρτεσιανή τους μορφή. Ο πολλαπλασιασμός όμως και η διαίρεση γίνονται πιο απλά στην πολική ή εκθετική τους μορφή

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

Εναλλακτικά, στην καρτεσιανή μορφή

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \left(\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\right)\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Άσκηση 1

Εάν $A = 2 + j5$, $B = 4 - j6$ να βρείτε, α) $A^*(A+B)$, β) $(A+B)/(A-B)$.

Εάν $A = 2 + j5$ τότε $A^* = 2 - j5$ και

$$A + B = (2+4) + j(5-6) = 6 - j$$

οπότε

$$A^*(A+B) = (2-j5)(6-j) =$$
$$5.385 \underline{/-68.2^\circ} \cdot 6.083 \underline{/-9.46^\circ} =$$
$$32.757 \underline{/-77.66^\circ} = 7 - j32$$

Ομοίως

$$A - B = (2-4) + j[5-(-6)] = -2 + j11$$

οπότε

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{6-j}{-2+j11} = \frac{6.083 \underline{/-9.46^\circ}}{11.18 \underline{/100.305^\circ}} = 0.544 \underline{/-109.765^\circ} = -0.184 - j0.512$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων

$$\frac{(2+j5)\cdot(8e^{j10^\circ})}{2+j4+2\ \underline{/-40^\circ}} \qquad \text{και} \qquad \frac{j(3-j4)^*}{(-1+j6)(2+j)^2}$$

Έχουμε

$$\frac{(2+j5)\cdot(8e^{j10^\circ})}{2+j4+2\ \underline{/-40^\circ}} = \frac{5.385\ \underline{/68.2^\circ}\cdot 8\ \underline{/10^\circ}}{2+j4+1.532-j1.285} =$$

$$\frac{43.08\ \underline{/78.2^\circ}}{3.532+j2.715} = \frac{43.08\ \underline{/78.2^\circ}}{4.455\ \underline{/37.55^\circ}} = 9.67\ \underline{/40.65^\circ} = 7.34+j6.30$$

Επίσης

$$\frac{j(3-j4)^*}{(-1+j6)(2+j)^2} = \frac{j(3+j4)}{(-1+j6)(2+j)(2+j)} =$$

$$\frac{1\ \underline{/90^\circ}\cdot 5\ \underline{/53.13^\circ}}{6.083\ \underline{/99.462^\circ}\cdot 2.236\ \underline{/26.565^\circ}\cdot 2.236\ \underline{/26.565^\circ}} =$$

$$\frac{5\ \underline{/143.13^\circ}}{30.413\ \underline{/152.6^\circ}} = 0.164\ \underline{/-9.47^\circ} = 0.162-j0.027$$

Άσκηση 2 (συνέχεια 1)

```
>> (2+j*5)*8*exp(j*10*pi/180)/(2+j*4+2*exp(-j*40*pi/180))
ans =  7.3368 + 6.3009i
>> j*conj(3-j*4) / ( (-1+j*6)*(2+j)^2 )
ans =  0.162162 - 0.027027i
```

Χρήσιμες σχέσεις

Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \text{και} \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Για $z = x + jy = r \, \underline{/\theta}$ έχουμε

$$zz^* = x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{x+jy} = \left(re^{j\theta}\right)^{1/2} = \sqrt{r} \, \underline{/\theta/2}$$

$$z^n = (x+jy)^n = r^n \, \underline{/n\theta} = r^n e^{jn\theta} = r^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]$$

$$z^{1/n} = (x+jy)^{1/n} = r^{1/n} \, \underline{/\theta/n + 2\pi k/n} \qquad \text{όπου} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$$\ln(re^{j\theta}) = \ln r + \ln e^{j\theta} = \ln r + j\theta + j2k\pi \qquad \text{όπου} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Προσοχή στο τελευταίο. Το μαθηματικό υπόβαθρο (complex logarithm) μπορεί να γίνει αρκετά σύνθετο.

$$e^{\pm j\pi} = -1 \qquad e^{\pm j2\pi} = 1$$

$$e^{j\pi/2} = j \qquad e^{-j\pi/2} = -j$$