Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 06

Α. Δροσόπουλος

22-11-2021

Outline

Topic

1. Ασκήσεις
2. Επανάληψη μιγαδικών
3. Εναλλασσόμενο

Topic

Αναπαράσταση μιγαδικών

- Καρτεσιανή μορφή

$$z = x + jy$$

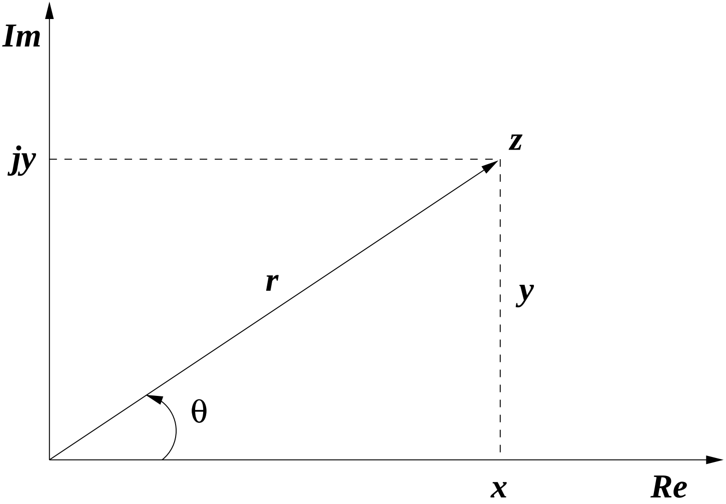
όπου $j = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα, x είναι το *πραγματικό μέρος* του z και y είναι το *φανταστικό μέρος* του z.

$$x = \Re e\{z\} \qquad\qquad y = \Im m\{z\}$$

- Ιδιότητες φανταστικής μονάδας

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j} &= -j \\
j^2 &= -1 \\
j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\
j^4 &= j^2 \cdot j^2 = 1 \\
j^5 &= j \cdot j^4 = j \\
&\vdots \\
j^{n+4} &= j^n
\end{aligned}$$

Αναπαράσταση μιγαδικών (συνέχεια 1)



Αναπαράσταση μιγαδικών (συνέχεια 2)

- Πολική μορφή

$$z = |z| \underline{/\theta} = r \underline{/\theta}$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ή

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \sin\theta$$

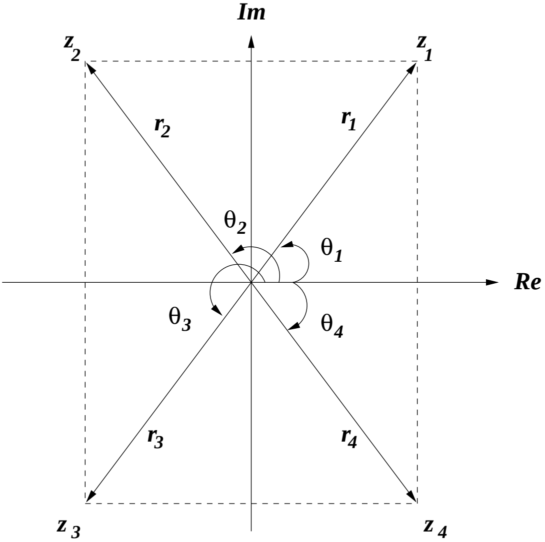
και

$$z = x + jy = r \underline{/\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

- Εκθετική μορφή

$$z = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Μετατροπές



Μετατροπές (συνέχεια 1)

Στην μετατροπή από καρτεσιανή σε πολική μορφή χρειάζεται προσοχή στον προσδιορισμό της σωστής τιμής της γωνίας θ ανάλογα με το τεταρτημόριο όπου βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός. Υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες:

$$z = x + jy \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{1ο τετ}$$

$$z = -x + jy \qquad \theta = 180^\circ - \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{2ο τετ}$$

$$z = -x - jy \qquad \theta = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -180^\circ + \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{3ο τετ}$$

$$z = x - jy \qquad \theta = 360^\circ - \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{4ο τετ}$$

όπου $x > 0$, $y > 0$.

Παράδειγμα 1

Να εκφράσετε τον $z_1 = 6 + j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_1 = 6 + j8$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{8}{6} = 53.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_1 = 10\,\underline{/53.13^\circ}$ και η εκθετική $z_1 = 10e^{j53.13^\circ}$.

```
>> z1=6+j*8
z1 =  6 + 8i
>> r1=sqrt(real(z1)^2 + imag(z1)^2)
r1 =  10
>> r1=abs(z1)
r1 =  10
>> theta1 = atan(imag(z1)/real(z1))*180/pi
theta1 =  53.130
>> theta1 = atan2(imag(z1),real(z1))*180/pi
theta1 =  53.130
>> theta1 = angle(z1)*180/pi
theta1 =  53.130
```

Παράδειγμα 2

Να εκφράσετε τον $z_2 = -6 + j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_2 = -6 + j8$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο επομένως

$$r_2 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_2 = 180^\circ - \tan^{-1}\frac{8}{6} = 126.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_2 = 10 \,\underline{/126.87^\circ}$ και η εκθετική $z_2 = 10e^{j126.87^\circ}$.

```
>> z2=-6+j*8
z2 = -6 + 8i
>> r2=abs(z2)
r2 =  10
>> theta2 = atan(imag(z2)/real(z2))*180/pi
theta2 = -53.130
>> theta2 = atan2(imag(z2),real(z2))*180/pi
theta2 =  126.87
>> theta2 = angle(z2)*180/pi
theta2 =  126.87
```

Παράδειγμα 3

Να εκφράσετε τον $z_3 = -6 - j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_3 = -6 - j8$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_3 = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{8}{6} = 233.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_3 = 10 \underline{/233.13^\circ}$ και η εκθετική $z_3 = 10e^{j233.13^\circ}$. Επίσης σωστό είναι

$$\theta_3 = -180^\circ + \tan^{-1}\frac{8}{6} = -126.87^\circ$$

και πολική μορφή $z_3 = 10 \underline{/-126.87^\circ}$ και εκθετική $z_3 = 10e^{-j126.87^\circ}$.

```
>> z3=-6-j*8
z3 = -6 - 8i
>> r3=abs(z3)
r3 =  10
>> theta3 = atan(imag(z3)/real(z3))*180/pi
theta3 =  53.130
>> theta3 = atan2(imag(z3),real(z3))*180/pi
theta3 = -126.87
>> theta3 = angle(z3)*180/pi
theta3 = -126.87
```

Παράδειγμα 4

Να εκφράσετε τον $z_4 = 6 - j8$ σε πολική και εκθετική μορφή.

Ο $z_4 = 6 - j8$ ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_4 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \qquad \theta_4 = 360^\circ - \tan^{-1}\frac{8}{6} = 306.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_4 = 10\ \underline{/306.87^\circ}$ και η εκθετική $z_4 = 10e^{j306.87^\circ}$. Επίσης σωστό είναι

$$\theta_4 = -\tan^{-1}\frac{8}{6} = -53.13^\circ$$

και πολική μορφή $z_4 = 10\ \underline{/-53.13^\circ}$ και εκθετική $z_4 = 10e^{-j53.13^\circ}$.

```
>> z4=6-j*8
z4 =  6 - 8i
>> r4=abs(z4)
r4 =  10
>> theta4 = atan(imag(z4)/real(z4))*180/pi
theta4 = -53.130
>> theta4 = atan2(imag(z4),real(z4))*180/pi
theta4 = -53.130
>> theta4 = angle(z4)*180/pi
theta4 = -53.130
```

Κομπιουτεράκι

Κομπιουτεράκι 2

- **Coordinate Conversion (Pol (x , y) , Rec (r , θ))**
  - Calculation results are automatically assigned to variables E and F.
  - Example 1: To convert polar coordinates（r = 2,θ=60˚）to rectangular coordinates(x , y) (Deg).

x =1 [SHIFT] [Rec (] 2 [,] 60 [)] [=]

Rec(2,60) D
1.

y=1.732050808 [RCL] [F]

F= D
1.732050808

  - Press [RCL] [E] to display the value of x ,or [RCL] [F] to display the value of y .
  - Example 2: To convert rectangular coordinates（1, √3）to polar coordinates(r ,θ) (Rad).

r=2 [Pol (] 1 [,] [√] 3 [)] [=]

Pol(1,√3) R
2.

θ=1.047197551 [RCL] [F]

F= R
1.047197551

  - Press [RCL] [E] to display the value of r or [RCL] [F] to display the value of θ.

Παράδειγμα 5

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή.
$z_1 = 12\ \underline{/-60^\circ}$, $z_2 = -50\ \underline{/285^\circ}$, $z_3 = 8e^{j10^\circ}$, $z_4 = 20e^{-j\pi/3}$.

```
>> z1=12*exp(-j*60*pi/180)
z1 =   6.0000 - 10.3923i
>> z2=-50*exp(j*285*pi/180)
z2 = -12.941 + 48.296i
>> z3=8*exp(j*10*pi/180)
z3 =  7.8785 + 1.3892i
>> z4=20*exp(-j*pi/3)
z4 =  10.000 - 17.321i
```

Αριθμητικές πράξεις

Δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$ είναι ίσοι αν και μόνον αν και τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι αντιστοίχως ίσα

$$x_1 = x_2 \qquad \text{και} \qquad y_1 = y_2$$

Ο *συζυγής μιγαδικός* του μιγαδικού αριθμού $z = x + jy = r\,\underline{/\theta} = re^{j\theta}$ είναι

$$z^* = x - jy = r\,\underline{/-\theta} = re^{-j\theta}$$

Δοθέντων δυο μιγαδικών αριθμών $z_1 = x_1 + jy_1$ και $z_2 = x_2 + jy_2$ το άθροισμά τους είναι

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

και η διαφορά τους

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Αριθμητικές πράξεις (συνέχεια 1)

Στην πράξη, η πρόσθεση και αφαίρεση μεταξύ μιγαδικών αριθμών γίνεται πιο απλά στην καρτεσιανή τους μορφή. Ο πολλαπλασιασμός όμως και η διαίρεση γίνονται πιο απλά στην πολική ή εκθετική τους μορφή

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

Εναλλακτικά, στην καρτεσιανή μορφή

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \left(\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\right)\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Άσκηση 1

Εάν $A = 2 + j5$, $B = 4 - j6$ να βρείτε, α) $A^*(A+B)$, β) $(A+B)/(A-B)$.

Εάν $A = 2 + j5$ τότε $A^* = 2 - j5$ και

$$A + B = (2+4) + j(5-6) = 6 - j$$

οπότε

$$A^*(A+B) = (2-j5)(6-j) =$$
$$5.385 \underline{/-68.2^\circ} \cdot 6.083 \underline{/-9.46^\circ} =$$
$$32.757 \underline{/-77.66^\circ} = 7 - j32$$

Ομοίως

$$A - B = (2-4) + j[5-(-6)] = -2 + j11$$

οπότε

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{6-j}{-2+j11} = \frac{6.083 \underline{/-9.46^\circ}}{11.18 \underline{/100.305^\circ}} = 0.544 \underline{/-109.765^\circ} = -0.184 - j0.512$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων

$$\frac{(2+j5)\cdot(8e^{j10^\circ})}{2+j4+2\,\underline{/-40^\circ}} \qquad \text{και} \qquad \frac{j(3-j4)^*}{(-1+j6)(2+j)^2}$$

Έχουμε

$$\frac{(2+j5)\cdot(8e^{j10^\circ})}{2+j4+2\,\underline{/-40^\circ}} = \frac{5.385\,\underline{/68.2^\circ}\cdot 8\,\underline{/10^\circ}}{2+j4+1.532-j1.285} =$$

$$\frac{43.08\,\underline{/78.2^\circ}}{3.532+j2.715} = \frac{43.08\,\underline{/78.2^\circ}}{4.455\,\underline{/37.55^\circ}} = 9.67\,\underline{/40.65^\circ} = 7.34+j6.30$$

Επίσης

$$\frac{j(3-j4)^*}{(-1+j6)(2+j)^2} = \frac{j(3+j4)}{(-1+j6)(2+j)(2+j)} =$$

$$\frac{1\,\underline{/90^\circ}\cdot 5\,\underline{/53.13^\circ}}{6.083\,\underline{/99.462^\circ}\cdot 2.236\,\underline{/26.565^\circ}\cdot 2.236\,\underline{/26.565^\circ}} =$$

$$\frac{5\,\underline{/143.13^\circ}}{30.413\,\underline{/152.6^\circ}} = 0.164\,\underline{/-9.47^\circ} = 0.162-j0.027$$

Άσκηση 2 (συνέχεια 1)

```
>> (2+j*5)*8*exp(j*10*pi/180)/(2+j*4+2*exp(-j*40*pi/180))
ans =  7.3368 + 6.3009i
>> j*conj(3-j*4) / ( (-1+j*6)*(2+j)^2 )
ans =  0.162162 - 0.027027i
```

Χρήσιμες σχέσεις

Σχέσεις του Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \text{και} \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Για $z = x + jy = r \,\underline{/\theta}$ έχουμε

$$zz^* = x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + jy} = \left(re^{j\theta}\right)^{1/2} = \sqrt{r}\,\underline{/\theta/2}$$

$$z^n = (x + jy)^n = r^n \,\underline{/n\theta} = r^n e^{jn\theta} = r^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]$$

$$z^{1/n} = (x + jy)^{1/n} = r^{1/n}\,\underline{/\theta/n + 2\pi k/n} \qquad \text{όπου} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$$\ln(re^{j\theta}) = \ln r + \ln e^{j\theta} = \ln r + j\theta + j2k\pi \qquad \text{όπου} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Προσοχή στο τελευταίο. Το μαθηματικό υπόβαθρο (complex logarithm) μπορεί να γίνει αρκετά σύνθετο.

$$e^{\pm j\pi} = -1 \qquad e^{\pm j2\pi} = 1$$

$$e^{j\pi/2} = j \qquad e^{-j\pi/2} = -j$$

Topic

Ορισμός Εναλλασσομένου Ρεύματος

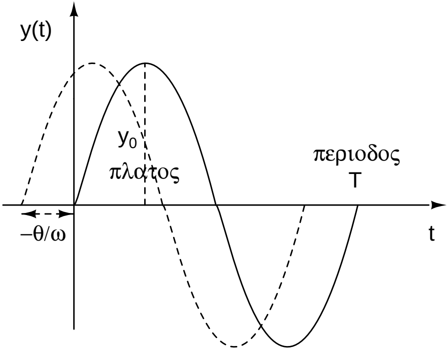
Εναλλασσόμενο ρεύμα είναι το ρεύμα που επαναλαμβάνεται περιοδικά στο χρόνο και διαγράφει ίσες θετικές και αρνητικές επιφάνειες σε μια περίοδο.

Σύμβολα συνεχούς: I για ρεύμα, V για τάση

Σύμβολα εναλλασσομένου: i ή $i(t)$ για ρεύμα, v ή $v(t)$ για τάση

Σύνθεση

Η πιο απλή μορφή εναλλασσομένου: $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \theta)$



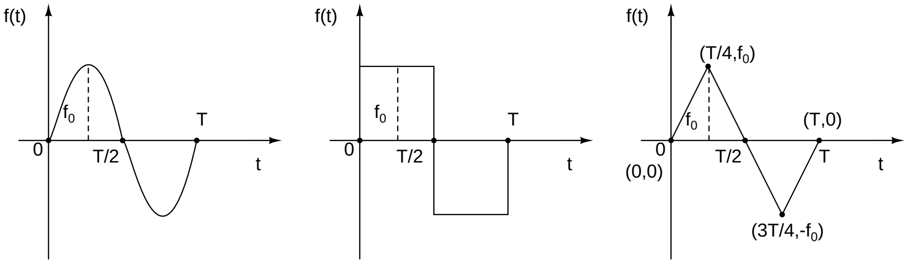
Με σύνθεση Fourier μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε μορφή εναλλασσομένου ρεύματος από ημίτονα με διαφορετικά πλάτη, συχνότητες και αρχικές φάσεις. Με ανάλυση Fourier μπορούμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε εναλλασσόμενο ρεύμα σε ημίτονα (αρμονικές).

Ενεργός Τιμή

- Το ρεύμα που διαρρέει μια ωμική αντίσταση αναπτύσσει θερμότητα (φαινόμενο Joule). Ορίζουμε ενεργό τιμή εναλλασσομένου ρεύματος, την τιμή της αντίστοιχης τάσης ή ρεύματος του συνεχούς ρεύματος που έχει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με το εναλλασσόμενο σε μια ωμική αντίσταση.
- Τρόπος υπολογισμού για διάφορα είδη εναλλασσομένου:
- Σε περιοδικές συναρτήσεις (και το εναλλασσόμενο είναι περιοδική συνάρτηση), $f(t) = f(t + kT),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, με περίοδο T, η ενεργός τιμή της συνάρτησης (rms - root mean square) είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός που ορίζεται ως:

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Τρία κοινά είδη εναλλασσομένου



$$f_{\text{rms}} = K f_0$$

Ενεργός Τιμή ημιτόνου

$$f_{\mathsf{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

όπου $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ με $\omega = 2\pi/T$. Έχουμε τότε

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega t) dt = \frac{1}{2}(T-0) - \frac{1}{4\omega}\int_0^T \cos(2\omega t) d(2\omega t) =$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\Big|_0^T = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega}\left[\sin(2\frac{2\pi}{T}T) - \sin 0\right] = \frac{T}{2}$$

εφόσον τα ημίτονα μηδενίζονται. Οπότε

$$f_{\mathsf{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\,\frac{T\, f_0^2}{2}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ενεργός Τιμή τετραγωνικού παλμού

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{για } 0 \leq t < T/2 \\ -f_0 & \text{για } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} f_0^2 \, dt + \int_{T/2}^T f_0^2 \, dt = f_0^2 \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = f_0^2 \, T \Rightarrow$$

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \, f_0^2 \, T} = f_0 \Rightarrow K = 1$$

Εδώ έχουμε

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{4f_0}{T}t & \text{για } 0 \le t < T/4 \\[2ex] 2f_0 - \dfrac{4f_0}{T}t & \text{για } T/4 \le t < 3T/4 \\[2ex] -4f_0 + \dfrac{4f_0}{T}t & \text{για } 3T/4 \le t < T \end{cases}$$

με

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \int_0^{T/4} \left(\frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} \left(2f_0 - \frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt + \int_{3T/4}^{T} \left(-4f_0 + \frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt$$

$$\int_0^{T/4} \left(\frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt = \left(\frac{4f_0}{T}\right)^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4} = \left(\frac{4f_0}{T}\right)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{T}{4}\right)^3 = \frac{f_0^2\, T}{12}$$

$$\left(2f_0 - \frac{4f_0}{T}t\right)^2 = 4f_0^2\left(1 + \frac{4}{T^2}t^2 - \frac{4}{T}t\right) \Rightarrow \int_{T/4}^{3T/4} \left(2f_0 - \frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt =$$

Ενεργός Τιμή τριγωνικού παλμού (συνέχεια 1)

$$= 4f_0^2 \left([t]_{T/4}^{3T/4} + \frac{4}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{T/4}^{3T/4} - \frac{4}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T/4}^{3T/4} \right) = \ldots = \frac{f_0^2\, T}{6}$$

$$\left(-4f_0 + \frac{4f_0}{T} t \right)^2 = (4f_0)^2 \left(\frac{t}{T} - 1 \right)^2 = (4f_0)^2 \left(\frac{t^2}{T^2} + 1 - \frac{2t}{T} \right) \Rightarrow$$

$$\int_{3T/4}^{T} \left(-4f_0 + \frac{4f_0}{T} t \right)^2 dt = (4f_0)^2 \left(\frac{1}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{3T/4}^{T} + [t]_{3T/4}^{T} - \frac{2}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{3T/4}^{T} \right) = \ldots = \frac{f_0^2\, T}{12}$$

Οπότε τελικά

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{f_0^2\, T}{12} + \frac{f_0^2\, T}{6} + \frac{f_0^2\, T}{12} \right)} = \sqrt{f_0^2 \frac{1}{3}} = \frac{f_0}{\sqrt{3}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Άλλες τιμές - Ισχύς και Ενέργεια

- Μέση αριθμητική τιμή:

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

- Μέση αριθμητική τιμή ανορθωμένου:

$$\overline{|f|} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} |f(t)|dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} |f(t)|dt$$

- Ισχύς και Ενέργεια:

$$p(t) = v(t)\cdot i(t)$$

και εφόσον η ισχύς είναι πάντα ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, η ενέργεια που «δίνει» ή «παίρνει» κάποιο στοιχείο τη χρονική στιγμή t είναι

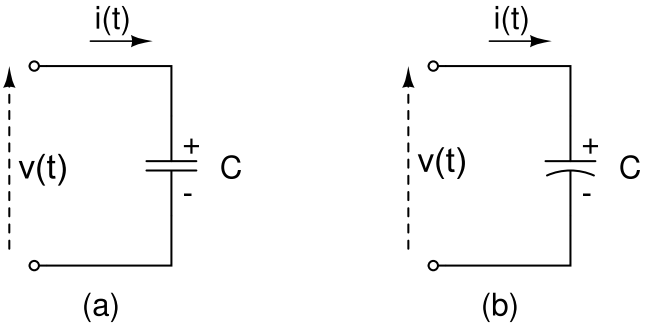
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

Ο πυκνωτής (capacitor) είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που αποτελείται από δυο αγώγιμες επιφάνειες (οπλισμοί) με διηλεκτρικό υλικό ανάμεσά τους. Εάν συνδεθεί κάποια πηγή στα άκρα του πυκνωτή, ο ένας οπλισμός θα φορτιστεί με θετικό φορτίο και ο άλλος με αρνητικό. Το ολικό φορτίο στον πυκνωτή είναι ανάλογο με την τάση στα άκρα του

$$q = Cv$$

όπου η σταθερά αναλογίας C είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή με διαστάσεις Coulomb ανά Volt ή Farad (F).



Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 1)

- Η διαφορά φορτίου μεταξύ των οπλισμών δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια.
- Λόγω του διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών, δεν υπάρχει κίνηση ηλεκτρικών φορτίων μεταξύ τους.
- Αν μεταβάλλεται το φορτίο στους οπλισμούς, τότε μεταβάλλεται και το ηλεκτρικό πεδίο, και είναι σαν να διέρχεται ρεύμα

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$$

- Με αντιστροφή, και για $v(-\infty) = 0$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\ dt$$

- Επίσης, για αρχική τάση σε κάποιο χρόνο t_0

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\ dt + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\ dt = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\ dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 2)

Σχέση ρεύματος - τάσης

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t) = C\ v(t)\ \frac{dv(t)}{dt}$$

Ενέργεια

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} C\ v(t)\ \frac{dv(t)}{dt}\ dt = \int_{-\infty}^{t} C\ v(t)\ dv(t) = \frac{1}{2}\ C\ v^2(t)\Big|_{v(-\infty)}^{v(t)} \Rightarrow$$

$$w_C(t) = \frac{1}{2}\ C\ v^2(t) \quad \mathrm{J}$$

εφόσον $v(-\infty) = 0$.

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 3)

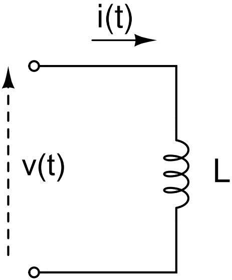
- Ιδανικός πυκνωτής
- Πραγματικός πυκνωτής
- Οι πυκνωτές μπορεί να έχουν σταθερή ή μεταβλητή τιμή χωρητικότητος με συνήθεις τιμές της τάξεως των mF μέχρι pF και έχουν πολλές εφαρμογές στα ηλεκτρικά κυκλώματα
- Στο συνεχές, στη σταθερή κατάσταση, ο πυκνωτής δρα σαν διακόπτης / ανοικτό κύκλωμα.

Το πηνίο στο εναλλασσόμενο

Πηνίο (inductor) είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που αποτελείται από αγωγό τυλιγμένο συνήθως γύρω από κάποιον κυλινδρικό σιδηρομαγνητικό πυρήνα. Σύμφωνα με το φαινόμενο επαγωγής, μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, προκαλεί την δημιουργία τάσης στα άκρα του πηνίου σύμφωνα με τη σχέση

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

όπου η σταθερά αναλογίας L είναι η αυτεπαγωγή του πηνίου (συνήθως συντομεύεται απλώς σε επαγωγή) με διαστάσεις Volt-second ανά Ampere ή Henry (H).



Το πηνίο στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 1)

Σχέση ρεύματος - τάσης

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}\,i(t)$$

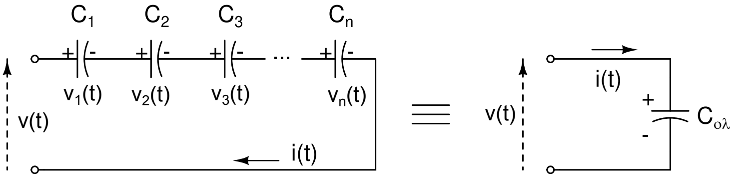
Ενέργεια

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} L\,\frac{di(t)}{dt}\,i(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} L\,i(t)\,di(t) = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t)\Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} \Rightarrow$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t) \quad \mathrm{J}$$

εφόσον $i(-\infty) = 0$.

Πυκνωτές σε σειρά



Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο έχουμε

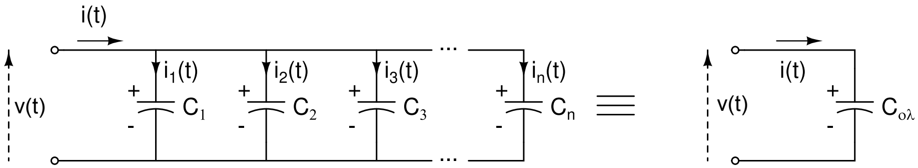
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \ldots + v_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{C_k} \int_{t_0}^{t} i_k(t)dt + v_k(t_0) \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{C_k} \right) \int_{t_0}^{t} i(t)dt \; + \; v(t_0) = \frac{1}{C_{\text{ολ}}} \int_{t_0}^{t} i(t)dt \; + \; v(t_0) \; \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{\text{ολ}}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{C_k} \right)$$

δηλ. πυκνωτές σε σειρά είναι σαν ωμικές αντιστάσεις παράλληλα.

Πυκνωτές παράλληλα



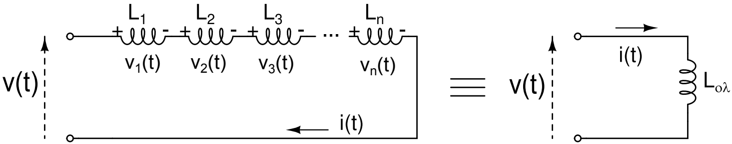
Από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο έχουμε

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \ldots + i_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k \, \frac{dv(t)}{dt} \right) \quad \Rightarrow$$

$$C_{\text{ολ}} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

δηλ. πυκνωτές παράλληλα είναι σαν ωμικές αντιστάσεις σε σειρά.

Πηνία σε σειρά

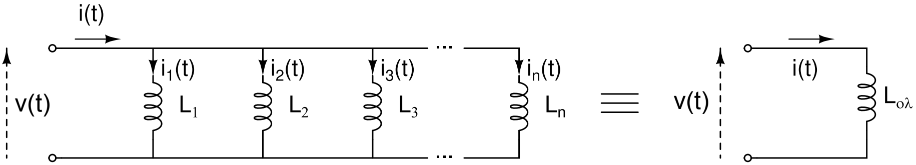


Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο έχουμε

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + ... + v_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(L_k \frac{di(t)}{dt} \right) \quad \Rightarrow \quad L_{\text{ολ}} = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

δηλ. επαγωγές σε σειρά είναι σαν ωμικές αντιστάσεις σε σειρά.

Πηνία παράλληλα



Από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο έχουμε

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \ldots + i_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{L_k} \int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_k(t_0) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{L_k} \right) \int_{t_0}^{t} v(t)dt \; + \; i(t_0) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L_{\text{ολ}}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{L_k} \right)$$

δηλ. επαγωγές παράλληλα είναι σαν ωμικές αντιστάσεις παράλληλα.

Είδη πηγών εναλλασσομένου

Ανεξάρτητες και εξαρτημένες

(a) *(b)* *(c)* *(d)*

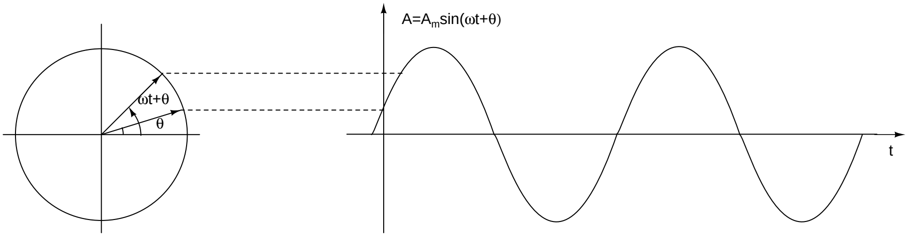
Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

- Σχέση τάσης – ρεύματος για πυκνωτές/πηνία περιλαμβάνει παραγώγους και ολοκληρώματα επομένως η εφαρμογή κανόνων Kirchhoff οδηγεί σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις κυματομορφές τάσης – ρεύματος σε ένα κύκλωμα.
- Όταν οι διεγέρσεις τάσης και ρεύματος σε ένα κύκλωμα που περιέχει γραμμικά στοιχεία (R, L, C) είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, μπορούμε να κάνουμε μετασχηματισμό Fourier ή Laplace και να μετατρέψουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 1)

Για διεγέρσεις μιας συχνότητας και για ημιτονικές συναρτήσεις παρατηρήστε το διάγραμμα όπου φαίνεται ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα περιστρεφόμενο μιγαδικό διάνυσμα με μια ημιτονική συνάρτηση.

Όλα τα ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις στο κύκλωμα για την παραπάνω περίπτωση περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα άρα, «παγώνοντας» το χρόνο, μπορούμε να περιγράψουμε ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις με μιγαδικά διανύσματα.



Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 2)

Ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση γράφεται

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad y(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

Θυμηθείτε και τη σχέση του Euler

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

Οπότε

$$Ae^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t + \theta) + jA\sin(\omega t + \theta)$$

$$\Re e\{Ae^{j(\omega t+\theta)}\} = A\cos(\omega t + \theta) \quad \text{και} \quad \Im m\{Ae^{j(\omega t+\theta)}\} = A\sin(\omega t + \theta)$$

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 3)

- Επομένως, αν παραστήσουμε ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση με τον μιγαδικό αριθμό $Ae^{j\theta}$ μπορούμε να γυρίσουμε στην αρχική ημιτονοειδή μορφή πολ/ζοντας με $e^{j\omega t}$ και παίρνοντας το φανταστικό ή πραγματικό μέρος ανάλογα αν θέλουμε σαν αναφορά το ημίτονο ή το συνημίτονο.
- Επιπλέον, εφόσον το μέγεθος που μετράμε στα ημιτονοειδή ρεύματα είναι η ενεργός τιμή, αντί του πλάτους A στον παραπάνω μιγαδικό αριθμό, χρησιμοποιούμε την ενεργό τιμή A_{rms}.

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 4)

Οπότε, ο φάσορας ή παραστατικός μιγάδας ενός ημιτονοειδούς ρεύματος $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ ή τάσης $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta)$ είναι

$$\dot{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = I_{rms} \underline{/\theta} \quad \text{ή} \quad \dot{V} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = V_{rms} \underline{/\theta}$$

και από τον φάσορα ή παραστατικό μιγάδα πηγαίνουμε στο ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση

$$\dot{I} = I_{rms} \underline{/\theta} \Rightarrow i(t) = \Im m\{I_{rms} \underline{/\theta} \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}\} = I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το ημίτονο, ή

$$\dot{V} = V_{rms} \underline{/\theta} \Rightarrow v(t) = \Re e\{V_{rms} \underline{/\theta} \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}\} = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το συνημίτονο.

Άσκηση

Δυο κυματομορφές τάσης δίδονται από τις σχέσεις

$$v_1(t) = 12\sin(314t + 45^\circ)\ \mathrm{V} \qquad \text{και} \qquad v_2(t) = 6\sin(314t - 15^\circ)\ \mathrm{V}$$

Να βρείτε τη συχνότητα των τάσεων, τη διαφορά φάσης μεταξύ τους και να γράψετε τους φάσορες.

Η συχνότητα f σε Hz είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50\ \mathrm{Hz}$$

Η διαφορά φάσης είναι

$$45^\circ - (-15^\circ) = 60^\circ$$

δηλ. η $v_1(t)$ προηγείται της $v_2(t)$ κατά 60° ή η $v_2(t)$ έπεται της $v_1(t)$ κατά 60°. Οι φάσορες με βάση το ημίτονο είναι

$$\dot{V}_1 = \frac{12}{\sqrt{2}}\,\underline{/45^\circ} = 8.485\,\underline{/45^\circ}\ \mathrm{V} \qquad \text{και} \qquad \dot{V}_2 = \frac{6}{\sqrt{2}}\,\underline{/-15^\circ} = 4.243\,\underline{/-15^\circ}\ \mathrm{V}$$

Σύνθετη Αντίσταση

Οι αντικαταστάσεις κυματομορφών με φάσορες είναι στην ουσία μετασχηματισμοί Fourier. Και εφόσον στους μετασχηματισμούς Fourier

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \qquad \text{και} \qquad \int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$$

για το πηνίο

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \dot{V} = j\omega L \dot{I}$$

και για τον πυκνωτή

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt \rightarrow \dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

Σύνθετη Αντίσταση (συνέχεια 1)

Δηλαδή έχουμε τις σύνθετες αντιστάσεις (ή εμπεδήσεις)

για το πηνίο

$$Z_L = jX_L = j\omega L \quad \Omega$$

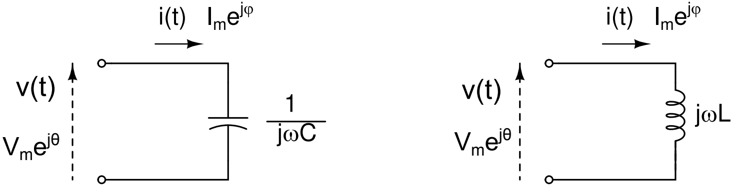
και για τον πυκνωτή

$$Z_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad \Omega$$

Φυσικά για την ωμική αντίσταση δεν αλλάζει τίποτα, $R \rightarrow R$ και η φάση της τάσης / ρεύματος που την διαρρέουν παραμένει ίδια με αυτήν του κλάδου που ευρίσκονται.

Προσοχή. Οι σύνθετες αντιστάσεις ΔΕΝ είναι φάσορες. Μπορούμε όμως να τις χρησιμοποιούμε σε κυκλώματα όπως ακριβώς και τις ωμικές αντιστάσεις αν αντικαταστήσουμε επίσης και όλες τις τάσεις/ρεύματα με τους αντίστοιχους φάσορες.

Σχέση Τάσης/Ρεύματος



Για τον πυκνωτή:

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \frac{V_m}{I_m}\, e^{j(\theta-\phi)} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\pi/2} \Rightarrow$$

$$\theta - \phi = -\pi/2 \Rightarrow \phi = \theta + \pi/2$$

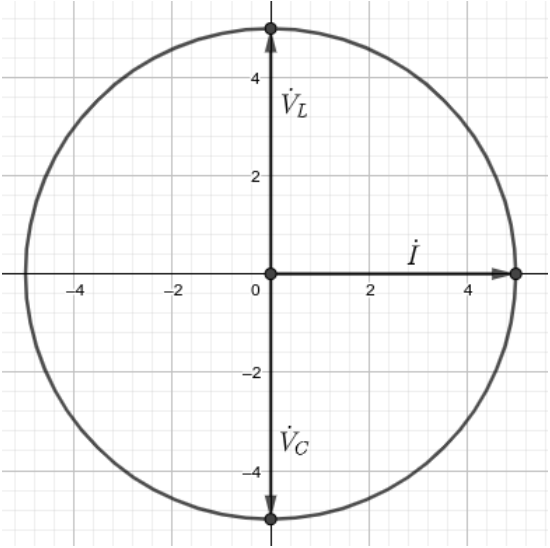
δηλ. το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90° ή η τάση καθυστερεί του ρεύματος κατά 90°.

Για το πηνίο:

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = j\omega L \Rightarrow \frac{V_m}{I_m}\, e^{j(\theta-\phi)} = \omega L\, e^{j\pi/2} \Rightarrow \theta - \phi = \pi/2 \Rightarrow \phi = \theta - \pi/2$$

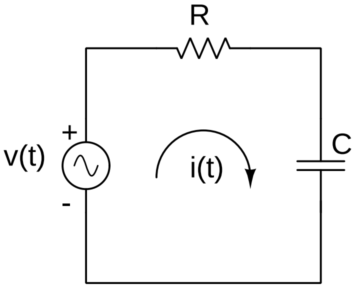
δηλ. το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά 90° ή η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90°.

Σχέση Τάσης/Ρεύματος (συνέχεια 1)



Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10\sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1\ \mathrm{k}\Omega$ και $C = 3\ \mu\mathrm{F}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 1)

$\omega = 628$ rad/s και $\dot{V} = (10/\sqrt{2})\ \underline{/15^\circ} = 7.071\ \underline{/15^\circ}$ V

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 1000 - \frac{j}{1884 \times 10^{-6}} = 1000 - j530.8 = 1132.14\ \underline{/-27.96^\circ}\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 4.571 + j4.256 = 6.246\ \underline{/42.96^\circ}\ \text{mA} \ \Rightarrow$$

$$i(t) = 6.246\sqrt{2}\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{mA} = 8.833\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = 4.571 + j4.256 = 6.246\ \underline{/42.96^\circ}\ \text{V} \ \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 6.246\sqrt{2}\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{V} = 8.833\sin(628t + 42.96^\circ)\ \text{V}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = 2.259 - j2.426 = 3.315\ \underline{/-47.04^\circ}\ \text{V} \ \Rightarrow$$

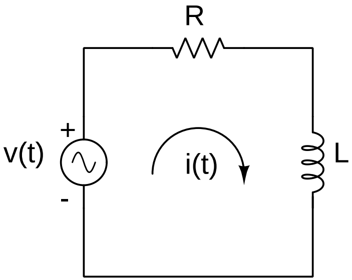
$$v_C(t) = 3.315\sqrt{2}\sin(628t - 47.04^\circ)\ \text{V} = 4.688\sin(628t - 47.04^\circ)\ \text{V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> w=628; R=1e3; C=3e-6; V0=10; Zc=-j/(w*C);
>> Z=R+Zc
Z =  1000.00 -  530.79i
>> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
   1132.137    -27.959
>> V=(V0/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V =  6.8301 + 1.8301i
>> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
    7.0711   15.0000
>> I=V/Z
I =  0.0045709 + 0.0042563i
>> [abs(I) angle(I)*180/pi]
ans =
    0.0062458   42.9587172
>> Vr=I*R
Vr =  4.5709 + 4.2563i
>> [abs(Vr) angle(Vr)*180/pi]
ans =
    6.2458   42.9587
>> Vc=I*Zc
Vc =  2.2592 - 2.4262i
>> [abs(Vc) angle(Vc)*180/pi]
ans =
    3.3152  -47.0413
```

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10\sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1\ \mathrm{k}\Omega$ και $L = 150\ \mathrm{mH}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> w=628; R=1e3; L=150e-3; V0=10; ZL=j*w*L;
>> Z=R+ZL
Z =  1000.000 +   94.200i
>> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
   1004.4270      5.3814
>> V=(V0/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V =  6.8301 + 1.8301i
>> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
    7.0711   15.0000
>> I=V/Z
I =  0.0069409 + 0.0011763i
>> [abs(I) angle(I)*180/pi]
ans =
   0.0070399   9.6186176
>> Vr=I*R
Vr =  6.9409 + 1.1763i
>> [abs(Vr) angle(Vr)*180/pi]
ans =
   7.0399   9.6186
>> VL=I*ZL
VL = -0.11081 + 0.65384i
>> [abs(VL) angle(VL)*180/pi]
ans =
    0.66316   99.61862
```

$$\dot{V} = (10/\sqrt{2}) \underline{/15^\circ} = 7.071 \underline{/15^\circ} \text{ V}$$

$$Z = R + j\omega L = 1004.43 \underline{/5.38^\circ} \ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 7.04 \underline{/9.62^\circ} \text{ mA} \ \Rightarrow$$

$$i(t) = 9.956 \sin(628t + 9.62^\circ) \text{ mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} R = 7.04 \underline{/9.62^\circ} \text{ V} \ \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 9.956 \sin(628t + 9.62^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot Z_L = 0.663 \underline{/99.6^\circ} \text{ V} \ \Rightarrow$$

$$v_L(t) = 0.938 \sin(628t + 99.6^\circ) \text{ V}$$