

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 08

Α. Δροσόπουλος

04-11-2022

1 Ασκήσεις

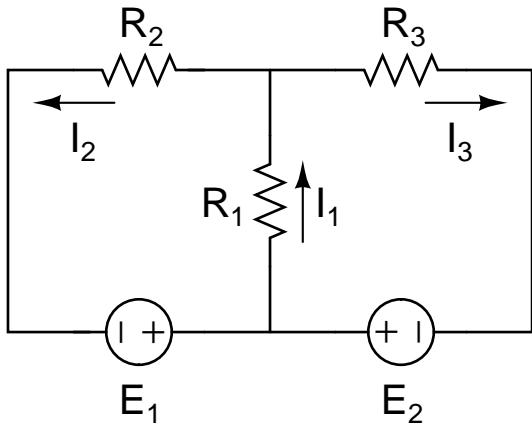
2 Κυκλώματα

1 Ασκήσεις

2 Κυκλώματα

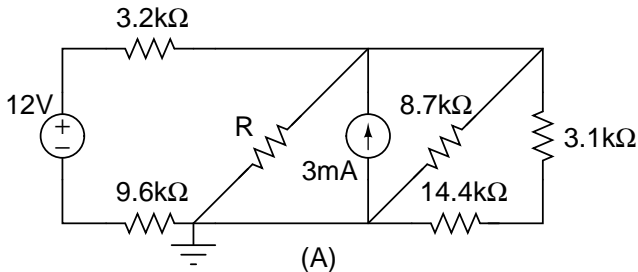
Άσκηση

Να γίνει πλήρη ανάλυση στο παρακάτω κύκλωμα όταν $E_1 = 9\text{ V}$, $E_2 = 18\text{ V}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 1.2\text{ k}\Omega$.



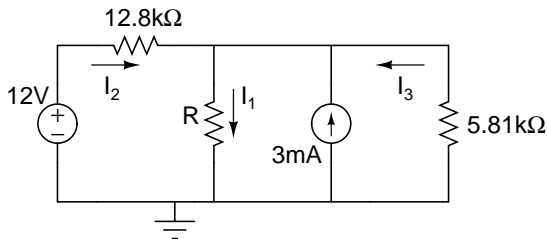
Άσκηση

Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης R στο κύκλωμα (A) έτσι ώστε η τάση στα άκρα της να είναι 9 V.



Άσκηση 2

Απλοποιώντας εν σειρά και παράλληλες αντιστάσεις έχουμε



όπου με κανόνες Kirchhoff

$$I_2 - I_1 + 3 + I_3 = 0$$

$$12.8I_2 + 9 - 12 = 0 \Rightarrow I_2 = 0.234 \text{ mA}$$

$$5.81I_3 + 9 = 0 \Rightarrow I_3 = -1.55 \text{ mA}$$

$$I_1 = 3 + I_2 + I_3 = 1.685 \text{ mA} \Rightarrow R = \frac{9}{1.685} = 5.34 \text{ k}\Omega$$

Άσκηση 3

Με κομβική ανάλυση

$$\frac{V-12}{12.8} + \frac{V}{R} - 3 + \frac{V}{5.81} = 0$$

$$\frac{V}{R} = 3 - \frac{V-12}{12.8} - \frac{V}{5.81}$$

$$R = \frac{V}{3 - \frac{V-12}{12.8} - \frac{V}{5.81}}$$

```
octave:1> V=9
```

```
V = 9
```

```
octave:2> 3-(V-12)/12.8-V/5.81
```

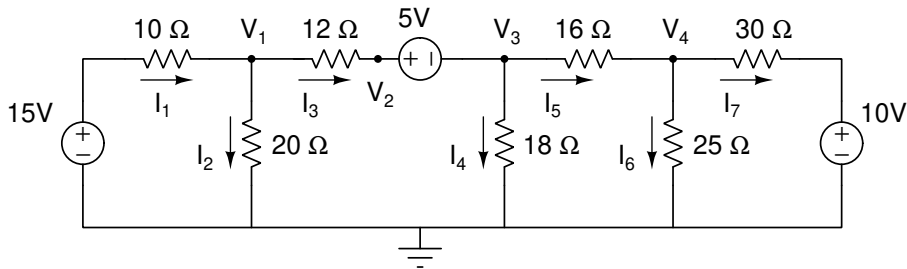
```
ans = 1.6853
```

```
octave:3> V/ans
```

```
ans = 5.3402
```

Άσκηση

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα καθώς και οι τάσεις V_1 , V_2 , V_3 , V_4 .



$$\frac{V_1 - 15}{10} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{12} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{12} + \frac{V_3}{18} + \frac{V_3 - V_4}{16} = 0$$

$$\frac{V_4 - V_3}{16} + \frac{V_4}{25} + \frac{V_4 - 10}{30} = 0$$

$$V_2 - V_3 = 5$$

Άσκηση 3

$$V_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \right) - \frac{V_2}{12} = \frac{15}{10}$$

$$-\frac{V_1}{12} + \frac{V_2}{12} + V_3 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{16} \right) - \frac{V_4}{16} = 0$$

$$-\frac{V_3}{16} + V_4 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} \right) = \frac{10}{30}$$

$$V_2 - V_3 = 5$$

Άσκηση 4

$$V_1 = 9.267 \text{ V}$$

$$V_2 = 7.948 \text{ V}$$

$$V_3 = 2.948 \text{ V}$$

$$V_4 = 3.811 \text{ V}$$

Άσκηση 5

$$I_1 = \frac{15 - V_1}{10} = 0.573\text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{20} = 0.463\text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{12} = 0.110\text{A}$$

$$I_4 = \frac{V_3}{18} = 0.164\text{A}$$

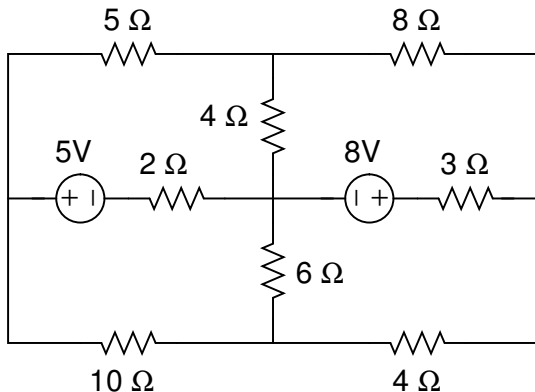
$$I_5 = \frac{V_3 - V_4}{16} = -0.0539\text{A}$$

$$I_6 = \frac{V_4}{25} = 0.152\text{A}$$

$$I_7 = \frac{V_4 - 10}{30} = -0.206\text{A}$$

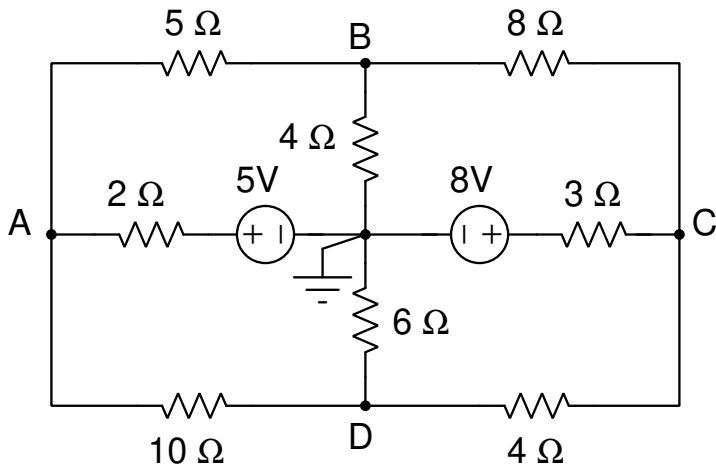
Άσκηση

Να γίνει πλήρη ανάλυση στο παρακάτω κύκλωμα.



- Κατάστρωση εξισώσεων Kirchhoff με κλαδικά ρεύματα και τάσεις κόμβων.
- Δοκιμάστε να λύσετε τα συστήματα που προκύπτουν.
- Επιβεβαίωση με octave και LTspice.

Άσκηση 2



Άσκηση 3

$$\frac{V_A - 5}{2} + \frac{V_A - V_B}{5} + \frac{V_A - V_D}{10} = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{5} + \frac{V_B}{4} + \frac{V_B - V_C}{8} = 0$$

$$\frac{V_C - V_B}{8} + \frac{V_C - 8}{3} + \frac{V_C - V_D}{4} = 0$$

$$\frac{V_D}{6} + \frac{V_D - V_A}{10} + \frac{V_D - V_C}{4} = 0$$

Άσκηση 4

$$V_A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) - V_B \frac{1}{5} - V_D \frac{1}{10} = \frac{5}{2}$$

$$-V_A \frac{1}{5} + V_B \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) - V_C \frac{1}{8} = 0$$

$$-V_B \frac{1}{8} + V_C \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - V_D \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$$

$$-V_A \frac{1}{10} - V_C \frac{1}{4} + V_D \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

Άσκηση 5

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ -0.2V_A + 0.575V_B - 0.125V_C + 0V_D &= 0 \\ 0V_A - 0.125V_B + 0.708V_C - 0.25V_D &= 2.67 \\ -0.1V_A + 0V_B - 0.25V_C + 0.517V_D &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0.125V_B + 0.708V_C - 0.25V_D &= 2.67 \\ 0V_A - 0.025V_B - 0.25V_C + 0.504V_D &= 0.312 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Άσκηση 6

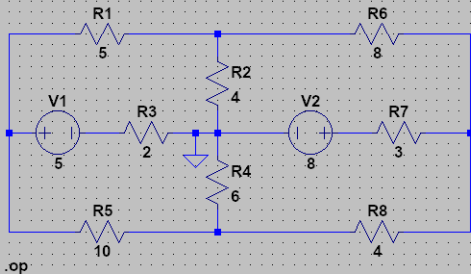
$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0V_B + 0.638V_C - 0.256V_D &= 2.81 \\ 0V_A - 0V_B - 0.256V_C + 0.503V_D &= 0.342 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0V_B + 0.638V_C - 0.256V_D &= 2.81 \\ 0V_A - 0V_B - 0V_C + 0.406V_D &= 1.40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Άσκηση 7

	με 3 σημ [Volt]	ακρίβεια [Volt]
V_D	3.45	3.45504
V_C	5.79	5.45234
V_B	2.73	2.65318
V_A	4.24	4.22017

Άσκηση 8



```
* Z:\home\drososaij\l\tex1\tex1_ask\Draft1.asc
--- Operating Point ---
V{n001}:      4.22017      voltage
V{n004}:     -0.779826    voltage
V{n005}:      8          voltage
V{n002}:      2.65318    voltage
V{n006}:      3.45504    voltage
V{n003}:      5.45234    voltage
I{R8}:        0.499326    device_current
I{R7}:       -0.849221    device_current
I{R6}:        0.349895    device_current
I{R5}:       -0.0765138   device_current
I{R4}:       -0.575839    device_current
I{R3}:        0.389913    device_current
I{R2}:        0.663294    device_current
I{R1}:       -0.313399    device_current
I{V2}:       -0.849221    device_current
I{V1}:       -0.389913    device_current
```

Άσκηση 9

$$A = \begin{bmatrix} 1/2+1/5+1/10 & -1/5 & 0 & -1/10; & -1/5 & 1/5+1/4+1/8 & -1/8 & 0; \\ 0 & -1/8 & 1/8+1/3+1/4 & -1/4; & -1/10 & 0 & -1/4 & 1/6+1/10+1/4 \end{bmatrix}$$

$$b = [5/2; 0; 8/3; 0]$$

$$V = \text{inv}(A)*b$$

A =

```
0.80000  -0.20000  0.00000  -0.10000
-0.20000  0.57500  -0.12500  0.00000
0.00000  -0.12500  0.70833  -0.25000
-0.10000  0.00000  -0.25000  0.51667
```

b =

```
2.50000
0.00000
2.66667
0.00000
```

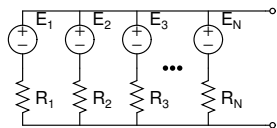
V =

```
4.22017
2.65318
5.45234
3.45504
```

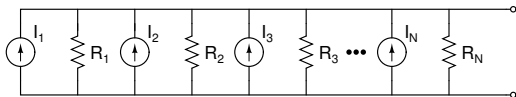
1 Ασκήσεις

2 Κυκλώματα

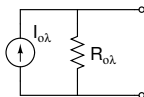
Θεώρημα Millman



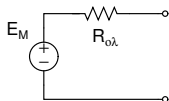
(a)



(b)



(c)



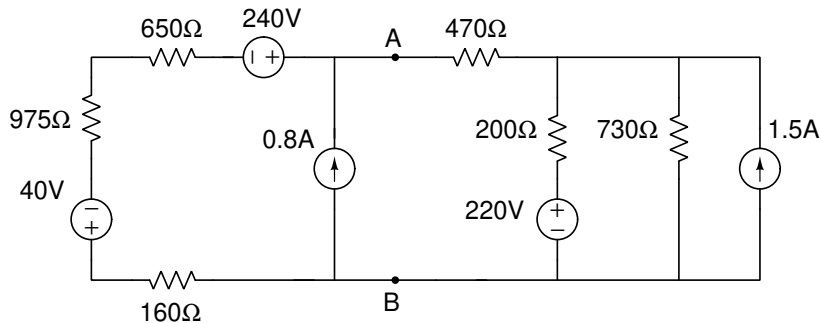
(d)

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

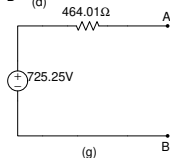
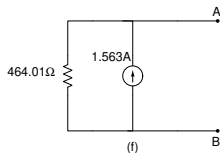
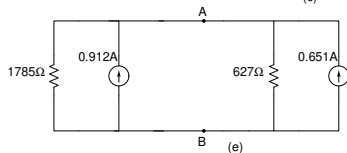
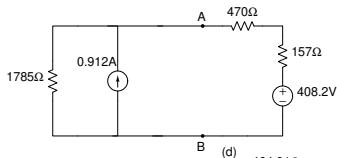
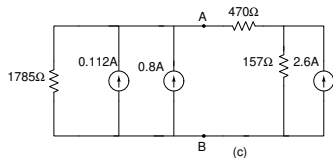
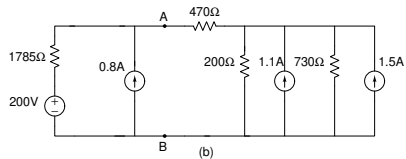
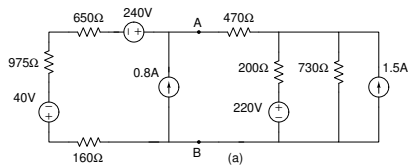
$$E_M = (I_1 + I_2 + \dots + I_N) R_{o\lambda} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_N}{R_N}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}$$

Παράδειγμα

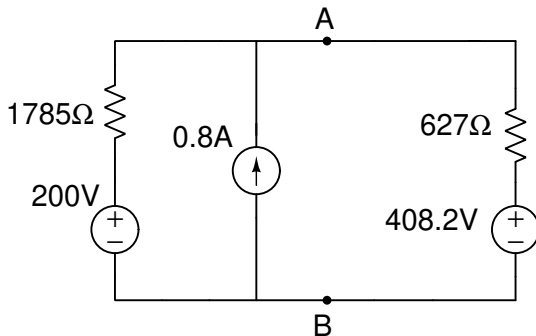
Να βρεθεί η τάση V_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα.



Παράδειγμα 2



Παράδειγμα 3

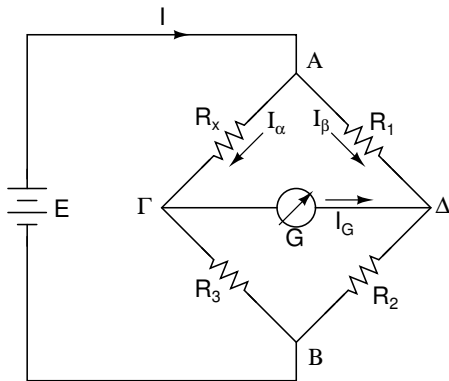


Με κομβική ανάλυση:

$$\frac{V_{AB} - 200}{1785} - 0.8 + \frac{V_{AB} - 408.2}{627} = 0 \Rightarrow V_{AB} = 725.3 \text{ V}$$

Γέφυρα Wheatstone

Η γέφυρα Wheatstone είναι ένα κύκλωμα που εφαρμόζεται πολύ σε ηλεκτρικές μετρήσεις. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι αποτελείται από 4 ωμικές αντιστάσεις εκ των οποίων η μία είναι άγνωστη και οι άλλες τρεις γνωστές.



Γέφυρα Wheatstone 2

Το γαλβανόμετρο που συνδέει τα Γ και Δ είναι ένα πολύ ευαίσθητο όργανο που δείχνει την παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος. Λέμε ότι η γέφυρα βρίσκεται σε ισορροπία όταν το ρεύμα που περνάει από το γαλβανόμετρο είναι $I_G = 0$. Έχουμε τότε $I = I_\alpha + I_\beta$ όπου I_α είναι το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΓΒ και I_β το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΔΒ. Εφόσον $I_G = 0$ τα σημεία Γ και Δ έχουν το ίδιο δυναμικό. Προσοχή εδώ. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των Γ και Δ είναι μηδέν. Τα δυναμικά στα Γ και Δ είναι ίδια αλλά όχι απαραίτητα μηδέν. Επομένως,

$$V_{\text{ΑΓ}} = V_{\text{ΑΔ}} \Rightarrow I_\alpha R_x = I_\beta R_1$$

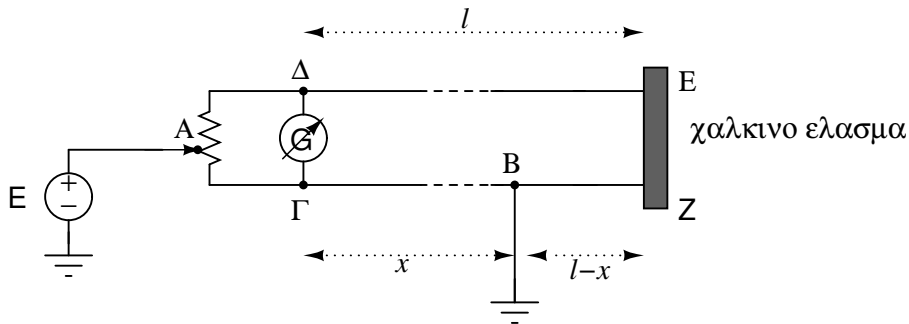
$$V_{\text{ΓΒ}} = V_{\text{ΔΒ}} \Rightarrow I_\alpha R_3 = I_\beta R_2$$

Διαιρώντας κατά μέλη βγαίνει η συνθήκη ισορροπίας την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την άγνωστη αντίσταση από τις γνωστές.

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}$$

Εντοπισμός θέσης σφάλματος

Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια γραμμή μεταφοράς μήκους l που αποτελείται από δύο ηλεκτρικές γραμμές (π.χ. υπόγειο καλώδιο). Έστω ότι υπάρχει διαρροή στο σημείο B που απέχει άγνωστη απόσταση x από το Γ. Η αρχή της γραμμής είναι τα σημεία Γ και Δ και το τέρμα της γραμμής τα σημεία E και Z. Βραχυκυκλώνουμε το τέρμα E, Z με ένα μικρό χάλκινο έλασμα αμελητέας αντίστασης.



Εντοπισμός θέσης σφάλματος 2

Στην αρχή Γ, Δ συνδέουμε το γαλβανόμετρο G , μια μεταβλητή αντίσταση και την πηγή με τάση E . Ο συμβολισμός είναι ίδιος με το διάγραμμα που ορίστηκε η γέφυρα Wheatstone. Η συνθήκη ισορροπίας μας δίνει

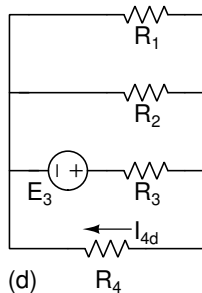
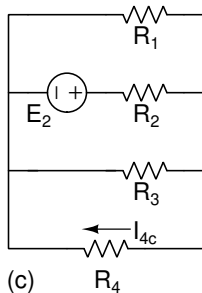
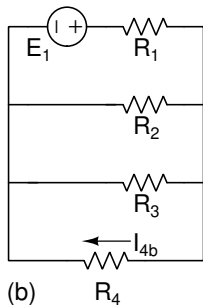
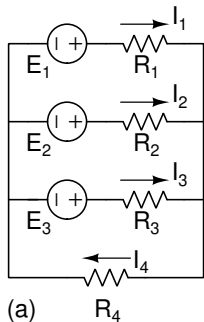
$$\frac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}} = \frac{R_{\Delta EZB}}{R_{\Gamma B}} = \frac{l + (l - x)}{x} = \frac{2l - x}{x} \Rightarrow x = \frac{2l}{1 + \frac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}}}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $R = \rho l/S$ για τις αντιστάσεις και το γεγονός ότι το υλικό και η διατομή των αγωγών είναι ίδια (ρ και S ίδια).

- Ένα άλλο σημαντικό και χρήσιμο θεώρημα είναι το θεώρημα επαλληλίας ή αλλιώς η αρχή της υπερθέσεως. Σε ένα γραμμικό κύκλωμα που έχει περισσότερες από μία πηγές μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκρισή του (τάση και ρεύμα σε κάθε στοιχείο) για κάθε πηγή ξεχωριστά, «σβήνοντας» τις υπόλοιπες. Η συνολική απόκριση είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Με το θεώρημα αυτό μπορούμε πολλές φορές να απλοποιήσουμε σύνθετα κυκλώματα σε πιο απλά.
- Πηγή τάσης την «σβήνουμε» βραχυκυκλώνοντάς την.
- Πηγή ρεύματος την «σβήνουμε» ανοίγοντάς την.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ρεύμα I_4 στο κύκλωμα (a) με τη μέθοδο υπέρθεσης όταν $E_1 = 18\text{ V}$, $E_2 = 9\text{ V}$, $E_3 = 20\text{ V}$, $R_1 = 1.2\text{ k}\Omega$, $R_2 = 800\ \Omega$, $R_3 = 1.4\text{ k}\Omega$, $R_4 = 600\ \Omega$.



Παράδειγμα 2

Με τη μέθοδο επαλληλίας έχουμε τα κυκλώματα (b),(c),(d). Ένας απλός τρόπος είναι να κάνουμε την κάθε πηγή τάσης πηγή ρεύματος, παράλληλες τις R_1 , R_2 , R_3 και έναν διαιρέτη ρεύματος για το κάθε ρεύμα I_{4b} , I_{4c} , I_{4d} .

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R = 357.45 \Omega$$

$$I_{4b} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_1}{R_1} = 5.6 \text{ mA}$$

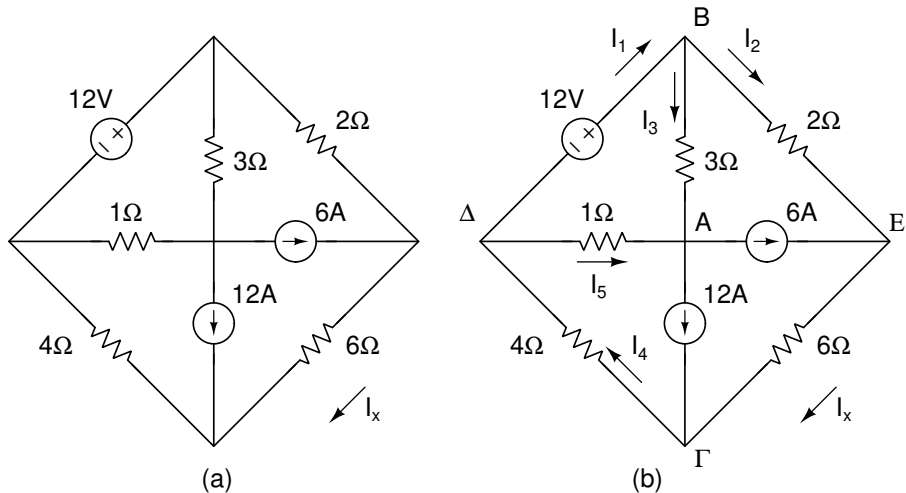
$$I_{4c} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_2}{R_2} = 4.2 \text{ mA} \quad I_{4d} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_3}{R_3} = 5.33 \text{ mA}$$

$$I_4 = I_{4b} + I_{4c} + I_{4d} = 15.1 \text{ mA}$$

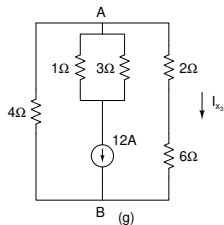
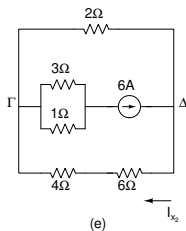
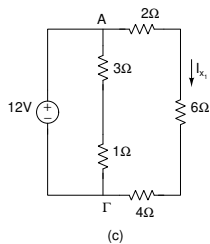
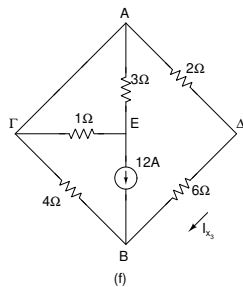
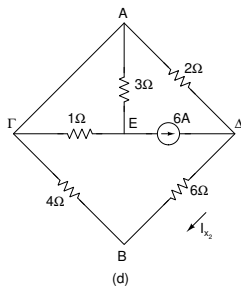
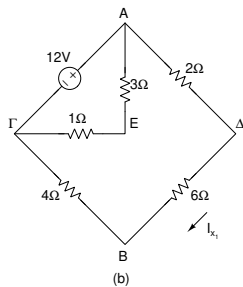
Στο βιβλίο βλέπετε και εναλλακτικούς τρόπους και μπορείτε και εσείς να σκεφτείτε και άλλους.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ρεύμα και η καταναλισκόμενη ισχύς στην αντίσταση $6\ \Omega$ στο κύκλωμα (a).



Παράδειγμα 2



Παράδειγμα 3

Όταν μόνο η πηγή τάσης είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (b) και το ισοδύναμό του (c). Η τάση V_{AG} στα άκρα του κλάδου που περιέχει την αντίσταση 6Ω είναι 12 V . Οπότε,

$$I_{x_1} = \frac{12}{2 + 6 + 4} = 1 \text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 6 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (d) και το ισοδύναμό του (e). Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_2} = \frac{2}{2 + 10} 6 = 1 \text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 12 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (f) και το ισοδύναμό του (g). Και πάλι με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_3} = -\frac{4}{4 + 8} 12 = -4 \text{ A}$$

Τελικά, $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} = 1 + 1 - 4 = -2 \text{ A}$ και $P = I_x^2 \cdot 6 = 24 \text{ W}$.