

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

## Διάλεξη 04

Α. Δροσόπουλος

01-11-2021

- 1 Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση
- 2 Ασκήσεις
- 3 Κυκλώματα
- 4 Ασκήσεις

1 Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

2 Ασκήσεις

3 Κυκλώματα

4 Ασκήσεις

- Εντοπίζετε κόμβους και κλάδους.
- Κάνετε δυνατές απλοποιήσεις.
- Σχεδιάζετε ρεύματα κλάδων.
- Εφαρμόζετε κανόνα ρευμάτων Kirchhoff σε όλους τους κόμβους.
- Εφαρμόζετε κανόνα τάσεων Kirchhoff στους ελάχιστους βρόχους (οφθαλμούς).
- Λύνετε το γραμμικό σύστημα ανεξαρτήτων εξισώσεων.
- Από τα ρεύματα κλάδων μπορείτε να υπολογίσετε τα υπόλοιπα.

# Ανάλυση Kirchhoff με τάσεις κόμβων

- Εντοπίζετε κόμβους και κλάδους.
- Κάνετε όποιες απλοποιήσεις μπορείτε χωρίς να σκεπάσετε τα στοιχεία ή τους κόμβους που χρειάζεστε για τη λύση.
- Επιλέξτε ένα κόμβο σαν κόμβο αναφοράς (γείωση).
- Για όλους τους άλλους κόμβους εφαρμόσετε κανόνα ρευμάτων Kirchhoff θεωρώντας ότι τα ρεύματα που εξέρχονται έχουν θετικό πρόσημο και τα ρεύματα που εισέρχονται αρνητικό.
- Δεν σχεδιάζετε ρεύματα. Τα εκφράζετε συναρτήσει της τάσης του κάθε κόμβου.
- Καταλήγεται σε σύστημα μικρότερης τάξης από τη μέθοδο κλαδικών ρευμάτων το οποίο λύνετε με όποιον τρόπο θέλετε για τις κομβικές τάσεις.
- Από τις τάσεις μπορείτε να υπολογίσετε όλα τα κλαδικά ρεύματα καθώς και την ισχύ που καταναλώνει ή παράγει το κάθε στοιχείο.

$$b = l + n - 1$$

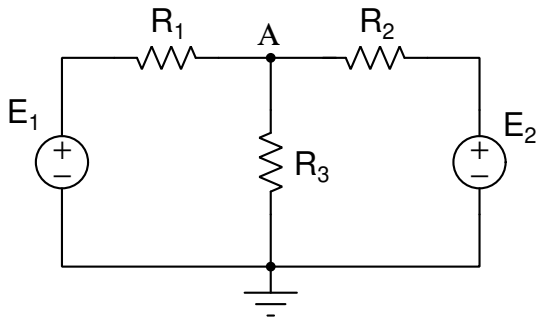
όπου:

$b$ : (branch) κλάδος

$l$ : (loop) ανεξάρτητος βρόχος

$n$ : (node) κόμβος

# Παράδειγμα



$$\frac{V_A - E_1}{R_1} + \frac{V_A - E_2}{R_2} + \frac{V_A}{R_3} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Νούμερα:  $E_1 = 12\text{V}$ ,  $E_2 = 9\text{V}$ ,  $R_1 = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 4\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 3\text{k}\Omega$

$$V_A = 7.6154 \text{ V}$$

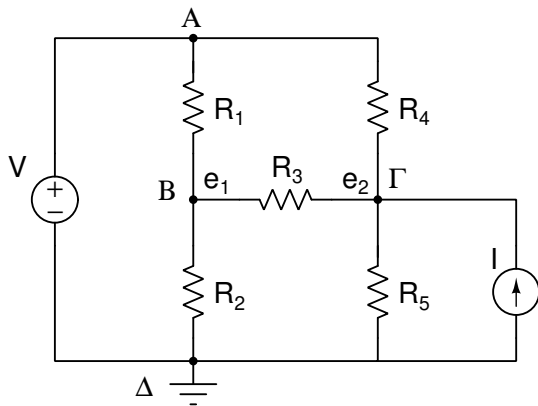
$$I_1 = 2.19231 \text{ mA}$$

$$I_2 = 0.34615 \text{ mA}$$

$$I_3 = 2.53846 \text{ mA}$$



## Παράδειγμα 2



## Παράδειγμα 2 συν 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{e_1 - V}{R_1} + \frac{e_1 - e_2}{R_3} + \frac{e_1}{R_2} &= 0 \\ \frac{e_2 - e_1}{R_3} + \frac{e_2 - V}{R_4} + \frac{e_2}{R_5} - I &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - e_2 \frac{1}{R_3} &= \frac{V}{R_1} \\ -e_1 \frac{1}{R_3} + e_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= I + \frac{V}{R_4} \end{aligned} \right\}$$

## Παράδειγμα 2 συν 3

Με αριθμούς

$$V = 20 \text{ V}, I_1 = 3 \text{ mA}, R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 1.5 \text{ k}\Omega$$
$$R_3 = 0.5 \text{ k}\Omega, R_4 = 1 \text{ k}\Omega, R_5 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{0.5} \right) - e_2 \frac{1}{0.5} &= \frac{20}{2} \\ -e_1 \frac{1}{0.5} + e_2 \left( \frac{1}{0.5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) &= 3 + \frac{20}{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$e_1 = 12.10 \text{ V} \quad e_2 = 14.16 \text{ V}$$

1 Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

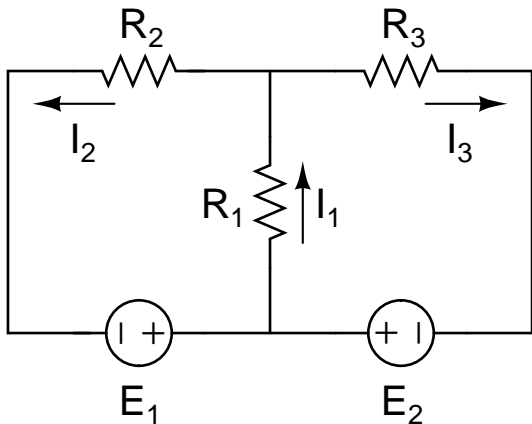
**2 Ασκήσεις**

3 Κυκλώματα

4 Ασκήσεις

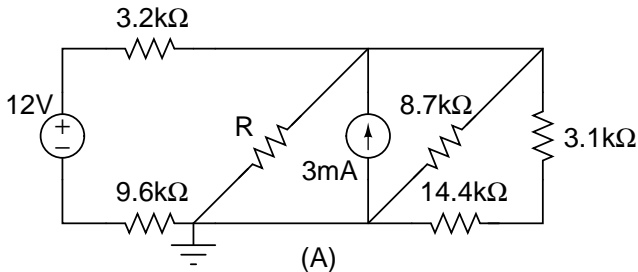
# Άσκηση

Να γίνει πλήρη ανάλυση στο παρακάτω κύκλωμα όταν  $E_1 = 9\text{ V}$ ,  $E_2 = 18\text{ V}$ ,  
 $R_1 = 500\ \Omega$ ,  $R_2 = 300\ \Omega$ ,  $R_3 = 1.2\text{ k}\Omega$ .



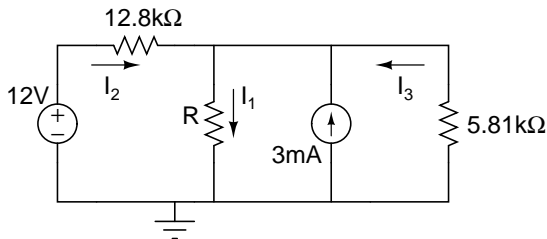
# Άσκηση

Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης  $R$  στο κύκλωμα (A) έτσι ώστε η τάση στα άκρα της να είναι 9 V.



## Άσκηση 2

Απλοποιώντας εν σειρά και παράλληλες αντιστάσεις έχουμε



όπου με κανόνες Kirchhoff

$$I_2 - I_1 + 3 + I_3 = 0$$

$$12.8I_2 + 9 - 12 = 0 \Rightarrow I_2 = 0.234 \text{ mA}$$

$$5.81I_3 + 9 = 0 \Rightarrow I_3 = -1.55 \text{ mA}$$

$$I_1 = 3 + I_2 + I_3 = 1.685 \text{ mA} \Rightarrow R = \frac{9}{1.685} = 5.34 \text{ k}\Omega$$

# Άσκηση 3

Με κομβική ανάλυση

$$\frac{V-12}{12.8} + \frac{V}{R} - 3 + \frac{V}{5.81} = 0$$

$$\frac{V}{R} = 3 - \frac{V-12}{12.8} - \frac{V}{5.81}$$

$$R = \frac{V}{3 - \frac{V-12}{12.8} - \frac{V}{5.81}}$$

```
octave:1> V=9
```

```
V = 9
```

```
octave:2> 3-(V-12)/12.8-V/5.81
```

```
ans = 1.6853
```

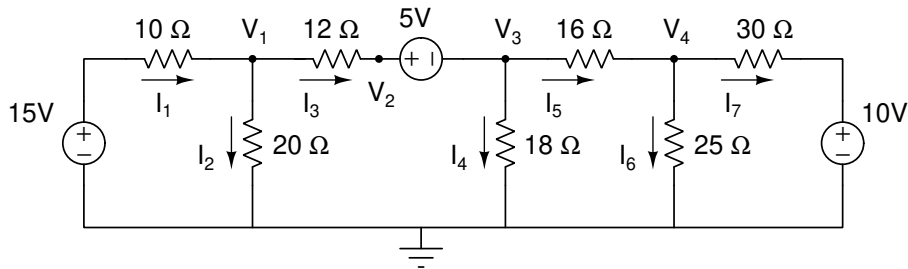
```
octave:3> V/ans
```

```
ans = 5.3402
```



# Άσκηση

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα καθώς και οι τάσεις  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$ .



$$\frac{V_1 - 15}{10} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{12} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{12} + \frac{V_3}{18} + \frac{V_3 - V_4}{16} = 0$$

$$\frac{V_4 - V_3}{16} + \frac{V_4}{25} + \frac{V_4 - 10}{30} = 0$$

$$V_2 - V_3 = 5$$

## Άσκηση 3

$$V_1 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \right) - \frac{V_2}{12} = \frac{15}{10}$$

$$-\frac{V_1}{12} + \frac{V_2}{12} + V_3 \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{16} \right) - \frac{V_4}{16} = 0$$

$$-\frac{V_3}{16} + V_4 \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} \right) = \frac{10}{30}$$

$$V_2 - V_3 = 5$$

# Άσκηση 4

$$V_1 = 9.267 \text{ V}$$

$$V_2 = 7.948 \text{ V}$$

$$V_3 = 2.948 \text{ V}$$

$$V_4 = 3.811 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{15 - V_1}{10} = 0.573\text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{20} = 0.463\text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{12} = 0.110\text{A}$$

$$I_4 = \frac{V_3}{18} = 0.164\text{A}$$

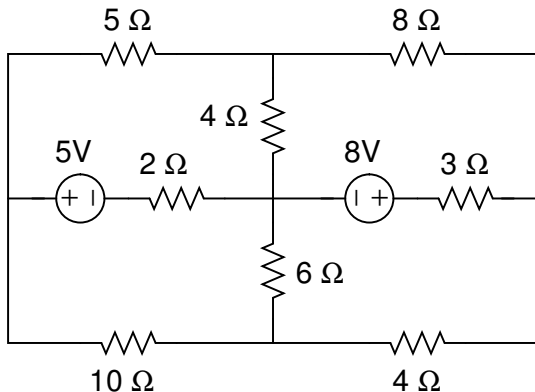
$$I_5 = \frac{V_3 - V_4}{16} = -0.0539\text{A}$$

$$I_6 = \frac{V_4}{25} = 0.152\text{A}$$

$$I_7 = \frac{V_4 - 10}{30} = -0.206\text{A}$$

# Άσκηση

Να γίνει πλήρη ανάλυση στο παρακάτω κύκλωμα.



- Κατάστρωση εξισώσεων Kirchhoff με κλαδικά ρεύματα και τάσεις κόμβων.
- Δοκιμάστε να λύσετε τα συστήματα που προκύπτουν.
- Επιβεβαίωση με octave και LTspice.



## Άσκηση 3

$$\frac{V_A - 5}{2} + \frac{V_A - V_B}{5} + \frac{V_A - V_D}{10} = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{5} + \frac{V_B}{4} + \frac{V_B - V_C}{8} = 0$$

$$\frac{V_C - V_B}{8} + \frac{V_C - 8}{3} + \frac{V_C - V_D}{4} = 0$$

$$\frac{V_D}{6} + \frac{V_D - V_A}{10} + \frac{V_D - V_C}{4} = 0$$



## Άσκηση 4

$$V_A \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) - V_B \frac{1}{5} - V_D \frac{1}{10} = \frac{5}{2}$$

$$-V_A \frac{1}{5} + V_B \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) - V_C \frac{1}{8} = 0$$

$$-V_B \frac{1}{8} + V_C \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - V_D \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$$

$$-V_A \frac{1}{10} - V_C \frac{1}{4} + V_D \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

## Άσκηση 5

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ -0.2V_A + 0.575V_B - 0.125V_C + 0V_D &= 0 \\ 0V_A - 0.125V_B + 0.708V_C - 0.25V_D &= 2.67 \\ -0.1V_A + 0V_B - 0.25V_C + 0.517V_D &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0.125V_B + 0.708V_C - 0.25V_D &= 2.67 \\ 0V_A - 0.025V_B - 0.25V_C + 0.504V_D &= 0.312 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

# Άσκηση 6

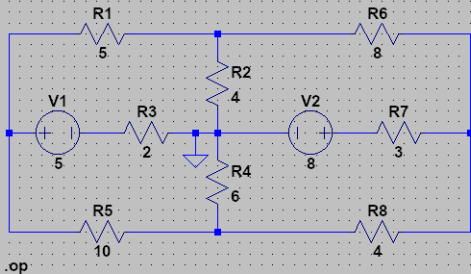
$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0V_B + 0.638V_C - 0.256V_D &= 2.81 \\ 0V_A - 0V_B - 0.256V_C + 0.503V_D &= 0.342 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 0.8V_A - 0.2V_B + 0V_C - 0.1V_D &= 2.5 \\ 0V_A + 0.525V_B - 0.125V_C - 0.025V_D &= 0.625 \\ 0V_A - 0V_B + 0.638V_C - 0.256V_D &= 2.81 \\ 0V_A - 0V_B - 0V_C + 0.406V_D &= 1.40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

# Άσκηση 7

	με 3 σημ [Volt]	ακρίβεια [Volt]
$V_D$	3.45	3.45504
$V_C$	5.79	5.45234
$V_B$	2.73	2.65318
$V_A$	4.24	4.22017

# Άσκηση 8



```
* Z:\home\drososaij\l\text1\ask\Draft1.asc
--- Operating Point ---
V{n001} :      4.22017      voltage
V{n004} :     -0.779826    voltage
V{n005} :      8          voltage
V{n002} :     2.65318     voltage
V{n006} :     3.45504     voltage
V{n003} :     5.45234     voltage
I{R8} :      0.499326     device_current
I{R7} :     -0.849221     device_current
I{R6} :      0.349895     device_current
I{R5} :     -0.0765138    device_current
I{R4} :     -0.575839     device_current
I{R3} :      0.389913     device_current
I{R2} :      0.663294     device_current
I{R1} :     -0.313399     device_current
I{V2} :     -0.849221     device_current
I{V1} :     -0.389913     device_current
```

# Άσκηση 9

$$A = \begin{bmatrix} 1/2+1/5+1/10 & -1/5 & 0 & -1/10; & -1/5 & 1/5+1/4+1/8 & -1/8 & 0; \\ 0 & -1/8 & 1/8+1/3+1/4 & -1/4; & -1/10 & 0 & -1/4 & 1/6+1/10+1/4 \end{bmatrix}$$

$$b = [5/2; 0; 8/3; 0]$$

$$V = \text{inv}(A)*b$$

A =

```
0.80000  -0.20000  0.00000  -0.10000
-0.20000  0.57500  -0.12500  0.00000
0.00000  -0.12500  0.70833  -0.25000
-0.10000  0.00000  -0.25000  0.51667
```

b =

```
2.50000
0.00000
2.66667
0.00000
```

V =

```
4.22017
2.65318
5.45234
3.45504
```

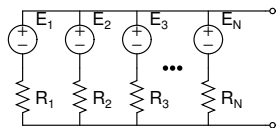
1 Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

2 Ασκήσεις

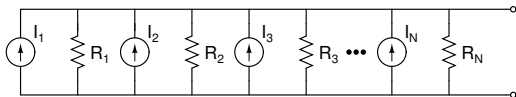
**3 Κυκλώματα**

4 Ασκήσεις

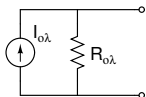
# Θεώρημα Millman



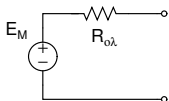
(a)



(b)



(c)



(d)

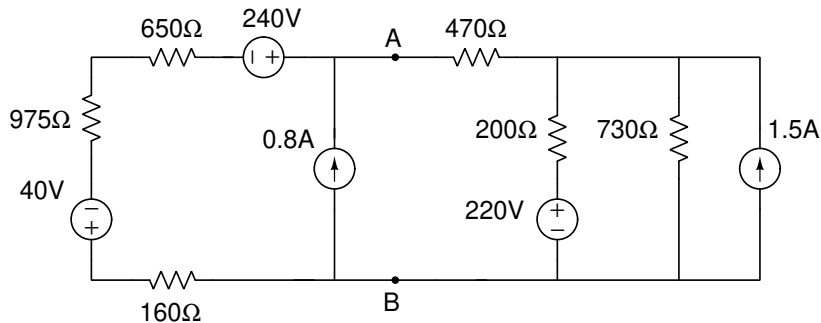
$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

$$E_M = (I_1 + I_2 + \dots + I_N) R_{o\lambda} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_N}{R_N}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}$$

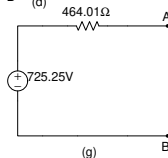
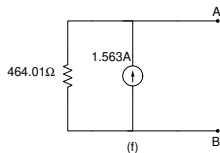
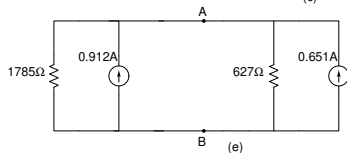
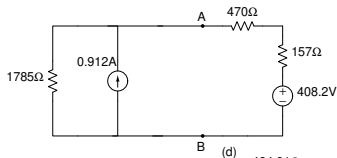
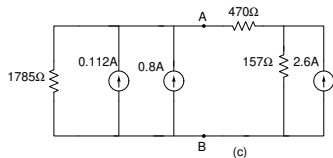
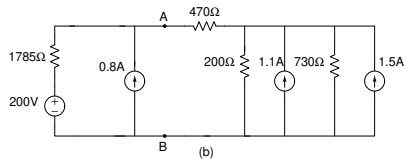
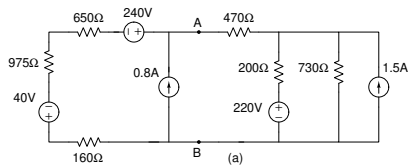


# Παράδειγμα

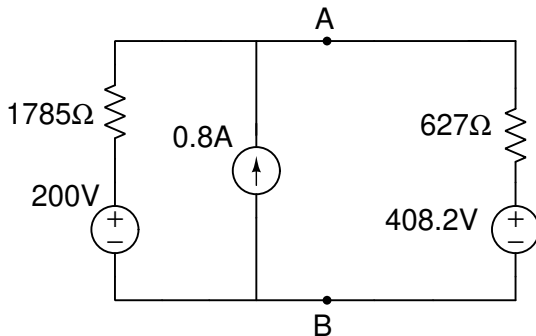
Να βρεθεί η τάση  $V_{AB}$  στο παρακάτω κύκλωμα.



# Παράδειγμα 2



## Παράδειγμα 3

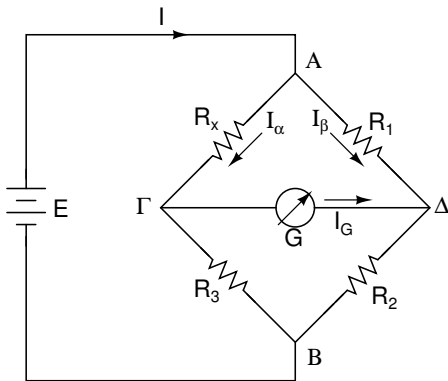


Με κομβική ανάλυση:

$$\frac{V_{AB} - 200}{1785} - 0.8 + \frac{V_{AB} - 408.2}{627} = 0 \Rightarrow V_{AB} = 725.3 \text{ V}$$

# Γέφυρα Wheatstone

Η γέφυρα Wheatstone είναι ένα κύκλωμα που εφαρμόζεται πολύ σε ηλεκτρικές μετρήσεις. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι αποτελείται από 4 ωμικές αντιστάσεις εκ των οποίων η μία είναι άγνωστη και οι άλλες τρεις γνωστές.



## Γέφυρα Wheatstone 2

Το γαλβανόμετρο που συνδέει τα  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι ένα πολύ ευαίσθητο όργανο που δείχνει την παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος. Λέμε ότι η γέφυρα βρίσκεται σε ισορροπία όταν το ρεύμα που περνάει από το γαλβανόμετρο είναι  $I_G = 0$ . Έχουμε τότε  $I = I_\alpha + I_\beta$  όπου  $I_\alpha$  είναι το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΓΒ και  $I_\beta$  το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΔΒ. Εφόσον  $I_G = 0$  τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  έχουν το ίδιο δυναμικό. Προσοχή εδώ. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι μηδέν. Τα δυναμικά στα  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι ίδια αλλά όχι απαραίτητα μηδέν. Επομένως,

$$V_{\text{ΑΓ}} = V_{\text{ΑΔ}} \Rightarrow I_\alpha R_x = I_\beta R_1$$

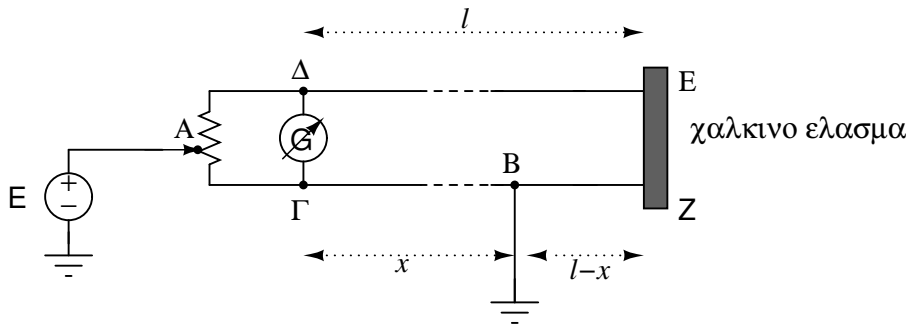
$$V_{\text{ΓΒ}} = V_{\text{ΔΒ}} \Rightarrow I_\alpha R_3 = I_\beta R_2$$

Διαιρώντας κατά μέλη βγαίνει η συνθήκη ισορροπίας την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την άγνωστη αντίσταση από τις γνωστές.

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}$$

# Εντοπισμός θέσης σφάλματος

Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια γραμμή μεταφοράς μήκους  $l$  που αποτελείται από δύο ηλεκτρικές γραμμές (π.χ. υπόγειο καλώδιο). Έστω ότι υπάρχει διαρροή στο σημείο B που απέχει άγνωστη απόσταση  $x$  από το Γ. Η αρχή της γραμμής είναι τα σημεία Γ και Δ και το τέρμα της γραμμής τα σημεία E και Z. Βραχυκυκλώνουμε το τέρμα E, Z με ένα μικρό χάλκινο έλασμα αμελητέας αντίστασης.



## Εντοπισμός θέσης σφάλματος 2

Στην αρχή  $\Gamma$ ,  $\Delta$  συνδέουμε το γαλβανόμετρο  $G$ , μια μεταβλητή αντίσταση και την πηγή με τάση  $E$ . Ο συμβολισμός είναι ίδιος με το διάγραμμα που ορίστηκε η γέφυρα Wheatstone. Η συνθήκη ισορροπίας μας δίνει

$$\frac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}} = \frac{R_{\Delta EZB}}{R_{\Gamma B}} = \frac{l + (l - x)}{x} = \frac{2l - x}{x} \Rightarrow x = \frac{2l}{1 + \frac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}}}$$

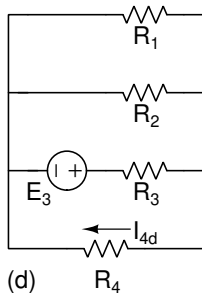
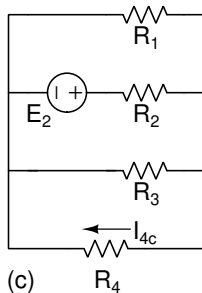
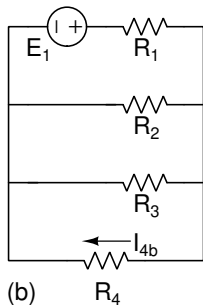
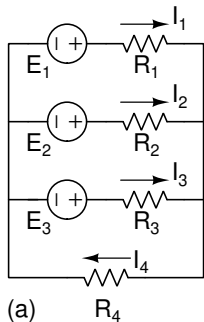
όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση  $R = \rho l/S$  για τις αντιστάσεις και το γεγονός ότι το υλικό και η διατομή των αγωγών είναι ίδια ( $\rho$  και  $S$  ίδια).

- Ένα άλλο σημαντικό και χρήσιμο θεώρημα είναι το θεώρημα επαλληλίας ή αλλιώς η αρχή της υπερθέσεως. Σε ένα γραμμικό κύκλωμα που έχει περισσότερες από μία πηγές μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκρισή του (τάση και ρεύμα σε κάθε στοιχείο) για κάθε πηγή ξεχωριστά, «σβήνοντας» τις υπόλοιπες. Η συνολική απόκριση είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Με το θεώρημα αυτό μπορούμε πολλές φορές να απλοποιήσουμε σύνθετα κυκλώματα σε πιο απλά.
- Πηγή τάσης την «σβήνουμε» βραχυκυκλώνοντάς την.
- Πηγή ρεύματος την «σβήνουμε» ανοίγοντάς την.



# Παράδειγμα

Να βρεθεί το ρεύμα  $I_4$  στο κύκλωμα (a) με τη μέθοδο υπέρθεσης όταν  $E_1 = 18\text{ V}$ ,  $E_2 = 9\text{ V}$ ,  $E_3 = 20\text{ V}$ ,  $R_1 = 1.2\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 800\ \Omega$ ,  $R_3 = 1.4\text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 600\ \Omega$ .



## Παράδειγμα 2

Με τη μέθοδο επαλληλίας έχουμε τα κυκλώματα (b),(c),(d). Ένας απλός τρόπος είναι να κάνουμε την κάθε πηγή τάσης πηγή ρεύματος, παράλληλες τις  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  και έναν διαιρέτη ρεύματος για το κάθε ρεύμα  $I_{4b}$ ,  $I_{4c}$ ,  $I_{4d}$ .

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R = 357.45 \Omega$$

$$I_{4b} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_1}{R_1} = 5.6 \text{ mA}$$

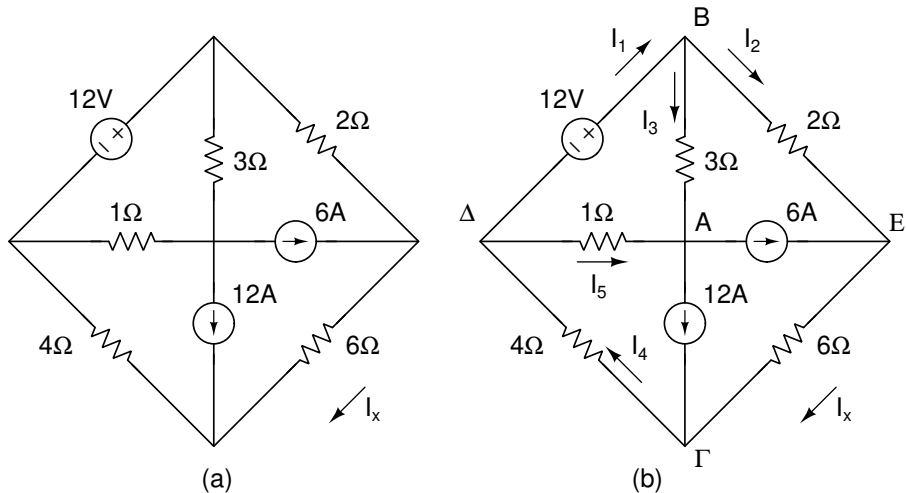
$$I_{4c} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_2}{R_2} = 4.2 \text{ mA} \quad I_{4d} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_3}{R_3} = 5.33 \text{ mA}$$

$$I_4 = I_{4b} + I_{4c} + I_{4d} = 15.1 \text{ mA}$$

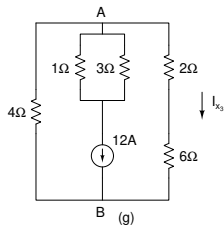
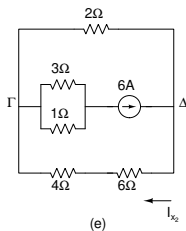
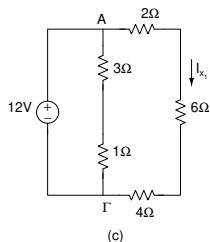
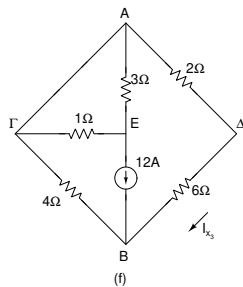
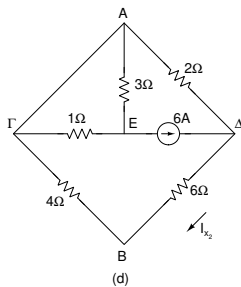
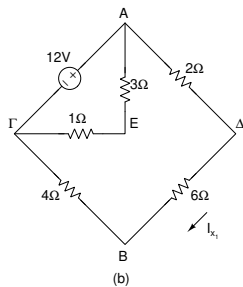
Στο βιβλίο βλέπετε και εναλλακτικούς τρόπους και μπορείτε και εσείς να σκεφτείτε και άλλους.

# Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ρεύμα και η καταναλισκόμενη ισχύς στην αντίσταση  $6\ \Omega$  στο κύκλωμα (a).



# Παράδειγμα 2



## Παράδειγμα 3

Όταν μόνο η πηγή τάσης είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (b) και το ισοδύναμό του (c). Η τάση  $V_{AG}$  στα άκρα του κλάδου που περιέχει την αντίσταση  $6 \Omega$  είναι  $12 \text{ V}$ . Οπότε,

$$I_{x_1} = \frac{12}{2 + 6 + 4} = 1 \text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος  $6 \text{ A}$  είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (d) και το ισοδύναμό του (e). Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_2} = \frac{2}{2 + 10} 6 = 1 \text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος  $12 \text{ A}$  είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (f) και το ισοδύναμό του (g). Και πάλι με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_3} = -\frac{4}{4 + 8} 12 = -4 \text{ A}$$

Τελικά,  $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} = 1 + 1 - 4 = -2 \text{ A}$  και  $P = I_x^2 \cdot 6 = 24 \text{ W}$ .

1 Κανόνες Kirchhoff - Κομβική ανάλυση

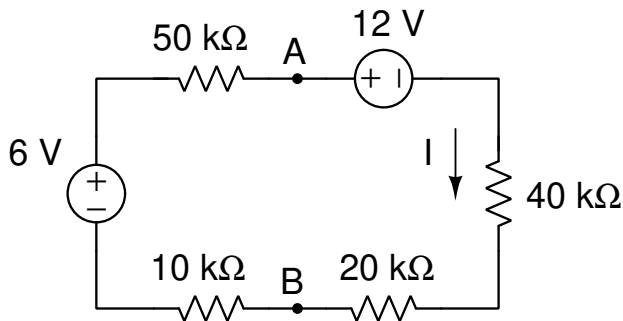
2 Ασκήσεις

3 Κυκλώματα

**4 Ασκήσεις**

# Άσκηση 1

Να βρεθεί η  $V_{AB}$  και το  $I$  στο κύκλωμα.



## Κανόνας Τάσεων Kirchhoff

$$50I + 12 + 40I + 20I + 10I - 6 = 0 \Rightarrow I = -0.05 \text{ mA}$$

$$V_{AB} = 12 + 60I = 9 \text{ V}$$

$$V_{AB} = -50I + 6 - 10I = 9 \text{ V}$$

```
octave:1> I = (-12+6)/(50+40+20+10)
```

```
I = -0.050000
```

```
octave:2> Vab = 12+60*I
```

```
Vab = 9
```

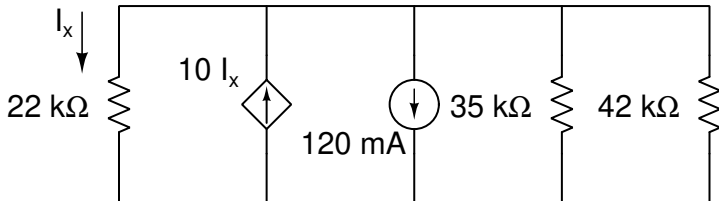
```
octave:3> Vab = -60*I+6
```

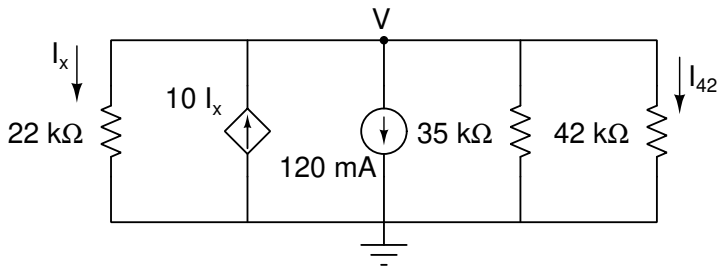
```
Vab = 9
```



## Άσκηση 2

Να βρεθεί η τάση στα άκρα και το ρεύμα που διαρρέει την  $42\text{ k}\Omega$ .





Κομβική ανάλυση

$$\frac{V}{22} - 10I_x + 120 + \frac{V}{35} + \frac{V}{42} = 0$$

$$\frac{V}{22} = I_x$$

$$\frac{V}{22} - 10\frac{V}{22} + 120 + \frac{V}{35} + \frac{V}{42} = 0 \Rightarrow V \left( \frac{1}{22} - \frac{10}{22} + \frac{1}{35} + \frac{1}{42} \right) = -120 \Rightarrow$$

$$V = 336.41 \text{ V} \quad \text{και} \quad I_{42} = \frac{V}{42} = 8 \text{ mA}$$

octave:4> V = -120/(1/22-10/22+1/35+1/42)

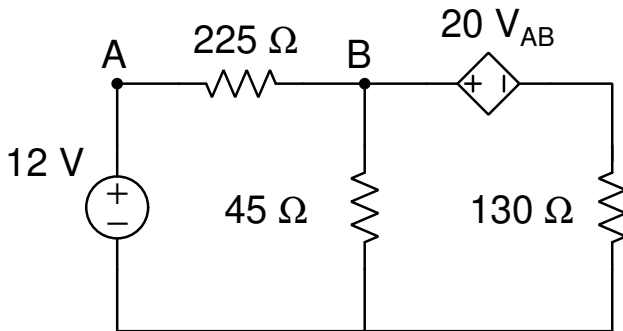
V = 336.41

octave:5> I42 = V/42

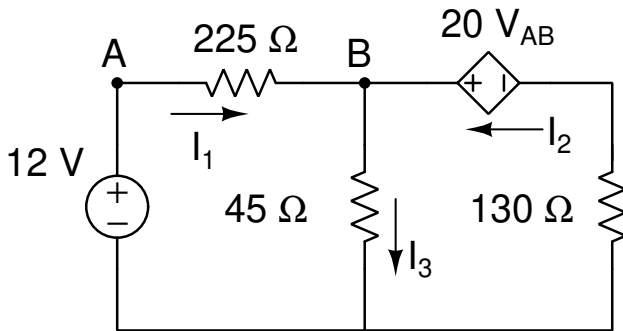
I42 = 8.0097

## Άσκηση 3

Να βρεθεί η  $V_{AB}$  και το ρεύμα που κυκλοφορεί στην  $130 \Omega$ .



Κλαδικά ρεύματα



Κανόνες Kirchhoff - κλαδικά ρεύματα

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 225I_1 + 45I_3 &= 12 \\ 20V_{AB} - 130I_2 - 45I_3 &= 0 \\ V_{AB} &= 225I_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 225I_1 + 45I_3 &= 12 \\ 4500I_1 - 130I_2 - 45I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

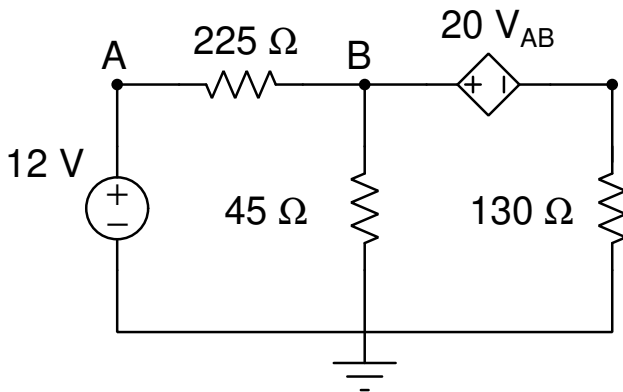
$$I_1 = 0.0085\text{A} \quad I_2 = 0.2158\text{A} \quad I_3 = 0.2243\text{A}$$

Το ρεύμα που κυκλοφορεί στην  $130\ \Omega$  είναι  $I_2 = 0.2158\text{A}$ .

Τάση  $V_{AB} = 225I_1 = 1.91\text{V}$ .

```
octave:6> 225*20
ans = 4500
octave:11> A=[1 1 -1; 225 0 45; 4500 -130 -45]
A =
    1    1   -1
   225    0   45
 4500 -130 -45
octave:12> b=[0; 12; 0]
b =
    0
   12
    0
octave:13> I=inv(A)*b
I =
 0.0084771
 0.2158038
 0.2242810
octave:14> 225*I(1)
ans = 1.9074
```

## Κομβική ανάλυση





Κανόνες Kirchhoff - κομβική ανάλυση

$$\frac{V_B - 12}{225} + \frac{V_B}{45} + \frac{(-20V_{AB} + V_B)}{130} = 0$$

$$V_{AB} = -V_{BA} = -(V_B - 12)$$

$$\frac{V_B - 12}{225} + \frac{V_B}{45} + \frac{20(V_B - 12) + V_B}{130} = 0 \Rightarrow$$

$$V_B \left( \frac{1}{225} + \frac{1}{45} + \frac{21}{130} \right) = \frac{12}{225} + \frac{240}{130} \Rightarrow$$

$$V_B = 10.093 \text{ V} \quad V_{AB} = 1.91 \text{ V} \quad I_{130} = \frac{-20V_{AB} + V_B}{130} = -0.2158 \text{ A}$$

octave:17> Vb=(12/225+240/130)/(1/225+1/45+21/130)

Vb = 10.093

octave:19> Vab=12-Vb

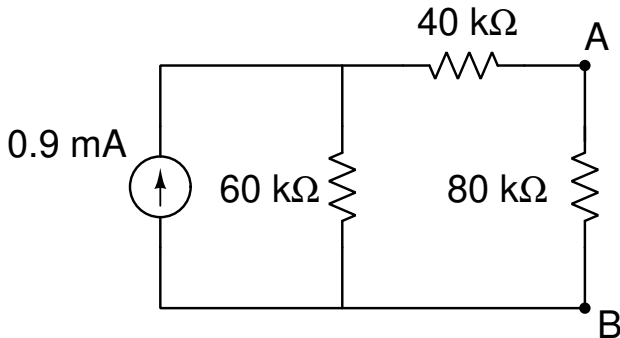
Vab = 1.9074

octave:20> I=(-20\*Vab+Vb)/130

I = -0.21580

# Άσκηση 4

Να βρεθεί η  $V_{AB}$ .



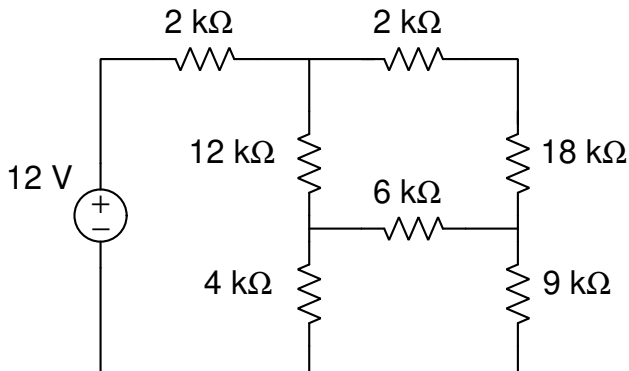
Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{AB} = \frac{60}{80 + 40 + 60} 0.9 = 0.3 \text{ mA}$$

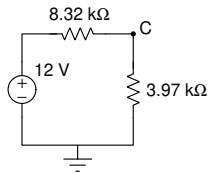
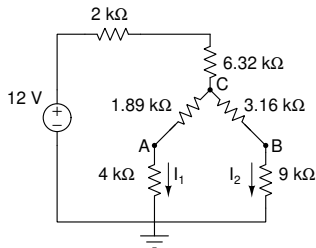
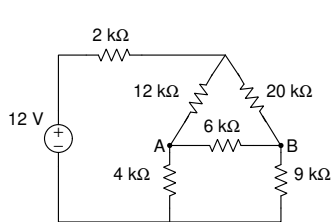
$$V_{AB} = 80I_{AB} = 24 \text{ V}$$

# Άσκηση 5

Να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην  $6\text{ k}\Omega$ .



## 5b



$$r_1 = \frac{12 \cdot 20}{12 + 20 + 6} = 6.32 \text{ k}\Omega \quad r_2 = \frac{12 \cdot 6}{12 + 20 + 6} = 1.89 \text{ k}\Omega \quad r_3 = \frac{6 \cdot 20}{12 + 20 + 6} = 3.16 \text{ k}\Omega$$

$$r_4 = (1.89 + 4) \parallel (3.16 + 9) = 3.97 \text{ k}\Omega$$

$$V_C = \frac{3.97}{3.97 + 8.32} 12 = 3.89 \text{ V} \quad I_1 = \frac{V_C}{1.89 + 4} = 0.658 \text{ mA} \quad I_2 = \frac{V_C}{3.16 + 9} = 0.319 \text{ mA}$$

$$V_A = 2.6312 \text{ V} \quad V_B = 2.8704 \text{ V} \quad V_{AB} = -0.2392 \text{ V}$$

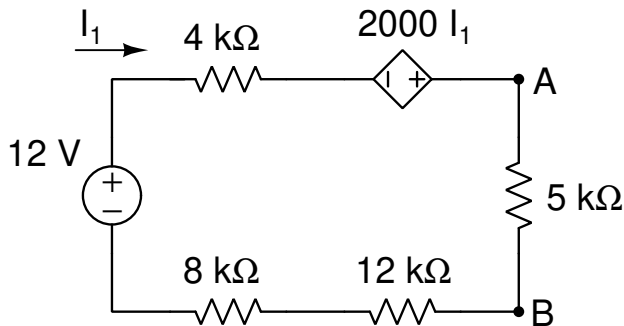
$$P = V_{AB}^2 / 6 = 0.009536 \text{ mW} = 9.536 \text{ }\mu\text{W}$$

```
octave:23> r1=12*20/(12+20+6)
r1 = 6.3158
octave:24> r2=12*6/(12+20+6)
r2 = 1.8947
octave:25> r3=6*20/(12+20+6)
r3 = 3.1579
octave:26> 2+r1
ans = 8.3158
octave:27> r4=r2+4
r4 = 5.8947
octave:28> r5=r3+9
r5 = 12.158
octave:29> r6=r4*r5/(r4+r5)
r6 = 3.9699
```

```
octave:30> Vc=r6*12/(r6+2+r1)
Vc = 3.8776
octave:31> I1=Vc/(r2+4)
I1 = 0.65781
octave:32> I2=Vc/(r3+9)
I2 = 0.31894
octave:34> Va=4*I1
Va = 2.6312
octave:35> Vb=9*I2
Vb = 2.8704
octave:36> Vab=Va-Vb
Vab = -0.23920
octave:37> P=Vab^2/6
P = 0.0095363
```

## Άσκηση 6

Να βρεθεί η  $V_{AB}$  όπου η παράμετρος 2000 έχει μονάδες  $\Omega$ .





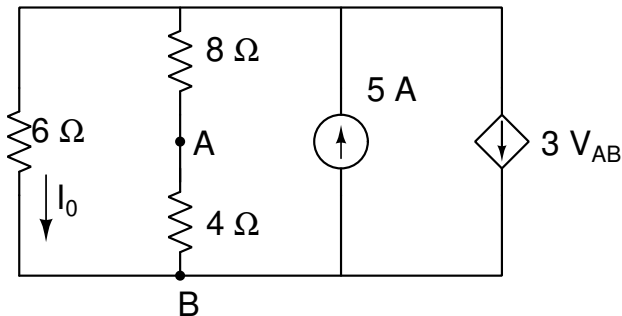
Κανόνας τάσης Kirchhoff

$$I_1(4 + 5 + 12 + 8) - 2I_1 = 12 \Rightarrow I_1 = 0.444 \text{ mA}$$

$$V_{AB} = 5I_1 = 2.22 \text{ V}$$

# Άσκηση 7

Να βρεθεί η  $V_{AB}$  και το  $I_0$  στο κύκλωμα.



Κομβική ανάλυση με  $V$  την τάση του επάνω κόμβου ως προς Β, τον κόμβο αναφοράς.

$$\frac{V}{6} + \frac{V}{12} - 5 + 3V_{AB} = 0$$

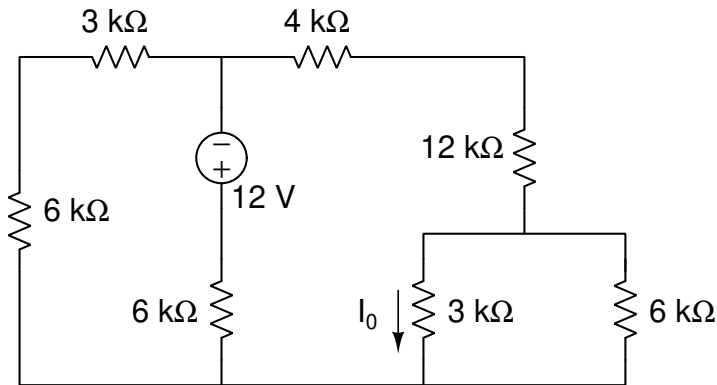
$$V_{AB} = \frac{4}{12} V$$

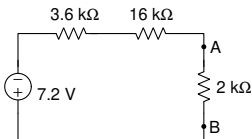
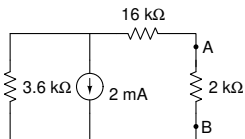
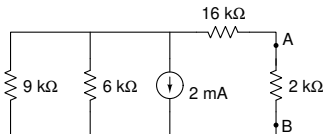
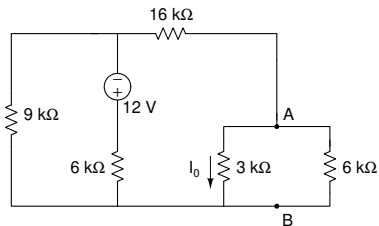
$$V \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 3 \frac{4}{12} \right) = 5$$

$$V = 4 \text{ V} \quad \text{και} \quad V_{AB} = 16/12 = 1.33 \text{ V} \quad \text{και} \quad I_0 = \frac{V}{6} = 0.667 \text{ A}$$

# Άσκηση 8

Να βρεθεί το  $I_0$ .



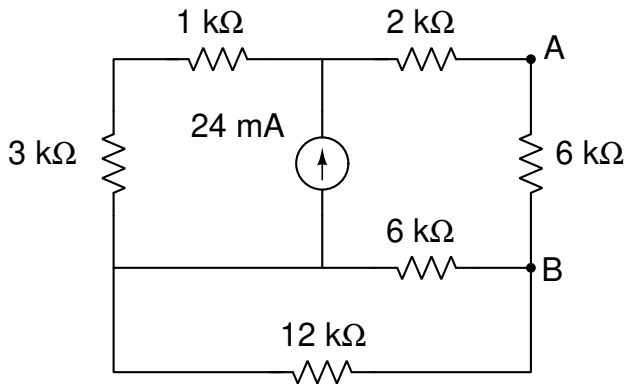


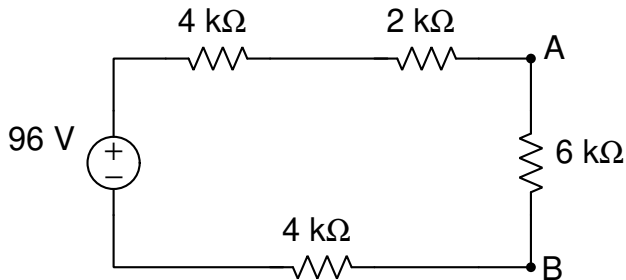
$$V_{BA} = \frac{2}{2 + 16 + 3.6} 7.2 = 0.667 \text{ V}$$

$$I_0 = \frac{V_{AB}}{3} = -0.222 \text{ mA}$$

# Άσκηση 9

Να βρεθεί η  $V_{AB}$ .

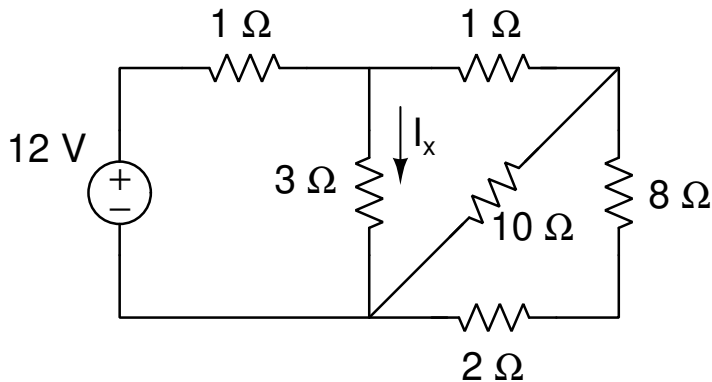




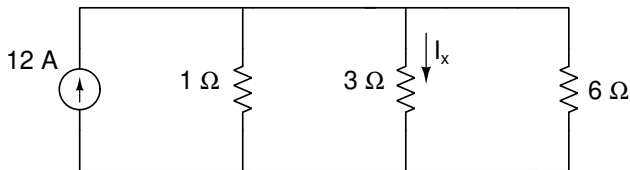
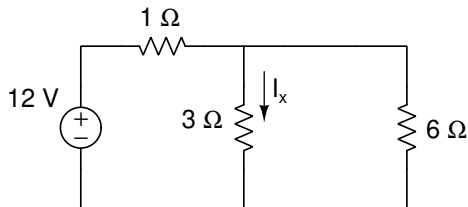
$$V_{AB} = \frac{6}{6 + 2 + 4 + 4} 96 = 36 \text{ V}$$

# Άσκηση 10

Να βρεθεί το  $I_x$ .





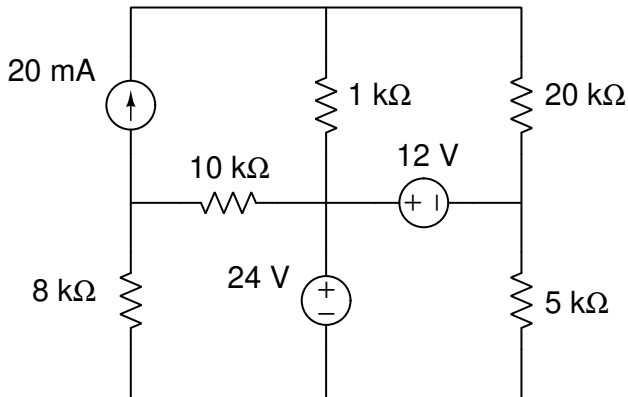


$$R = 1 \parallel 3 \parallel 6 = 0.667 \Omega$$

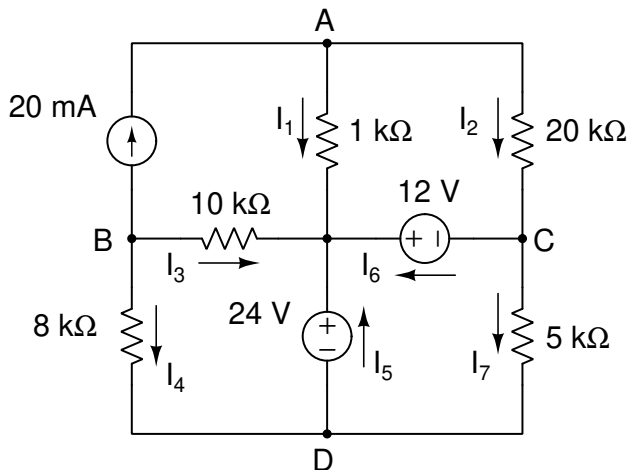
$$V = 12R = 8 \text{ V} \quad I_x = \frac{V}{3} = 2.667 \text{ A}$$

# Άσκηση 11

Να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην  $5\text{ k}\Omega$ .



## 11b - Kirchhoff κλαδικά ρεύματα



$$\begin{aligned}
 \text{A: } & 20 - I_1 - I_2 = 0 \\
 \text{B: } & -20 - I_3 - I_4 = 0 \\
 \text{C: } & I_2 - I_6 - I_7 = 0 \\
 \text{D: } & I_4 - I_5 + I_7 = 0 \\
 & -I_1 + 20I_2 = 12 \\
 & 10I_3 - 8I_4 = -24 \\
 & 5I_7 = 24 - 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= 20 \\
 I_3 + I_4 &= -20 \\
 I_2 - I_6 - I_7 &= 0 \\
 I_4 - I_5 + I_7 &= 0 \\
 -I_1 + 20I_2 &= 12 \\
 10I_3 - 8I_4 &= -24 \\
 5I_7 &= 12
 \end{aligned}$$

```
octave:5> A=[1 1 0 0 0 0 0; 0 0 1 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 -1 -1; 0 0 0 1 -1 0 1;
-1 20 0 0 0 0 0; 0 0 10 -8 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 5]
```

```
A =
```

```

  1   1   0   0   0   0   0
  0   0   1   1   0   0   0
  0   1   0   0   0  -1  -1
  0   0   0   1  -1   0   1
 -1  20   0   0   0   0   0
  0   0  10  -8   0   0   0
  0   0   0   0   0   0   5
```

```
octave:6> b=[20; -20; 0; 0; 12; -24; 12]
```

```
b =
```

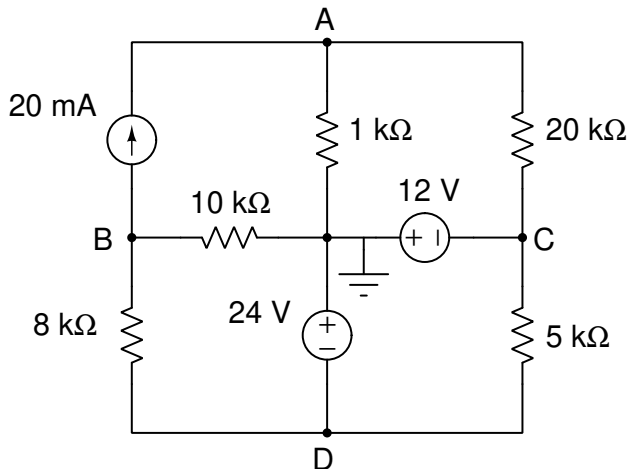
```

 20
-20
  0
  0
 12
-24
 12
```

```
octave:7> I=inv(A)*b
I =
  18.47619
   1.52381
 -10.22222
  -9.77778
  -7.37778
  -0.87619
   2.40000
octave:8> P=5*I(7)^2
P = 28.800
```

$$P_5 = 5I_7^2 = 28.8 \text{ mW}$$

## 11f - Kirchhoff κομβική ανάλυση



$$\text{A: } -20 + V_A/1 + (V_A - V_C)/20 = 0$$

$$\text{B: } 20 + V_B/10 + (V_B - V_D)/8 = 0$$

$$\text{C: } V_C = -12$$

$$\text{D: } V_D = -24$$

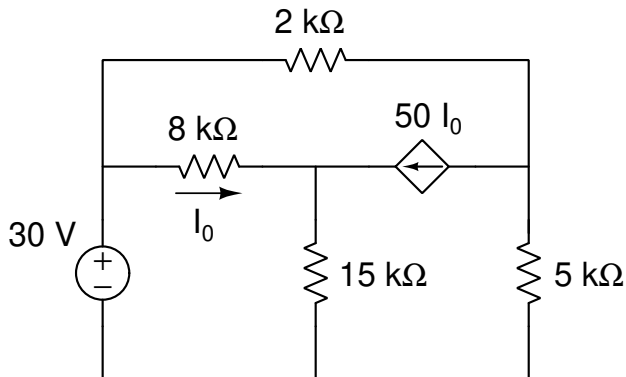
$$V_{CD} = V_C - V_D = -12 + 24 = 12 \text{ V}$$

$$P_5 = V_{CD}^2/5 = 28.8 \text{ mW}$$

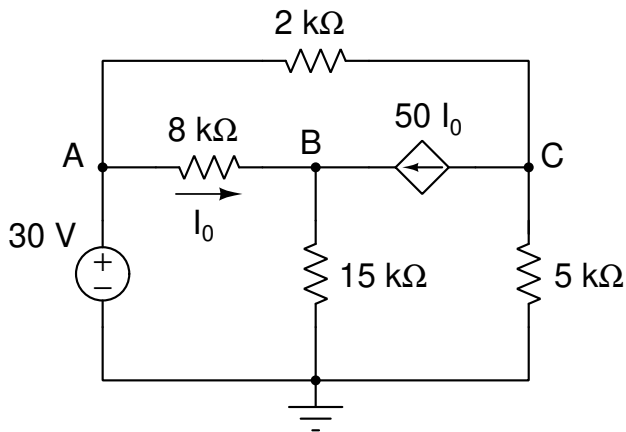


## Άσκηση 12

Να βρεθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην  $5\text{ k}\Omega$ .



## 12b - Kirchhoff κομβική ανάλυση



$$\text{B:} \quad -I_0 - 50I_0 + \frac{V_B}{15} = 0$$

$$\text{C:} \quad \frac{V_C - 30}{2} + 50I_0 + \frac{V_C}{5} = 0$$

$$\frac{30 - V_B}{8} = I_0$$

```
octave:10> Vb=(51*30/8)/(51/8+1/15)
```

```
Vb = 29.690
```

```
octave:11> I0=(30-Vb)/8
```

```
I0 = 0.038810
```

```
octave:12> Vc=(15-50*I0)/(1/2+1/5)
```

```
Vc = 18.656
```

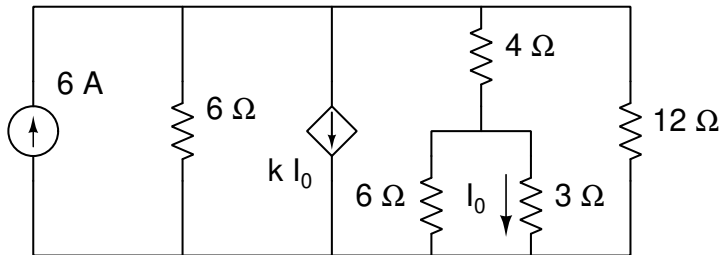
```
octave:13> P=Vc^2/5
```

```
P = 69.613
```

$$P = 69.6 \text{ mW}$$

## Άσκηση 13

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου  $k$  έτσι ώστε η ισχύς που δίνει η πηγή  $6\text{ A}$  να είναι  $108\text{ W}$ .



Με κομβική ανάλυση

$$-6 + \frac{V}{6} + kI_0 + \frac{V}{6} + \frac{V}{12} = 0$$

$$V_3 = \frac{2}{4+2} V = \frac{V}{3}$$

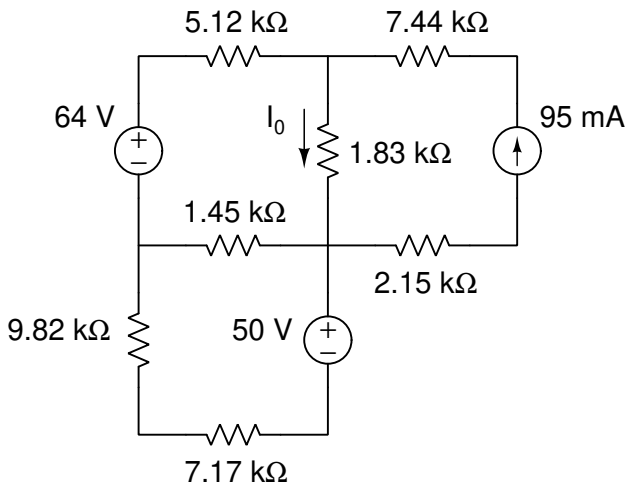
$$I_0 = \frac{V}{3 \cdot 3} = \frac{V}{9}$$

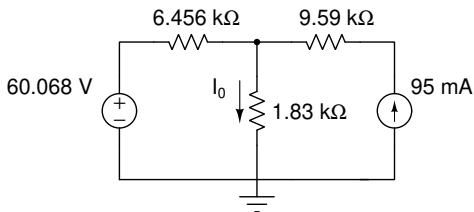
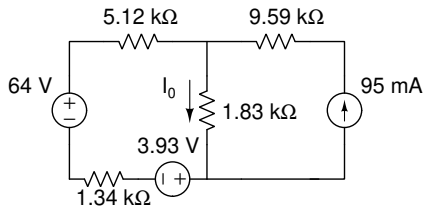
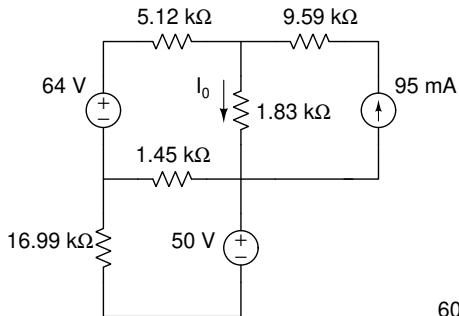
$$P = 6V = 108 \Rightarrow V = 18 \text{ V}$$

$$k = \frac{6 - V(1/6 + 1/6 + 1/12)}{V/9} = -0.75$$

# Άσκηση 14

Να βρεθεί το  $I_0$ .





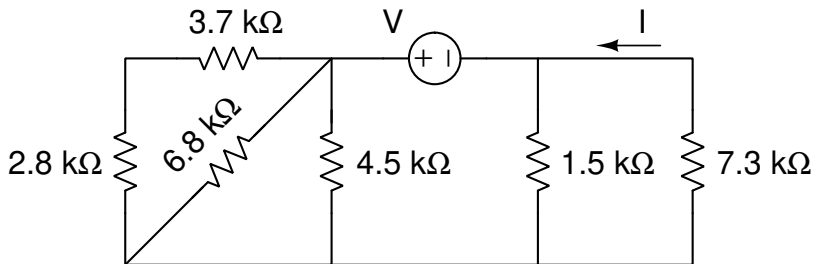
```
octave:20> I1=50/16.99
I1 = 2.9429
octave:21> r1=16.99*1.45/(16.99+1.45)
r1 = 1.3360
octave:22> V1=I1*r1
V1 = 3.9317
octave:23> r2=5.12+r1
r2 = 6.4560
octave:24> V2=64-V1
V2 = 60.068
octave:25> V = (95+V2/r2)/(1/r2+1/1.83)
V = 148.72
octave:26> I0=V/1.83
I0 = 81.268
```

$$I_0 = 81.3 \text{ mA}$$



## Άσκηση 4.7

Εάν  $I = 8 \text{ mA}$  να βρεθεί η τάση  $V$  στο κύκλωμα.



## Άσκηση 4.8

Να υπολογιστεί η τάση  $V$  στο κύκλωμα.

