Ηλεκτρικά Κυκλώματα I
Διάλεξη 08

Α. Δροσόπουλος

06-12-2021

Outline

Topic

1. Συντονισμός

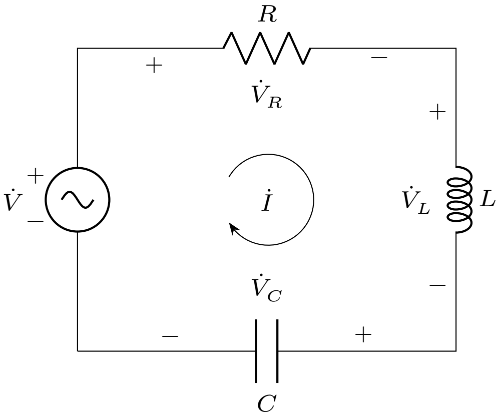
Συντονισμός - Βασική ιδέα

Ο βασικός στόχος που κατασκευάζουμε κυκλώματα είναι να πάρουμε ενέργεια από κάποια πηγή(ές), να την διαμορφώσουμε κατάλληλα και να οδηγήσουμε το αποτέλεσμα σε κάποια έξοδο, συνήθως κάποιο φορτίο. Οι όποιες αντιστάσεις, ανάλογα με τη συχνότητα, έχουν τελική συμπεριφορά χωρητική (υπερισχύουν οι πυκνωτές) ή επαγωγική (υπερισχύουν τα πηνία).

Σε κάποια συχνότητα, η χωρητική και επαγωγική συμπεριφορά εξουδετερώνει η μια την άλλη και έχουμε μέγιστη μεταφορά ενέργειας και ισχύος.

Έχουμε τότε κατάσταση συντονισμού.

Συντονισμός σειράς



Σχήμα: Κύκλωμα RLC σειράς

ΣΣ (2)

Σε RLC κύκλωμα σειράς η ολική αντίσταση που βλέπει η πηγή

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

είναι συνάρτηση συχνότητας και το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{ή} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

τη συχνότητα συντονισμού. Το μέτρο της ολικής αντίστασης γίνεται τότε ελάχιστο και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μέγιστο. Στο συντονισμό σειράς έχουμε μέγιστο ρεύμα στη συχνότητα συντονισμού και γιαυτό τον ονομάζουμε και *συντονισμό έντασης*.

ΣΣ (3)

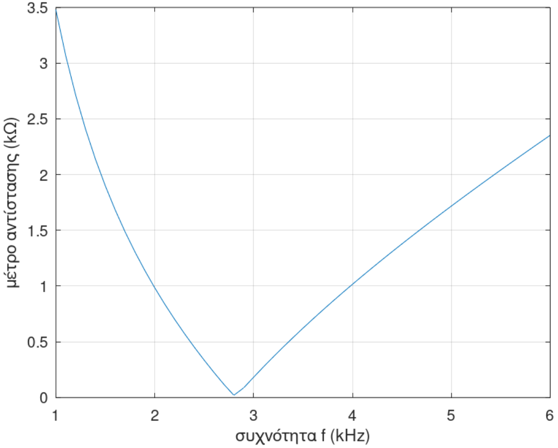
Αν στο προηγούμενο κύκλωμα δώσουμε τιμές στοιχείων $\dot{V} = 1$ V, $R = 15\ \Omega$, $L = 80$ mH και $C = 40$ nF η συχνότητα συντονισμού είναι $f_0 = 2813.5$ Hz και μπορούμε να σχεδιάσουμε τα μέτρα της ολικής αντίστασης που βλέπει η πηγή καθώς και του ρεύματος βρόχου.

```
V=1; R=15; L=80e-3; C=40e-9; w0 = 1/sqrt(L*C);
f0 = w0/(2*pi)
f = 1e3:100:6e3; w = 2*pi*f;
Z = R + j*L.*w - j./(w.*C);
plot(f*1e-3,abs(Z)*1e-3); grid()
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο αντίστασης (kΩ)");

I = V./abs(Z);
figure()
plot(f*1e-3,I); grid()
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο ρεύματος (A)");
```

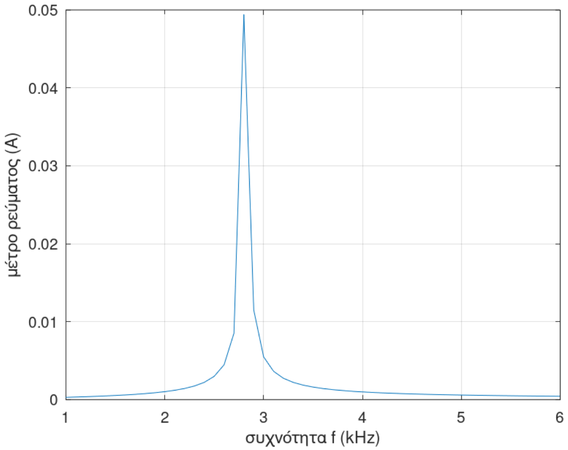
Μέγιστο ρεύμα $\dot{I}_{\text{max}} = \dot{V}/R = 66.7$ mA και μέγιστη ισχύς $P_{\text{max}} = |\dot{I}_{\text{max}}|^2 R = 66.7$ mW.

Μέτρο ολικής αντίστασης



ΣΣ (5)

Μέτρο ρεύματος βρόχου



Ωφέλιμη ζώνη

Στην πράξη μας ενδιαφέρει μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού, $f_1 < f_0 < f_2$, η ωφέλιμη ζώνη, όπου μπορούμε να έχουμε πραγματική ισχύ $P \geq P_{\max}/2$. Έχουμε $P_{\max} = |\dot{I}|^2_{\max} R$ οπότε η σχέση γίνεται

$$P \geq P_{\max}/2 \;\Rightarrow\; |\dot{I}|^2 R \geq \frac{|\dot{I}_{\max}|^2 R}{2} \;\Rightarrow\; |\dot{I}| \geq \frac{|\dot{I}_{\max}|}{\sqrt{2}}$$

Θέτοντας για ευκολία $I = |\dot{I}|$, για τις συχνότητες ω_1, ω_2 όπου ισχύει η ισότητα, έχουμε:

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{|\dot{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{|\dot{V}|}{R\sqrt{2}} \;\Rightarrow$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2 \;\Rightarrow\; \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 - R^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + R\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - R\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{(\omega^2 LC - 1 + \omega RC)(\omega^2 LC - 1 - \omega RC)}{\omega^2 C^2} = 0$$

Ωφέλιμη ζώνη (2)

οπότε

$$\omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις θετικές συχνότητες που έχουν φυσική σημασία και η διάταξη είναι $\omega_1 < \omega_2$.

Αν πάρουμε το γινόμενο των ω_1, ω_2 βρίσκουμε ότι

$$\omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \text{ή} \qquad f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = f_0^2$$

Αν πάρουμε τη διαφορά τους

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \qquad \text{ή} \qquad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει το εύρος της ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων για τον εν σειρά συντονισμό.

Ωφέλιμη ζώνη (3)

Μπορούμε να εξετάσουμε και τη φάση της $Z(\omega)$ στα όρια της ζώνης. Έχουμε

$$\phi_Z(\omega_1) = \tan^{-1}\frac{\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}}{R} = \tan^{-1}\frac{-R}{R} = -45^\circ$$

$$\phi_Z(\omega_2) = \tan^{-1}\frac{\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}}{R} = \tan^{-1}\frac{R}{R} = 45^\circ$$

και φυσικά

$$\phi_Z(\omega_0) = \tan^{-1}\frac{0}{R} = 0^\circ$$

Η φάση δηλ. της σύνθετης αντίστασης «σαρώνει» από -90° έως 90° (γιατί όχι από -180° έως 180°;) με -45° και 45° για τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και 0° στον συντονισμό.

Από τη σχέση $\dot{I} = \dot{V}/Z \;\Rightarrow\; \phi_i = \phi_v - \phi_Z$ βλέπουμε ότι η φάση του ρεύματος (εκτός από την προσθήκη της σταθερής φάσης ϕ_v) «σαρώνει» από 90° έως -90° με 45° και -45° για τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και 0° στον συντονισμό.

Συντελεστής ποιότητας Q

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος στα κυκλώματα συντονισμού, είναι ο *συντελεστής ποιότητος* του κυκλώματος που ορίζεται σαν

$$Q = \frac{\text{άεργος ισχύς σε μια περίοδο}}{\text{μέση ισχύς}} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{I^2 X_C}{I^2 R}$$

οπότε

$$Q = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ή

$$Q = \frac{I^2 X_C}{I^2 R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Στα παραπάνω η άεργος ισχύς σε μια περίοδο που αποθηκεύεται/μοιράζεται στα L, C ταλαντώνεται μεταξύ δυο καταστάσεων. Μέγιστη στο L και μηδενική στο C και μέγιστη στο C και μηδενική στο L. Γιαυτό και οι δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Το εύρος της ωφέλιμης ζώνης μπορεί να γραφεί τώρα σαν

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \qquad \text{ή} \qquad \Delta f = \frac{f_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Επομένως βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής Q τόσο μικρότερο είναι το εύρος ζώνης Δf που σημαίνει ότι η δυνατότητα επιλογής μιας συγκεκριμένης συχνότητας από το κύκλωμα γίνεται μεγαλύτερη.

Κέρδος τάσης

Παρατηρούμε επίσης στον συντονισμό σειράς ότι για τα μέτρα των τάσεων V (πηγής), V_L (πηνίου) και V_C (πυκνωτή) έχουμε

$$\frac{V_L}{V} = \frac{I\omega_0 L}{IR} = Q \qquad \text{και} \qquad \frac{V_C}{V} = \frac{I}{\omega_0 CIR} = Q$$

που σημαίνει ότι

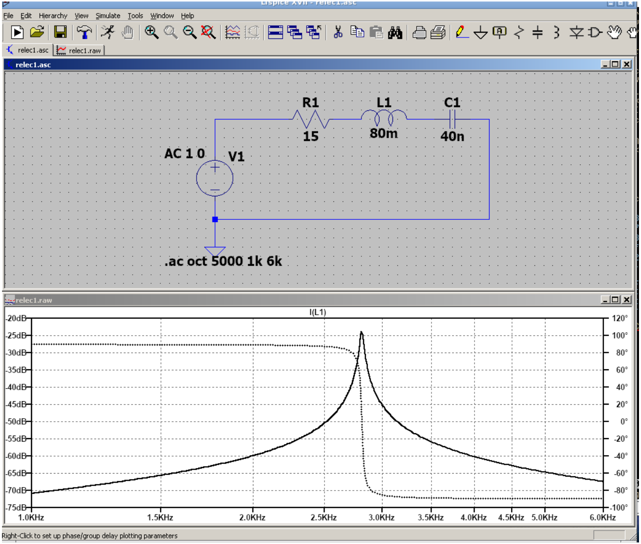
$$V_L = QV \qquad \text{και} \qquad V_C = QV$$

δηλ. παρατηρούμε ότι η τάση στον πυκνωτή και το πηνίο είναι πολ/σιο της τάσης της πηγής κατά Q. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε *κέρδος τάσης*.

Μερικές πράξεις

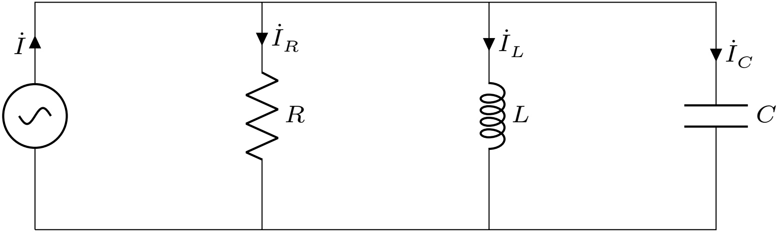
Με τις τιμές στοιχείων που είχαν δοθεί προηγουμένως, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&f_0 = 2813.5 \text{ Hz} \\
&f_1 = 2798.6 \text{ Hz} \\
&f_2 = 2828.4 \text{ Hz} \\
&\Delta f = 29.84 \text{ Hz} \\
&Q = 94.28 \\
&I_{\text{max}} = 66.7 \text{ mA} \\
&I_1 = I_2 = I_{\text{max}}/\sqrt{2} = 47.1 \text{ mA} \\
&20 \log_{10} I_{\text{max}} = -23.52 \text{ dB} \\
&20 \log_{10} I_1 = -26.53 \text{ dB} \\
&20 \log_{10} I_{\text{max}} - 20 \log_{10} I_1 = 3.01 \text{ dB}
\end{aligned}
$$



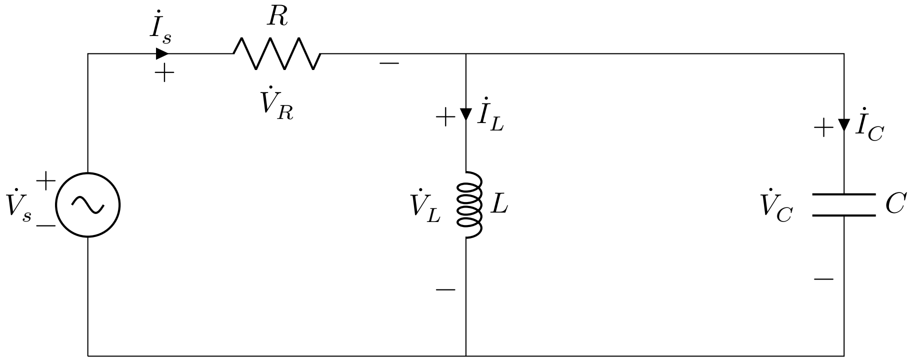
LTspice XVII - relec1.asc
File Edit Hierarchy View Simulate Tools Window Help
relec1.asc
relec1.raw
R1
15
L1
80m
C1
40n
AC 1 0
V1
.ac oct 5000 1k 6k
I(L1)
-20dB
-25dB
-30dB
-35dB
-40dB
-45dB
-50dB
-55dB
-60dB
-65dB
-70dB
-75dB
120°
100°
80°
60°
40°
20°
0°
-20°
-40°
-60°
-80°
-100°
1.0KHz
1.5KHz
2.0KHz
2.5KHz
3.0KHz
3.5KHz
4.0KHz
4.5KHz
5.0KHz
6.0KHz
Right-Click to set up phase/group delay plotting parameters

Συντονισμός παράλληλος



Σχήμα: Κύκλωμα RLC παράλληλο

Πρακτική υλοποίηση



Σχήμα: Κύκλωμα RLC παράλληλο, πρακτική υλοποίηση

ΣΠ (2)

Σε RLC κύκλωμα παράλληλο μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε την ολική σύνθετη αγωγιμότητα που βλέπει η πηγή

$$Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

όπου $G = 1/R$. Αυτή είναι συνάρτηση συχνότητας και το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{ή} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

τη συχνότητα συντονισμού, ίδια σχέση όπως με τον εν σειρά συντονισμό. Το μέτρο της ολικής αγωγιμότητας γίνεται τότε ελάχιστο και η παράλληλη, κοινή τάση στους κλάδους γίνεται τότε μέγιστη.

Στον παράλληλο συντονισμό έχουμε μέγιστη τάση στη συχνότητα συντονισμού και γιαυτό τον ονομάζουμε και *συντονισμό τάσης*.

ΣΠ (3)

Αν στο προηγούμενο κύκλωμα (σελ 17) δώσουμε τιμές στοιχείων $\dot{I} = 1$ mA, $R = 900$ kΩ, $L = 50$ mH και $C = 130$ nF η συχνότητα συντονισμού είναι $f_0 = 1974.1$ Hz και μπορούμε να σχεδιάσουμε τα μέτρα της ολικής αγωγιμότητας που βλέπει η πηγή καθώς και της τάσης στον κοινό κόμβο.

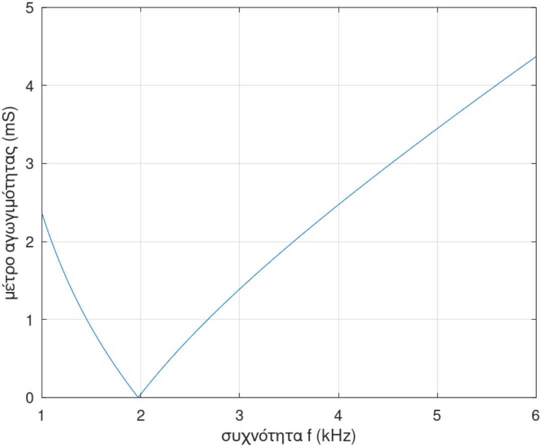
```
I=1e-3; R=900e3; L=50e-3; C=130e-9; w0 = 1/sqrt(L*C);
f0 = w0/(2*pi)
f = 1e3:10:6e3; w = 2*pi*f;
Y = 1/R + j*C.*w - j./(w.*L);
plot(f*1e-3,abs(Y)*1e3); grid()
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο αγωγιμότητας (mS)");

V = I./abs(Y);
figure()
plot(f*1e-3,V); grid()
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο τάσης (V)");
```

Μέγιστη τάση $\dot{V}_{\text{max}} = \dot{I}R = 900$ V και μέγιστη ισχύς $P_{\text{max}} = |\dot{V}_{\text{max}}|^2/R = 0.9$ W.

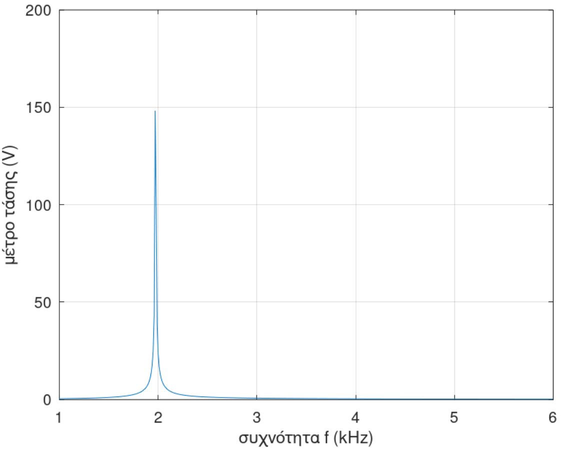
ΣΠ (4)

Μέτρο ολικής αγωγιμότητας



ΣΠ (5)

Μέτρο τάσης κόμβου



Ωφέλιμη ζώνη και συντελεστής ποιότητας Q

Στην πράξη μας ενδιαφέρει και εδώ μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού, $f_1 < f_0 < f_2$, η ωφέλιμη ζώνη, όπου μπορούμε να έχουμε πραγματική ισχύ $P \geq P_{\text{max}}/2$. Μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως και στον εν σειρά συντονισμό για να βρούμε την ωφέλιμη ζώνη και τον αντίστοιχο συντελεστή ποιότητος ή, να χρησιμοποιήσουμε την αρχή δυαδικότητας, όπου κάνουμε τις αντικαταστάσεις $R \to G$, $C \to L$, $L \to C$. Επομένως

$$\omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \text{ή} \qquad f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = f_0^2$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{G}{C} \qquad \text{ή} \qquad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{G}{2\pi C}$$

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \omega_0 RC = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Το εύρος της ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων για την μισή ισχύ $\Delta\omega$ ή Δf μπορεί να γραφεί τώρα ως

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \qquad \text{ή} \qquad \Delta f = \frac{f_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Κέρδος έντασης

Παρατηρούμε επίσης στον συντονισμό ότι για τα μέτρα των ρευμάτων I (πηγής), I_L (πηνίου) και I_C (πυκνωτή) έχουμε

$$\frac{I_L}{I} = \frac{V}{\omega_0 LVG} = Q \qquad \text{και} \qquad \frac{I_C}{I} = \frac{V\omega_0 C}{VG} = Q$$

που σημαίνει ότι

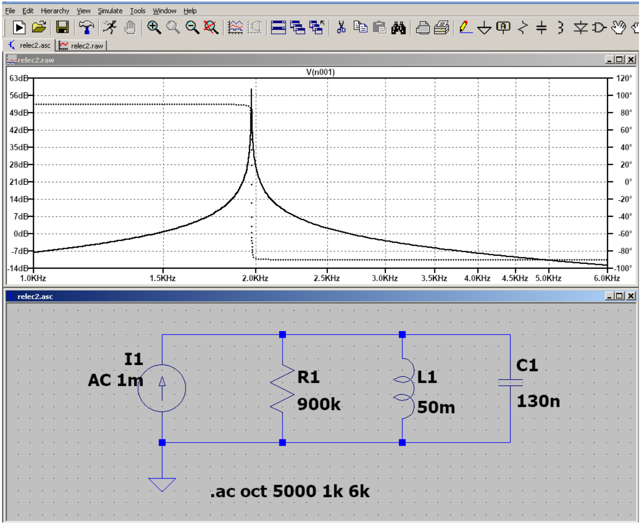
$$I_L = QI \qquad \text{και} \qquad I_C = QI$$

δηλ. παρατηρούμε ότι το ρεύμα στον πυκνωτή και το πηνίο είναι πολ/σιο του ρεύματος της πηγής κατά Q. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε *κέρδος έντασης*.

Μερικές πράξεις

Με τις τιμές στοιχείων που είχαν δοθεί προηγουμένως, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&f_0 = 1974.1 \text{ Hz} \\
&f_1 = 1973.4 \text{ Hz} \\
&f_2 = 1974.8 \text{ Hz} \\
&\Delta f = 1.36 \text{ Hz} \\
&Q = 1451.2 \\
&V_{\text{max}} = 900 \text{ V} \\
&V_1 = V_2 = V_{\text{max}}/\sqrt{2} = 636.4 \text{ V} \\
&20 \log_{10} \; V_{\text{max}} = 59.1 \text{ dB} \\
&20 \log_{10} \; V_1 = 56.1 \text{ dB} \\
&20 \log_{10} \; V_{\text{max}} - 20 \log_{10} \; V_1 = 3.01 \text{ dB}
\end{aligned}
$$



File Edit Hierarchy View Simulate Tools Window Help
relec2.asc
relec2.raw
V(n001)
63dB
56dB
49dB
42dB
35dB
28dB
21dB
14dB
7dB
0dB
-7dB
-14dB
120°
100°
80°
60°
40°
20°
0°
-20°
-40°
-60°
-80°
-100°
1.0KHz
1.5KHz
2.0KHz
2.5KHz
3.0KHz
3.5KHz
4.0KHz
4.5KHz
5.0KHz
6.0KHz
I1
AC 1m
R1
900k
L1
50m
C1
130n
.ac oct 5000 1k 6k

Πραγματικό

Τα πραγματικό πηνίο έχει εκτός από την αυτεπαγωγή και μια μικρή ωμική αντίσταση R_L σε σειρά. Ο πραγματικός πυκνωτής εκτός από την χωρητικότητα έχει και μια μεγάλη ωμική αντίσταση R_C παράλληλα. Εφόσον $R_C \gg R$ μπορούμε να πούμε ότι $R_C \parallel R \approx R$.

Η μόνη διαφορά από το παράλληλο RLC είναι η εν σειρά R_L. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ίδια. Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι

$$
\begin{aligned}
Y = G + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L} &= G + j\omega C + \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \\
&= G + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right]
\end{aligned}
$$

Στον συντονισμό

$$
\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R_L}{L}\right)^2 = \frac{1}{LC}\left[1 - \frac{R_L^2 C}{L}\right] \Rightarrow
$$

$$
\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}
$$

Βλέπουμε ότι συντονισμός επιτυγχάνεται σε χαμηλότερη συχνότητα από ότι στην ιδανική περίπτωση.

Πραγματικό (2)

Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι τότε

$$Y_0 = G + \frac{R_L C}{L} = G'$$

Επίσης, εάν $(\omega L)^2 \gg R_L^2$, για την ωφέλιμη περιοχή συχνοτήτων, έχουμε

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{(\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Y = G' + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (με αρκετά καλή ακρίβεια) τις σχέσεις που ισχύουν για το ιδανικό παράλληλο κύκλωμα. Για τον συντελεστή ποιότητας π.χ. έχουμε

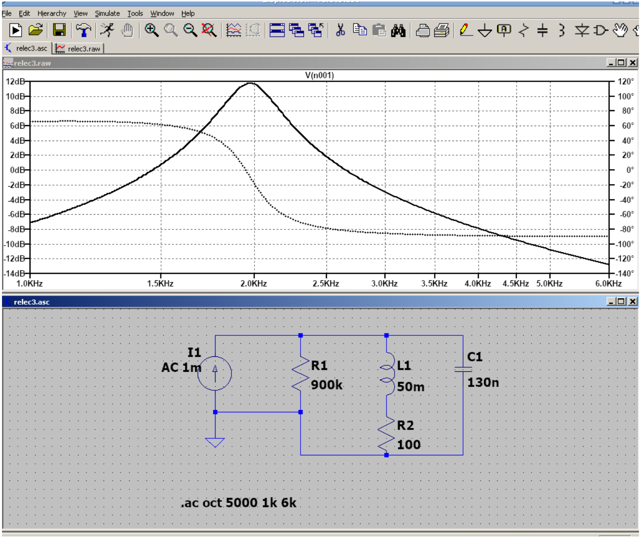
$$Q = \frac{\omega_0 C}{G'} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}}}{G + \frac{R_L C}{L}}$$

Αριθμοί

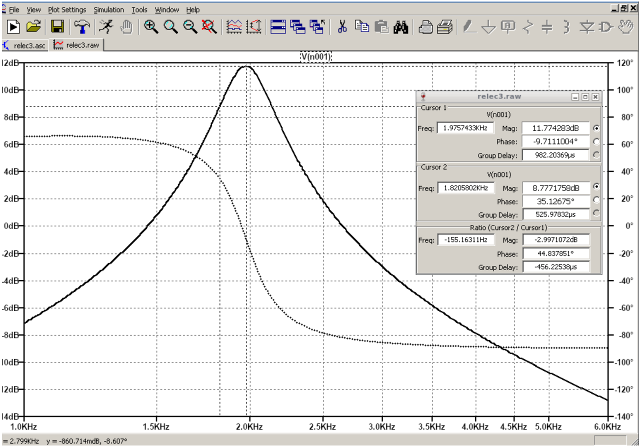
Για το ιδανικό RLC με $R_L = 100\ \Omega$

$$f_0 = 1948.2\ \text{Hz}$$
$$Q = 6.175$$

και SPICE για πραγματικό



και SPICE για πραγματικό (2)



Με αριθμούς

$$
\begin{aligned}
&f_0 = 1975.7 \text{ Hz} \\
&f_1 = 1820.6 \text{ Hz} \\
&f_2 = 2139.2 \text{ Hz} \\
&\Delta f = 318.6 \text{ Hz} \\
&Q = 6.2
\end{aligned}
$$

Άσκηση 1

Σε εν σειρά κύκλωμα συντονισμού έχουμε $R = 10\ \Omega$. Να βρεθούν οι τιμές L και C έτσι ώστε το κύκλωμα να έχει συχνότητα συντονισμού 100 kHz και εύρος ωφέλιμης ζώνης 1 kHz. Να βρεθούν κατόπιν τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow LC = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = 2.5330 \times 10^{-12}$$

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L} \Rightarrow L = \frac{R}{2\pi \Delta f} = 1.5915 \times 10^{-3}\ \mathrm{H} \qquad \text{και}$$

$$C = \frac{LC}{L} = 1.5915 \times 10^{-9}\ \mathrm{F}$$

$$Q_s = \frac{f_0}{\Delta f} = 100$$

Άσκηση 1 (2)

$$f_1 f_2 = f_0^2 \qquad \text{και} \qquad f_2 - f_1 = \Delta f$$

$$f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} \qquad \text{και} \qquad \frac{f_0^2}{f_1} - f_1 = \Delta f \;\Rightarrow\; f_1^2 + \Delta f \cdot f_1 - f_0^2 = 0 \;\Rightarrow$$

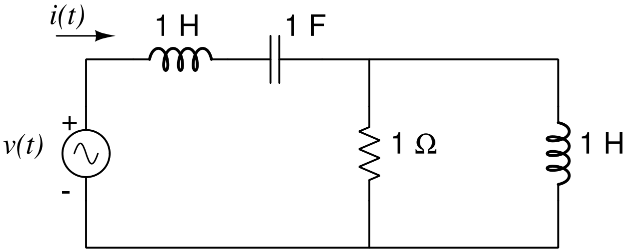
$$f_1 = 99501.25 \text{ Hz} \qquad \text{και} \qquad f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} = 100501.25 \text{ Hz}$$

Με καλή προσέγγιση υπολογίζεται επίσης με

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 99500 \text{ Hz} \qquad \text{και} \qquad f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 100500 \text{ Hz}$$

Άσκηση 2

Στο παρακάτω κύκλωμα υπολογίστε τη συχνότητα ω για την οποία $v(t)$ και $i(t)$ είναι εν φάση.



Άσκηση 2 (2)

$$\Im m\left\{(j\omega+\frac{1}{j\omega})+(1\parallel j\omega)\right\}=0\ \Rightarrow$$

$$\Im m\left\{j\omega-\frac{j}{\omega}+\frac{j\omega}{1+j\omega}\cdot\frac{1-j\omega}{1-j\omega}\right\}=0\ \Rightarrow$$

$$\omega-\frac{1}{\omega}+\frac{\omega}{1+\omega^2}=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2(1+\omega^2)-(1+\omega^2)+\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}=0\ \Rightarrow\ \omega^4+\omega^2-1=0\ \Rightarrow$$

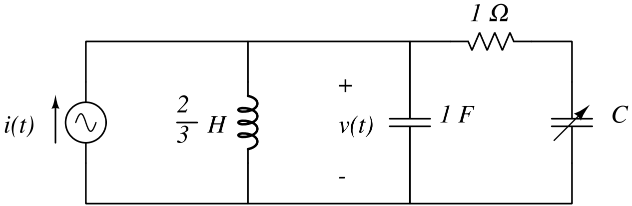
$$\omega^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.61803\ \Rightarrow$$

$$\omega=0.78615\ \mathrm{rad/s}\qquad \text{ή}\qquad f=\frac{\omega}{2\pi}=0.12512\ \mathrm{Hz}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις θετικές τιμές των συχνοτήτων που έχουν φυσικό νόημα.

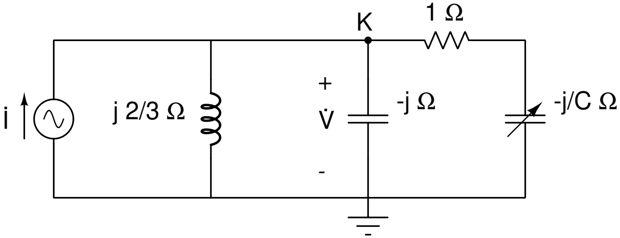
Άσκηση 3

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $i(t) = 10 \sin t$. Υπολογίστε την χωρητικότητα C έτσι ώστε $v(t) = V_0 \sin t$. Ποιά είναι η τιμή V_0;



Άσκηση 3 (2)

Μετατρέποντας σε φάσορες και σύνθετες αντιστάσεις έχουμε το παρακάτω κύκλωμα



Άσκηση 3 (3)

Με κομβική ανάλυση στον κόμβο Κ έχουμε:

$$-\dot{I} + \frac{\dot{V}}{j(2/3)} + \frac{\dot{V}}{(-j)} + \frac{\dot{V}}{1 - j/C} = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{I}}{\left[-j\frac{3}{2} + j + \frac{C^2 + jC}{1 + C^2}\right]} =$$

$$= \frac{\dot{I}}{\left[\frac{C^2}{1 + C^2} - j\frac{1}{2} + \frac{jC}{1 + C^2}\right]}$$

Άσκηση 3 (4)

Και επειδή $\dot{V} = (V_0/\sqrt{2})\ \underline{/0^\circ}$ και $\dot{I} = (10/\sqrt{2})\ \underline{/0^\circ}$ έχουμε

$$V_0 = \frac{10}{\left[\dfrac{C^2}{1+C^2} - j\dfrac{1}{2} + \dfrac{jC}{1+C^2}\right]}$$

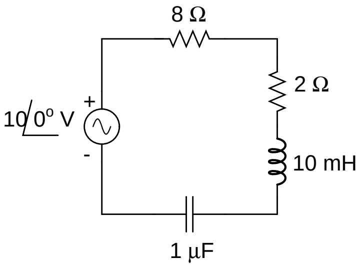
όπου V_0 πραγματικός αριθμός. Επομένως το φανταστικό μέρος στον παρονομαστή είναι μηδέν.

$$\frac{C}{1+C^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C^2 - 2C + 1 = 0 \Rightarrow C = 1\ \mathrm{F} \qquad \text{και} \qquad V_0 = 20\ \mathrm{V}$$

Άσκηση 4

Να βρεθούν:

1. Συχνότητα συντονισμού σε rad/s και Hz.
2. Ολική μιγαδική αντίσταση που βλέπει η πηγή στο συντονισμό.
3. Το ρεύμα βρόγχου στο συντονισμό.
4. Τάσεις $\dot{V}_L$ και $\dot{V}_C$ στο συντονισμό.
5. Άεργος ισχύς Q_C και Q_L στο συντονισμό.
6. Συντελεστής ποιότητας Q_s.
7. Η μέγιστη ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.
8. Το εύρος ζώνης $\Delta\omega$ και τις συχνότητες ω_1, ω_2.
9. Το ρεύμα βρόγχου και την ισχύ που καταναλώνεται στο κύκλωμα για τη συχνότητα ω_1.



Άσκηση 4 (2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10000 \text{ rad/s} \qquad f_0 = 1591.5 \text{ Hz}$$

$$Z = 10\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{10}{10} = 1\ \underline{/0^\circ}\ \text{A}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I} j\omega_0 L = j100 \text{ V} \qquad \dot{V}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega_0 C} = -j100 \text{ V}$$

$$Q_C = \frac{I^2}{\omega C} = 100 \text{ VAR} \qquad Q_L = I^2 \omega L = 100 \text{ VAR}$$

$$Q_s = \frac{Q_L}{P} = \frac{100}{I^2 R} = \frac{100}{10} = 10$$

$$P_{\text{max}} = \frac{|\dot{V}|^2}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ W}$$

Άσκηση 4 (3)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_s} = \frac{10000}{10} = 1000 \text{ rad/s}$$

κατά προσέγγιση

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 9500 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} = 10500 \text{ rad/s}$$

με ακρίβεια

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2 \qquad \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \qquad \frac{\omega_0^2}{\omega_1} - \omega_1 = \Delta\omega \;\Rightarrow$$

$$\omega_1^2 + \Delta\omega \cdot \omega_1 - \omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\omega_1 = 9512.49 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 10512.49 \text{ rad/s}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{10 + j\omega_1 L - j/(\omega_1 C)} = 0.707 \,\underline{/45^\circ}\text{ A}$$

$$P = |\dot{I}|^2 R = 0.707^2 \cdot 10 = 5 \text{ W}$$