

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 07

Α. Δροσόπουλος

29-11-2021

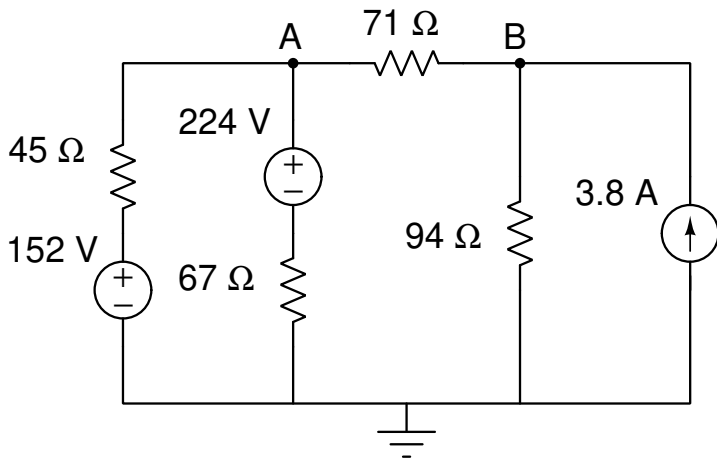
1 Ασκήσεις DC

2 Ασκήσεις AC

1 Ασκήσεις DC

2 Ασκήσεις AC

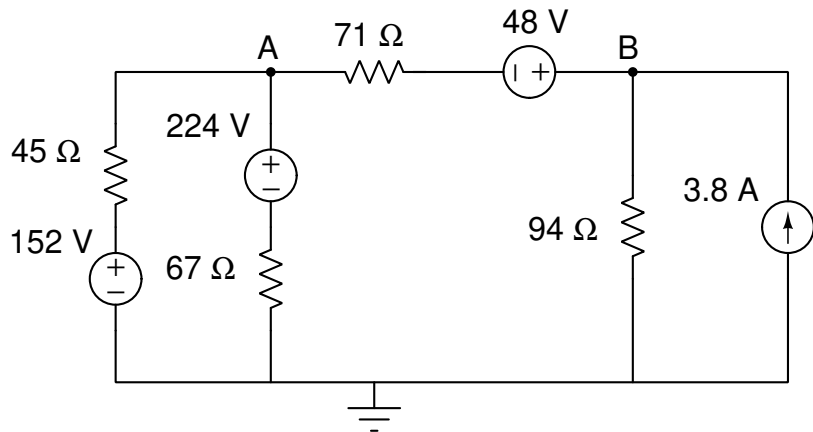
Κομβική 1



$$\frac{V_A - 152}{45} + \frac{(-224 + V_A)}{67} + \frac{V_A - V_B}{71} = 0$$
$$\frac{V_B - V_A}{71} + \frac{V_B}{94} - 3.8 = 0$$

Spice και Octave

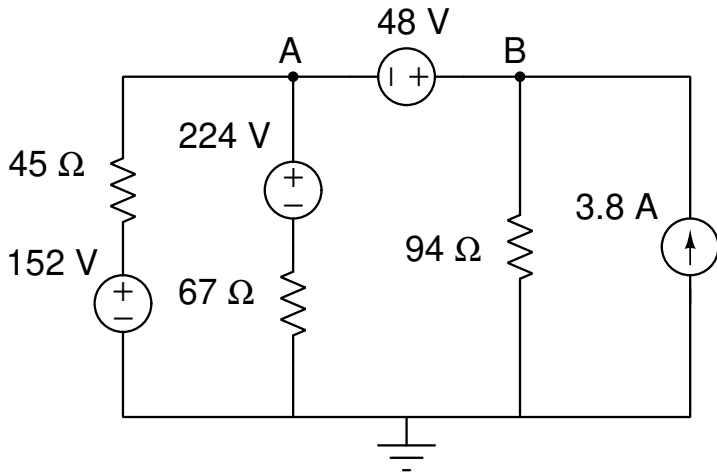
Κομβική 2



$$\frac{V_A - 152}{45} + \frac{(-224 + V_A)}{67} + \frac{V_A - (-48 + V_B)}{71} = 0$$
$$\frac{(-48 + V_B) - V_A}{71} + \frac{V_B}{94} - 3.8 = 0$$

Spice και Octave

Κομβική 3



$$\frac{V_A - 152}{45} + \frac{(-224 + V_A)}{67} + I_x = 0$$

$$-I_x + \frac{V_B}{94} - 3.8 = 0$$

$$V_B - V_A = 48$$

που γίνεται

$$\frac{V_A - 152}{45} + \frac{(-224 + V_A)}{67} + \frac{V_B}{94} - 3.8 = 0$$

$$V_B - V_A = 48$$

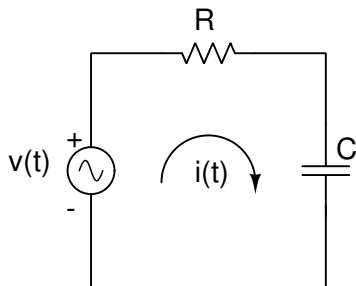
Spice και Octave

1 Ασκήσεις DC

2 Ασκήσεις AC

Άσκηση (Δ6, σελ 54)

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10 \sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ και $C = 3 \mu\text{F}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



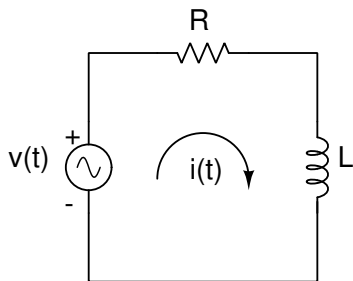
Σύγκριση με LTspice - Ανάλυση με φάσορες (AC Analysis)

```
octave:1> R=1e3; C=3e-6; w=628; f=w/(2*pi)
f = 99.949
octave:2> V=(10/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V = 6.8301 + 1.8301i
octave:3> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
    7.0711    15.0000
```

Σύγκριση με LTspice - Μεταβατική ανάλυση (Transient)

Άσκηση (Δ6, σελ 57)

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10 \sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ και $L = 150 \text{ mH}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Σύγκριση με LTspice - Ανάλυση με φάσορες (AC Analysis)

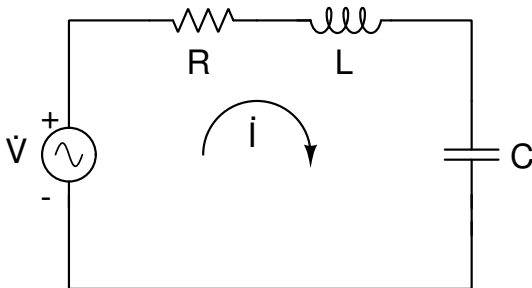
```
octave:4> R=1e3; L=150e-3; w=628; f=w/(2*pi)
f = 99.949
```

Σύγκριση με LTspice - Μεταβατική ανάλυση (Transient)

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $\dot{V} = 100\text{ V}$ και τιμές στοιχείων $R = 100\ \Omega$, $C = 1\ \mu\text{F}$, $L = 15\ \text{mH}$ και συχνότητα πηγής $f = 1\ \text{kHz}$. Να βρεθούν:

- Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή.
- Οι κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.
- Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων.
- Το κύκλωμα έχει χωρητική ή επαγωγική αντίσταση και γιατί;



Άσκηση (συνέχεια 1)

Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι η εν σειρά εμπέδηση της ωμικής, επαγωγικής και χωρητικής αντίστασης

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 100 + j94.2478 - j159.155 = 100.000 - j64.907 = 119.22 \angle -32.986^\circ \Omega$$

Το ρεύμα στον βρόχο που διέρχεται και από τις τρεις εμπεδήσεις (κανόνας τάσεων Kirchhoff) είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 0.7036 + j0.4567 = 0.839 \angle 32.986^\circ \text{ A}$$

Η κυματομορφή του ρεύματος που διέρχεται από όλα τα στοιχεία του κυκλώματος είναι

$$i(t) = 0.839\sqrt{2} \sin(6283.2t + 32.986^\circ) \text{ A} = 1.1862 \sin(6283.2t + 32.986^\circ) \text{ A}$$

Η κυματομορφή της τάσης της πηγής είναι

$$v(t) = 100\sqrt{2} \sin(6283.2t) = 141.42 \sin(6283.2t) \text{ V}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 70.358 + j45.668 = 83.88 \angle 32.986^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 118.62 \sin(6283.2t + 32.986^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του επαγωγέα είναι

$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot Z_L = -43.041 + j66.311 = 79.055 \angle 122.99^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

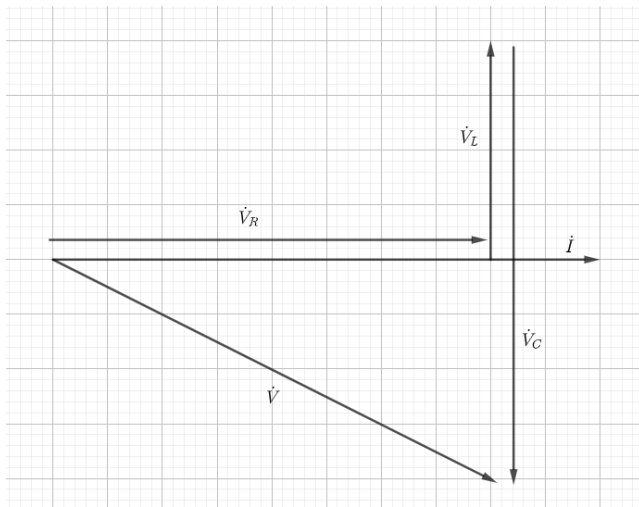
$$v_L(t) = 111.8 \sin(6283.2t + 122.99^\circ) \text{ V}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = 72.682 - j111.979 = 133.5 \angle -57.014^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_C(t) = 188.8 \sin(6283.2t - 57.014^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 3)



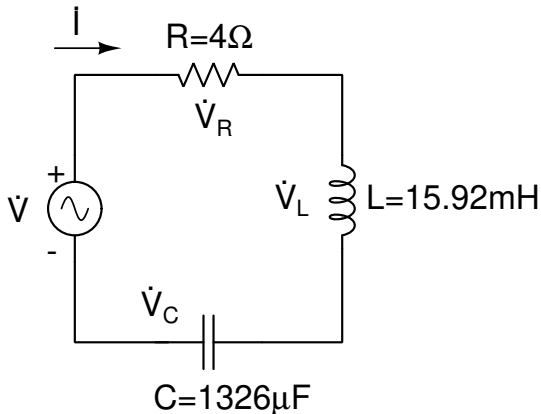
Το κύκλωμα έχει χωρητική αντίσταση εφόσον

$$\Im m Z = \omega L - 1/(\omega C) = -64.907 \Omega < 0$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $v(t) = 12\sqrt{2} \cos(377t + 90^\circ)$ V. Να βρεθούν

- Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή.
- Οι κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Η συχνότητα του εναλλασσομένου είναι $\omega = 377 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \omega/(2\pi) = 60 \text{ Hz}$ και ο φάσορας της τάσης με βάση το συνημίτονο είναι $\dot{V} = 12 \underline{/90^\circ} = j12 \text{ V}$.

Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι η εν σειρά εμπέδηση της ωμικής, επαγωγικής και χωρητικής αντίστασης

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 4 + j6 - j2 = 4 + j4 = 5.66 \underline{/45^\circ} \Omega$$

Το ρεύμα στον βρόχο που διέρχεται και από τις τρεις εμπεδήσεις (κανόνας τάσεων Kirchhoff) είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 1.5 + j1.5 = 2.12 \underline{/45^\circ} \text{ A} \Rightarrow$$

$$i(t) = 2.12\sqrt{2} \cos(377t + 45^\circ) \text{ A} = 3 \cos(377t + 45^\circ) \text{ A}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 6 + j6 = 8.485 \underline{/45^\circ} \text{ V} \Rightarrow v_R(t) = 12 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του επαγωγέα είναι

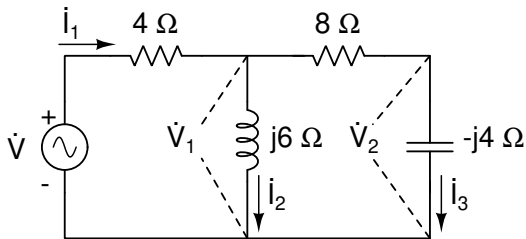
$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot j\omega L = -9 + j9 = 12.732 \angle 135^\circ \text{ V} \Rightarrow v_L(t) = 18 \cos(377t + 135^\circ) \text{ V}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$\dot{V}_C = \dot{I} / (j\omega C) = 3 - j3 = 4.243 \angle -45^\circ \text{ V} \Rightarrow v_C(t) = 6 \cos(377t - 45^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι τάσεις και τα ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{V} = 24 \angle 60^\circ \text{ V}$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι

$$\begin{aligned} Z &= 4 + \frac{j6(8 - j4)}{j6 + 8 - j4} = 4 + \frac{24 + j48}{8 + j2} = 4 + \frac{288 + j336}{68} = \\ &= 8.235 + j4.941 = 9.604 \angle 30.964^\circ \Omega \end{aligned}$$

Βήμα-βήμα τα υπόλοιπα μεγέθη είναι

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{24 \angle 60^\circ}{9.604 \angle 30.964^\circ} = 2.499 \angle 29.036^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V} - 4\dot{I}_1 = 16.263 \angle 78.435^\circ \text{ V}$$

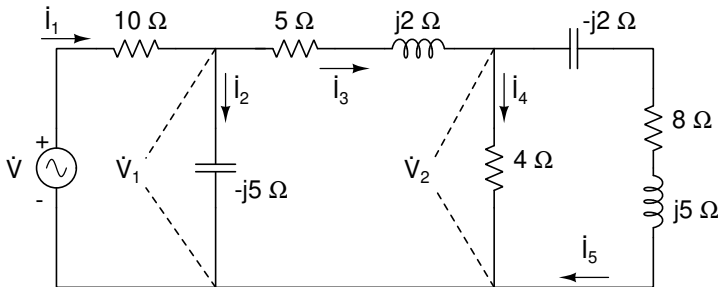
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1}{j6} = 2.710 \angle -11.565^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 1.818 \angle 105^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_2 = \dot{I}_3(-j4) = 7.273 \angle 15^\circ \text{ V}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η τάση της πηγής στο παρακάτω κύκλωμα όταν $I_4 = 3 \angle 45^\circ$ A.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Έχουμε $\dot{I}_4 = 3 \angle 45^\circ$ A οπότε:

$$\dot{V}_2 = 4\dot{I}_4 = 12 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{V}_2}{8 + j5 - j2} = 1.404 \angle 24.444^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 4.343 \angle 38.480^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_3(5 + j2) + \dot{V}_2 = 35.107 \angle 55.113^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1}{-j5} = 7.021 \angle 145.113^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 7.121 \angle 109.352^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V} = 10\dot{I}_1 + \dot{V}_1 = 96.047 \angle 92.098^\circ \text{ V}$$

στιγμιαία ισχύς

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Για εναλλασσόμενο ρεύμα ημιτονικής μορφής όπου

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \quad \text{και} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

η στιγμιαία ισχύς γίνεται

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) = \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] \Rightarrow \\ p(t) &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] \end{aligned}$$

Βλέπουμε ένα τμήμα που είναι σταθερό με το χρόνο και ένα δεύτερο που μεταβάλλεται με το χρόνο, αλλά με διπλάσια συχνότητα από αυτή του ρεύματος. Παίρνοντας την μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος σε μια περίοδο T έχουμε την

μέση ισχύ

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt =$$
$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] dt \Rightarrow$$
$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

συντελεστής ισχύος, ωμικά, χωρητικά και επαγωγικά φορτία

Περί ισχύος (συνέχεια 2)

μιαδική ισχύς

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$$

όπου το * δηλώνει συζυγή μιγαδικό. Επομένως

$$\dot{S} = V_{\text{rms}} \angle \phi_v \cdot I_{\text{rms}} \angle -\phi_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \phi_v - \phi_i \Rightarrow$$

$$\Re\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i) = P \quad \text{και} \quad \Im\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\phi_v - \phi_i) = Q$$

και το πραγματικό μέρος P είναι η μέση ισχύς που ορίσαμε παραπάνω ενώ το φανταστικό Q το ονομάζουμε **άεργο ισχύ**.

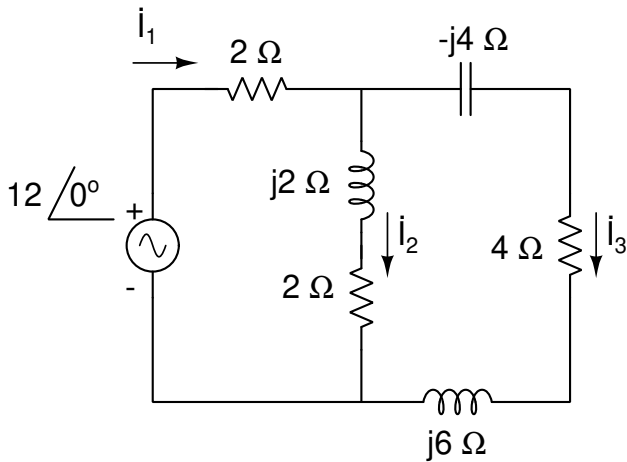
Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος το ονομάζουμε **φαινομένη ισχύ** και είναι

$$S = |\dot{S}| = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}^*| = V \cdot I$$

Για λόγους διαχωρισμού, οι μονάδες της μιγαδικής (και φαινομένης) ισχύος είναι VA, της πραγματικής W και της αέργου VAR.

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα.



Άσκηση (συνέχεια 1)

$$Z_1 = 2 \Omega, Z_2 = 2 + j2 \Omega, Z_3 = 4 + j6 - j4 \Omega$$

$$Z_{23} = Z_2 \parallel Z_3 = 1.754 \angle 37.875^\circ = 1.385 + j1.077 \Omega$$

$$Z_{\text{ολικό}} = Z_1 + Z_{23} = 3.385 + j1.077 = 3.552 \angle 17.65^\circ \Omega$$

$$I_1 = \frac{12 \angle 0^\circ}{Z_{\text{ολικό}}} = 3.379 \angle -17.65^\circ = 3.219 - j1.024 \text{ A}$$

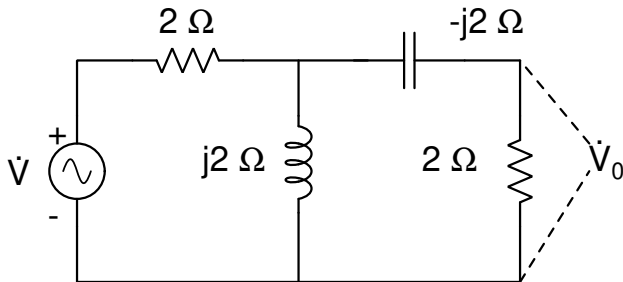
και με διαιρέτη ρεύματος

$$I_2 = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} I_1 = 2.095 \angle -24.775^\circ = 1.902 - j0.878 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} I_1 = 1.325 \angle -6.340^\circ = 1.317 - j0.146 \text{ A}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η τάση της πηγής στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{V}_0 = 8 \angle 45^\circ \text{ V}$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το ρεύμα στο δεξιό κλάδο είναι $\dot{I}_0 = \dot{V}_0/2 = 4 \angle 45^\circ$ A. Με κομβική ανάλυση αν ο πάνω κόμβος είναι A και ο κάτω, ο κόμβος αναφοράς

$$\frac{\dot{V}_A - \dot{V}}{2} + \frac{\dot{V}_A}{j2} + \frac{\dot{V}_A}{2 - j2} = 0$$

$$\dot{V}_A = \frac{\dot{V}}{2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{2 - j2} \right)}$$

$$\frac{\dot{V}_A}{2 - j2} = \dot{I}_0 \Rightarrow$$

$$\dot{V} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{2 - j2} \right) (2 - j2)(4 \angle 45^\circ) = 17.89 \angle -18.4^\circ \text{ V}$$

```
octave:1> a=2*(1/2+1/(j*2)+1/(2-j*2))
a = 1.50000 - 0.50000i
octave:2> V=a*(2-j*2)*4*exp(j*45*pi/180)
V = 16.9706 - 5.6569i
octave:3> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
17.889 -18.435
```


Άσκηση

Να βρείτε τις εμπεδήσεις που έχουν τα παρακάτω στοιχεία:

- Πηνίο 2 H στα 100 Hz.
 - Πυκνωτής 25 μF στα 50 Hz.
 - Πυκνωτής 25 μF στα 50 rad/s.
 - Ωμική αντίσταση 75 Ω στα 377 rad/s.
-

$$Z_L = j\omega L = j2\pi fL = j628.32 \cdot 2 = j1256.6 \Omega$$

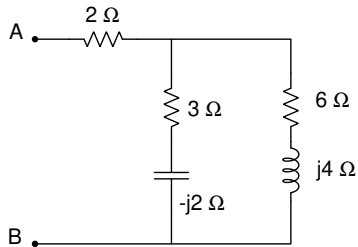
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{2\pi fC} = -j127.32 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j800 \Omega$$

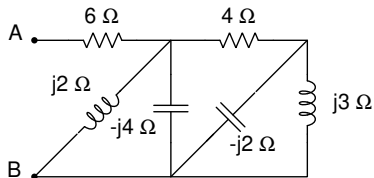
$$R = 75 \Omega$$

Άσκηση

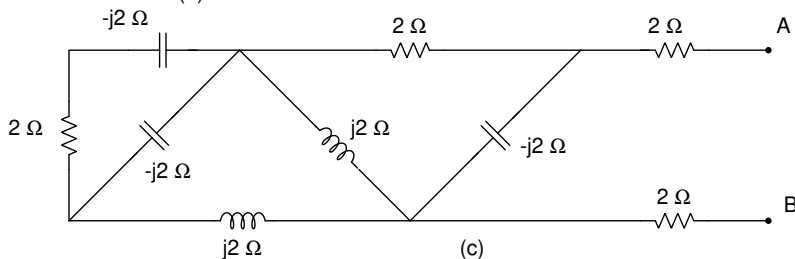
Να βρείτε την ολική εμπέδηση που φαίνεται από τα A, B στα παρακάτω κυκλώματα.



(a)



(b)



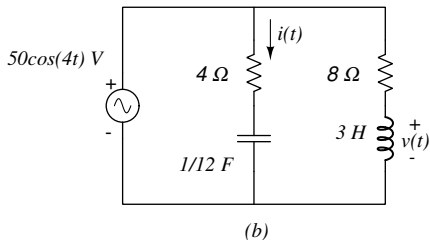
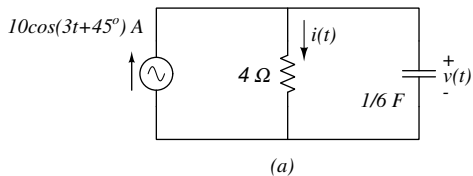
(c)

Άσκηση (συνέχεια 1)

- $Z_{AB} = [(6 + j4) \parallel (3 - j2)] + 2 = 4.792 \angle -7.334^\circ \Omega$
- $Z_{AB} = \left[\left\{ \left([(j3) \parallel (-j2)] + 4 \right) \parallel (-j4) \right\} \parallel (j2) \right] + 6 = 10.77 \angle 31.33^\circ \Omega$
- $Z_{AB} = \left\{ \left[\left\{ \left([(2 - j2) \parallel (-j2)] + (j2) \right) \parallel (j2) \right\} + 2 \right] \parallel (-j2) \right\} + 2 + 2 = 5.423 \angle -12.53^\circ \Omega$

Άσκηση

Να βρεθούν η τάση $v(t)$ και το ρεύμα $i(t)$ στα παρακάτω κυκλώματα.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Στο κύκλωμα (a) ο πυκνωτής έχει εμπέδηση $Z_C = -j/(3/6) = -j2 \Omega$ και ο φάσορας της πηγής είναι $\dot{I}_s = (10/\sqrt{2}) \underline{/45^\circ}$ A. Με διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I} = \frac{Z_C}{Z_C + 4} \dot{I}_s = 3 - j = 3.162 \underline{/ -18.435^\circ} \Rightarrow i(t) = 4.472 \cos(3t - 18.435^\circ) \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι ίδια με την τάση στα άκρα της 4Ω . Άρα, $v(t) = 4i(t) = 17.89 \cos(3t - 18.435^\circ) \text{ V}$.

Στο κύκλωμα (b) ο πυκνωτής έχει εμπέδηση $Z_C = -j/(4/12) = -j3 \Omega$, το πηνίο $Z_L = j4 \cdot 3 = j12 \Omega$, και ο φάσορας της πηγής είναι $\dot{V}_s = (50/\sqrt{2}) \underline{/0^\circ}$ A.

Η τάση στο μεσαίο κλάδο είναι η τάση της πηγής, άρα

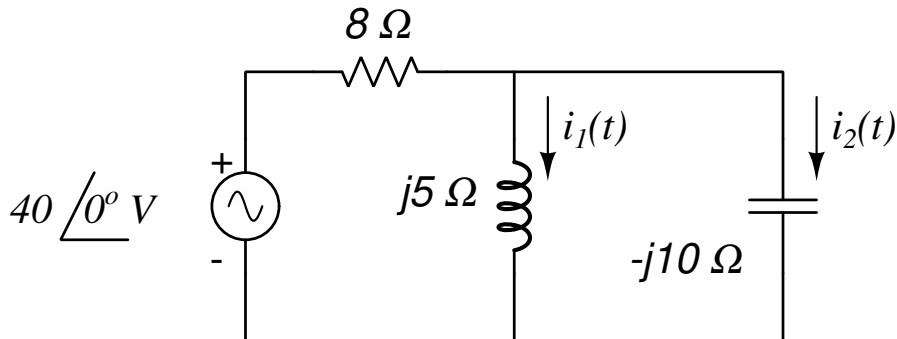
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_s}{4 - j3} = 7.071 \underline{/36.87^\circ} \Rightarrow i(t) = 10 \cos(4t + 36.87^\circ) \text{ A}$$

Στον δεξιό κλάδο μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτη τάσης, άρα

$$\dot{V} = \frac{Z_L}{Z_L + 8} \dot{V}_s = 29.417 \underline{/33.69^\circ} \Rightarrow v(t) = 41.603 \cos(4t + 33.69^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση

Να βρεθούν τα ρεύματα $i_1(t)$, $i_2(t)$ στο παρακάτω κύκλωμα εάν η συχνότητα της πηγής είναι $f = 50$ Hz.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το πηνίο και ο πυκνωτής είναι παράλληλα και η εμπέδηση είναι

$$Z = (j5) \parallel (-j10) = j10 \Omega$$

Με διαιρέτη τάσης, η τάση στα άκρα του πηνίου και πυκνωτή είναι

$$\dot{V} = \frac{j10}{j10 + 8} 40 = 31.235 \angle 38.66^\circ \text{ V}$$

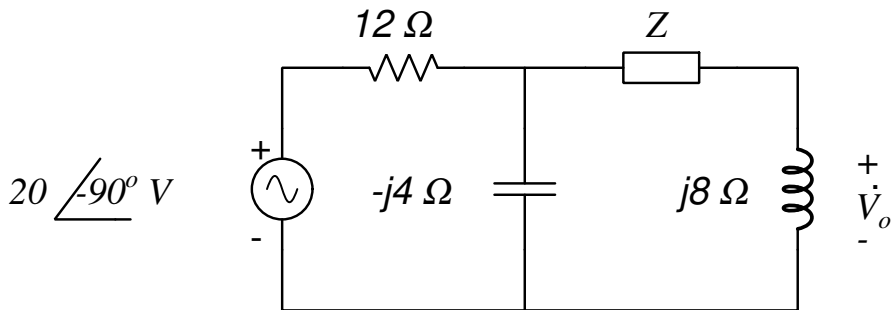
άρα

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{j5} = 6.247 \angle -51.34^\circ \Rightarrow i_1(t) = 8.834 \sin(2\pi 50 \cdot t - 51.34^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}}{-j10} = 3.123 \angle 128.66^\circ \Rightarrow i_2(t) = 4.417 \sin(2\pi 50 \cdot t + 128.66^\circ) \text{ A}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η εμπέδηση Z στο παρακάτω κύκλωμα εάν $\dot{V}_o = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο άρα και από την άγνωστη εμπέδηση είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_o}{j8} = -j0.5 \text{ A}$$

Αν A ο επάνω κόμβος και γη ο κάτω, με κομβική ανάλυση

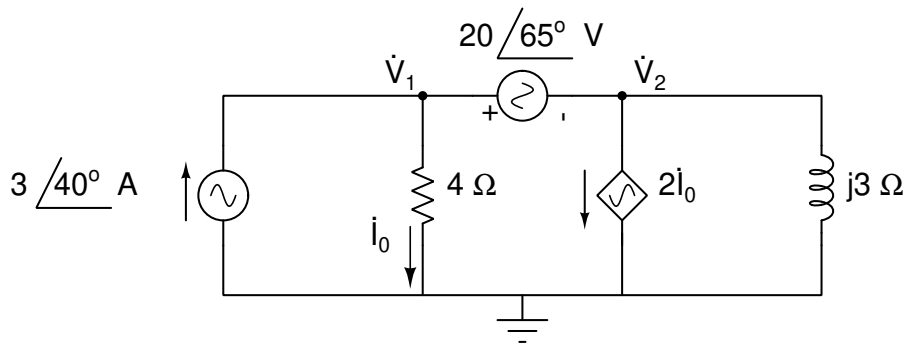
$$\frac{\dot{V}_A - (-j20)}{12} + \frac{\dot{V}_A}{(-j4)} + \dot{I} = 0 \Rightarrow \dot{V}_A = -4.2 - j1.4 \text{ V}$$

$$\dot{V}_A = \dot{I}Z + \dot{V}_o \Rightarrow Z = 16.6 / \underline{-80.3^\circ} \Omega$$

```
octave:4> I=V0/(j*8)
I = 0.00000 - 0.50000i
octave:5> Va=(-j*20/12-I)/(1/12+j/4)
Va = -4.2000 - 1.4000i
octave:6> Z=(Va-V0)/I
Z = 2.8000 - 16.4000i
octave:7> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
16.637 -80.311
```

Άσκηση

Να υπολογίσετε τις τάσεις \dot{V}_1 , \dot{V}_2 .



Άσκηση (συνέχεια 1)

Με κομβική ανάλυση έχουμε

$$\left. \begin{aligned} -3/\underline{40^\circ} + \dot{V}_1/4 + \dot{I}_{12} &= 0 \\ -\dot{I}_{12} + 2\dot{I}_0 + \dot{V}_2/(j3) &= 0 \\ \dot{I}_0 &= \dot{V}_1/4 \\ \dot{V}_1 - \dot{V}_2 &= 20 \underline{/65^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (3/4)\dot{V}_1 - (j/3)\dot{V}_2 &= 3/\underline{40^\circ} \\ \dot{V}_1 - \dot{V}_2 &= 20 \underline{/65^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\dot{V}_1 = 10.2/\underline{17.9^\circ} \text{ V} \quad \dot{V}_2 = 15.0/\underline{-85.1^\circ} \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

```
octave:9> A=[3/4 -j/3; 1 -1]
```

```
A =
```

```
0.75000 + 0.00000i  -0.00000 - 0.33333i  
1.00000 + 0.00000i  -1.00000 + 0.00000i
```

```
octave:10> b=[3*exp(j*40*pi/180); 20*exp(j*65*pi/180)]
```

```
b =
```

```
2.2981 + 1.9284i  
8.4524 + 18.1262i
```

```
octave:11> V=inv(A)*b
```

```
V =
```

```
9.7259 + 3.1372i  
1.2736 - 14.9890i
```

```
octave:12> [abs(V) angle(V)*180/pi]
```

```
ans =
```

```
10.219  17.878  
15.043 -85.143
```