Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 10

Α. Δροσόπουλος

08-11-2024

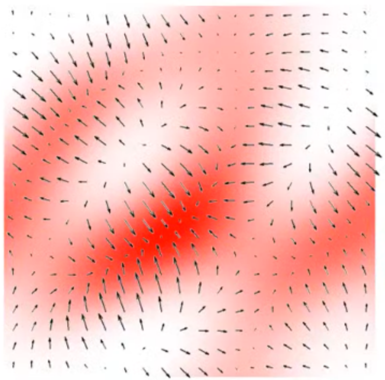
Outline

Topic

1. Διαφορικός λογισμός

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου

Γενίκευση της παραγώγου σε περισσότερες διαστάσεις. Χαρακτηρίζει τον ρυθμό μεταβολής της τιμής ενός βαθμωτού πεδίου στην κατεύθυνση που είναι μέγιστος. Η βάθμωση (grad, gradient) παράγει ένα διανυσματικό πεδίο.



$\nabla f\left(x,y\right)$

Σχήμα: Βαθμίδα βαθμωτού πεδίου

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου 2

Σαν γενίκευση της παραγώγου ισχύουν επίσης:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla f^n = n f^{n-1}\nabla f$$

όπου f και g βαθμωτά πεδία στον τρισδιάστατο χώρο και n ακέραιος.

Σημειώνουμε ότι:

- Το μέτρο της βάθμωσης ∇f ισούται με τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f δείχνει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f σε κάθε σημείο στο χώρο είναι κάθετη στη σταθερή επιφάνεια $f = c$ που περνά από αυτό το σημείο.
- Η προβολή (ή συνιστώσα) της βάθμωσης ∇f στην κατεύθυνση κάποιου μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a}$ είναι $\nabla f \cdot \mathbf{a}$ και ονομάζεται η παράγωγος κατεύθυνσης του πεδίου f στην κατεύθυνση του $\mathbf{a}$.
- Για $\mathbf{A} = \nabla f$, το f είναι το βαθμωτό δυναμικό του $\mathbf{A}$.

Παράδειγμα

Για το πεδίο $W = x^2y^2 + xyz$, υπολογίστε τη βάθμωση ∇W και την παράγωγο κατεύθυνσης $dW/d\ell$ στην κατεύθυνση $\mathbf{a} = (3, 4, 12)$ στο σημείο $(2, -1, 0)$.

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial W}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} = (2xy^2 + yz)\,\hat{\mathbf{x}} + (2x^2y + xz)\,\hat{\mathbf{y}} + (xy)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Στο σημείο $(2, -1, 0)$ έχουμε $\nabla W = (4, -8, -2)$ οπότε

$$\frac{dW}{d\ell} = \nabla W \cdot \hat{\mathbf{a}} = (4, -8, -2) \cdot \frac{(3, 4, 12)}{\|(3, 4, 12)\|} = -3.3846$$

Σχέση ηλεκτρικού πεδίου με δυναμικό

Από τα παραπάνω έχουμε για το δυναμικό $U(x, y, z)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}) = \nabla U \cdot d\mathbf{l}$$

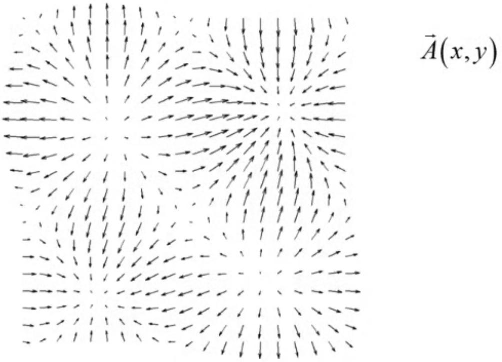
Δεδομένου ότι $dU = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ έχουμε

$$\mathbf{E} = -\nabla U$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στον ορισμό του δυναμικού σαν έργο ανά μονάδα φορτίου κάποιας εξωτερικής δύναμης που αντιτίθεται στο πεδίο και όχι της δύναμης του πεδίου. Άρα, η φορά της έντασης του πεδίου δείχνει τη φορά κατά την οποία το δυναμικό ελαττώνεται.

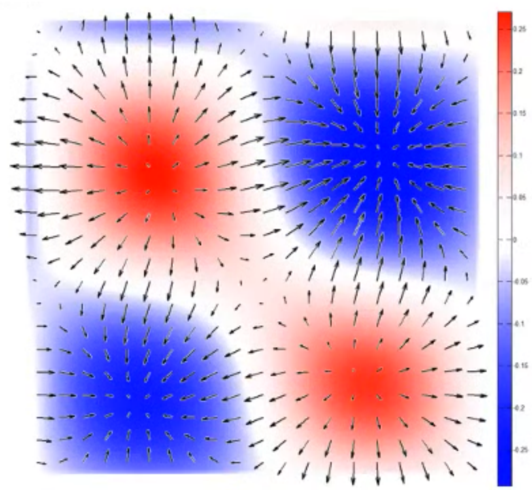
Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου

Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου φανερώνει τα σημεία του πεδίου όπου «πηγάζει» ή «εξαφανίζεται». Σύγκλιση ή απόκλιση (πηγές, sources, καταβόθρες, sinks).
Συμβολίζεται: $\nabla \cdot \mathbf{A}$, div$\mathbf{A}$.



Σχήμα: Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 2



$$\nabla \bullet \vec{A}(x,y)$$

Σχήμα: Με την απόκλιση καταλήγουμε σε βαθμωτό.

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης

Ξεκινάμε από τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$ μέσα από μια κλειστή επιφάνεια S που περικλείει κάποιον όγκο V. Θεωρούμε ότι το πεδίο είναι ορισμένο μέσα στον όγκο V και η απόκλιση (ανεξάρτητα από συστήματα συντεταγμένων) ορίζεται

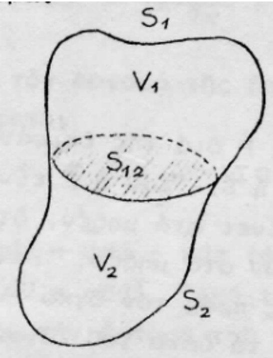
$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

Ο Gauss συνεχίζει με το θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης: «Το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$ μέσα από κλειστή επιφάνεια S ισούται με το ολοκλήρωμα της απόκλισης στον όγκο V που περικλείεται από την επιφάνεια S».

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

Για την απόδειξη ξεκινάμε από το διαχωρισμό ενός όγκου V σε δυο.

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 2



Σχήμα: Η S_{12} χωρίζει τον V σε V_1 και V_2.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1+S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2+S_{12}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2$$

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 3

Συνεχίζοντας τις υποδιαιρέσεις

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_i$$

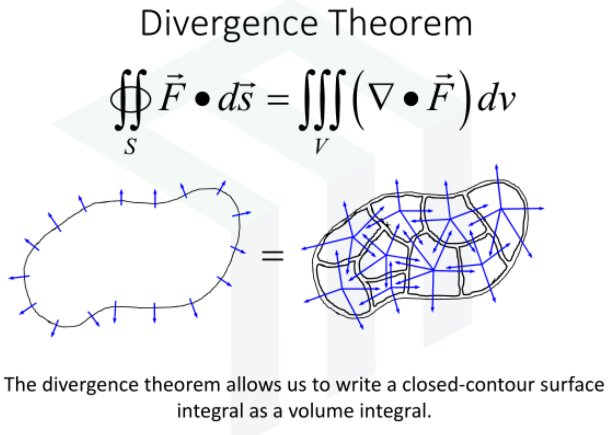
και

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} V_i \left(\frac{\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right)$$

Για $N \to \infty$ και $V_i \to 0$ η παράσταση στην παρένθεση είναι η απόκλιση του $\mathbf{A}$, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και ο V_i γίνεται dV.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$$

Θεώρημα Gauss ή θεώρημα απόκλισης 4



Σχήμα: Συνδέει ροή διανυσματικού πεδίου μέσα από μια κλειστή επιφάνεια με την απόκλιση του πεδίου στον εσωκλεισμένο όγκο

Νόμος Gauss από εξισώσεις Maxwell

Αν αντί του τυχαίου $\mathbf{A}$ θεωρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και το νόμο Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Και για όγκο V οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους και σε κάθε σημείο του χώρου

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

η διαφορική μορφή του νόμου Gauss.

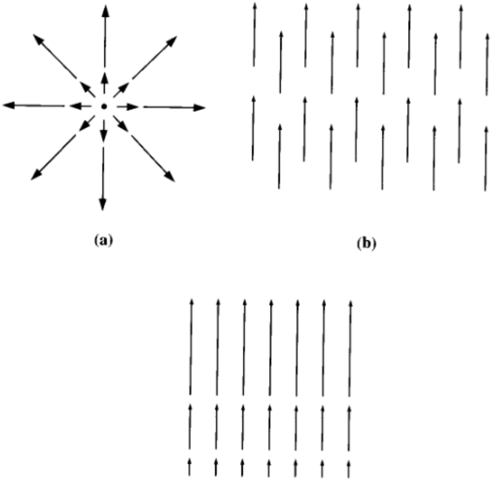
Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 3

Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}(x, y, z)$ στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{x}} \, \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \, \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \, \hat{\mathbf{x}} + A_y \, \hat{\mathbf{y}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}} \right) =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 4



(a) (b) (c)

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 5

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$

(b) $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}$

(c) $\mathbf{C} = z\,\hat{\mathbf{z}}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial (1)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = \frac{\partial z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

Άσκηση

Υπολογίστε την απόκλιση των παρακάτω πεδίων:

- $\mathbf{A} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{C} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$

Απαντήσεις:

- $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2x + 0 - 2x = 0$
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = y + 2z + 3x$
- $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 + 2x + 2y = 2(x + y)$

Άσκηση

Σχεδιάστε το πεδίο $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}/r^2$ και υπολογίστε την απόκλιση. Σχολιάστε την απάντηση.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] =$$

$$= ()^{-3/2} + x\left(-\frac{3}{2}\right)()^{-5/2}2x + ()^{-3/2} + y\left(-\frac{3}{2}\right)()^{-5/2}2y + ()^{-3/2} + z\left(-\frac{3}{2}\right)()^{-5/2}2z =$$

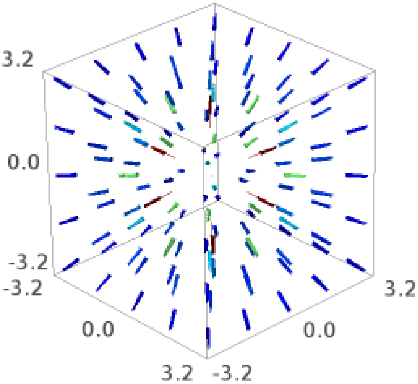
$$= 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2+y^2+z^2) = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0$$

Σχόλιο.

sketch applet

```
sage: x,y,z=var('x y z')
sage: p=plot_vector_field3d((x/(x^2+y^2+z^2)^(3/2),y/(x^2+y^2+z^2)^(3/2),z/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)),
      (x,-3,3),(y,-3,3),(z,-3,3))
sage: p.show()
Launched html viewer for Graphics3d Object
sage: p.save('fig1r2.png')
```

Άσκηση



Τελεστής Laplace

Από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει του δυναμικού

$$\mathbf{E} = -\nabla U$$

παίρνουμε την απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla U = -\nabla^2 U$$

Ο τελεστής ανάδελτα τετράγωνο ονομάζεται τελεστής Laplace ή απλά Λαπλασιανή (Laplacian). Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

και δρα σε βαθμωτή συνάρτηση. Σε περίπτωση διανυσματικού πεδίου δρα σε κάθε βαθμωτή συνιστώσα ξεχωριστά.

Εξισώσεις Laplace, Poisson

Με τον νόμο Gauss σε διαφορική μορφή έχουμε την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

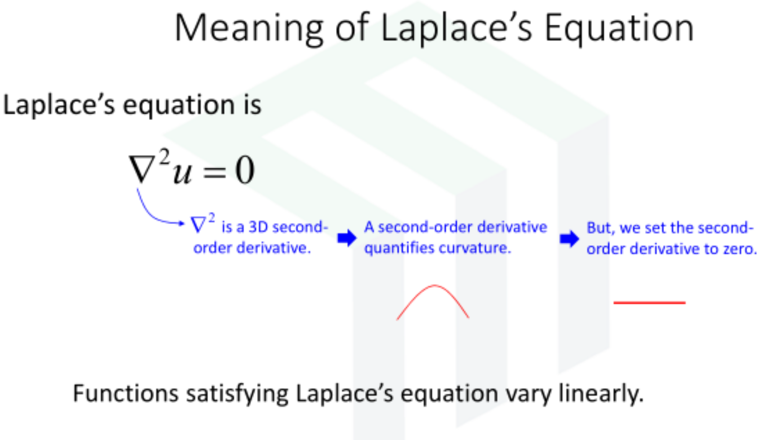
Για περιοχές όπου η πυκνότητα φορτίου είναι μηδενική, έχουμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 U = 0$$

Η τελευταία εξίσωση βρίσκει εφαρμογή σε πολλά πεδία φυσικής. Οι συναρτήσεις που την ικανοποιούν ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις* με χαρακτηριστικές ιδιότητες που απλουστεύουν σημαντικά την επίλυση πολλών προβλημάτων κλασσικών πεδίων.

Νόημα εξίσωσης Laplace

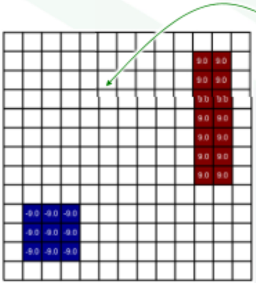
Συνήθως δουλεύομε με την απλή βαθμωτή εξίσωση Laplace $\nabla^2 U = 0$ εφόσον βαθμωτές εξισώσεις είναι απλούστερες στη λύση από διανυσματικές. Αυτή μας δίνει το βαθμωτό δυναμικό σε μια περιοχή και από αυτό υπολογίζουμε όλα τα άλλα μεγέθη.



Νόημα εξίσωσης Laplace (συνέχεια 1)

Problem Setup

Suppose we know the value of $V(x,y)$ at some points in space.



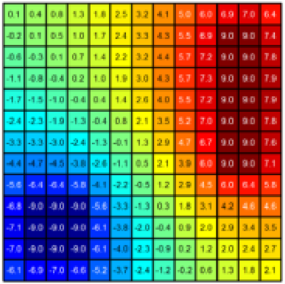
What does the function look like at every other point?

Figure it out by solving Laplace's equation.

$$\nabla^2 V(x,y) = 0$$

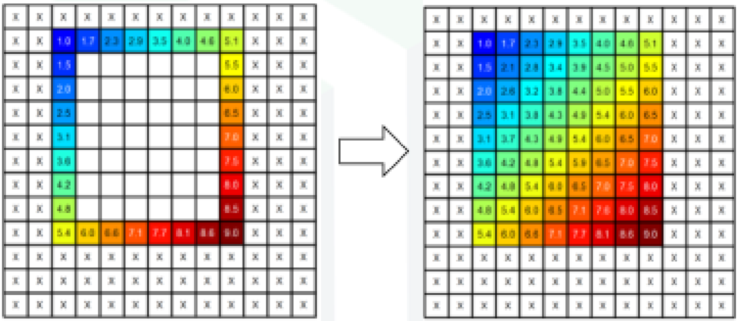
Solution of Laplace's Equation

Laplace's equation is sort of a "number filler inner."



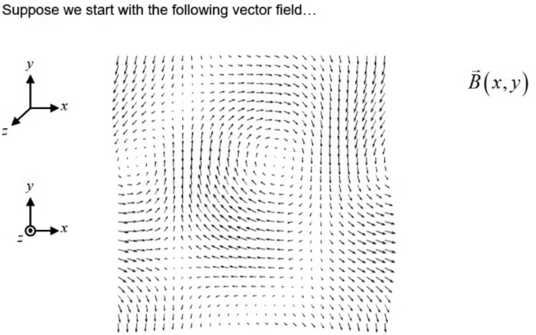
Laplace's equation fills in the numbers so they vary linearly between known regions.

Another Example



Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου

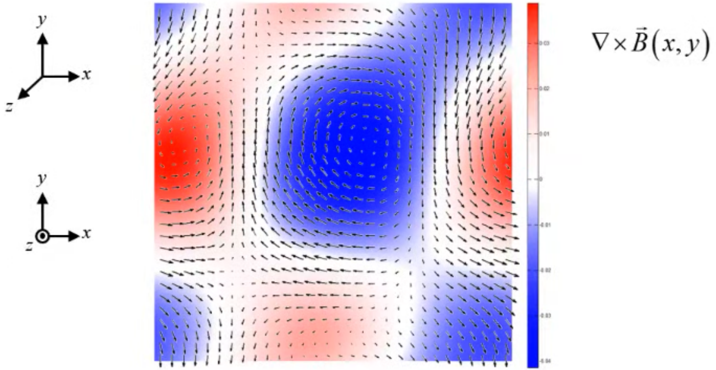
Στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο και χαρακτηρίζει την ιδιότητα του αρχικού πεδίου να περιστρέφεται γύρω από κάποιον άξονα. Λίμνη. Φελλός με οδοντογλυφίδες.



Σχήμα: Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

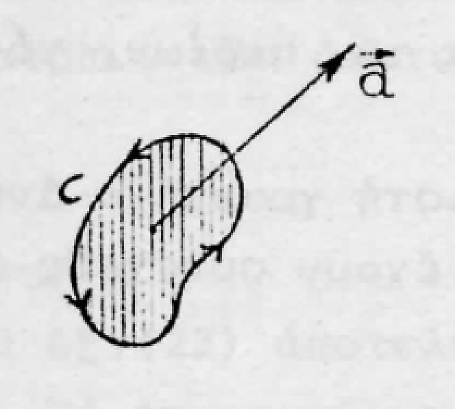
Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 2

The color in the background is the magnitude of the curl. The direction is either into, or out of, the screen. Red indicates $+z$ direction while blue indicates $-z$ direction.



Σχήμα: Καταλήγουμε σε ένα διανυσματικό πεδίο.

Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 3



Σχήμα: Η φορά διαγραφής της C σε συνδυασμό με το $\mathbf{a}$ αποτελούν σύστημα δεξιόστροφου κοχλία.

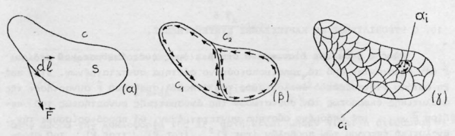
Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 3

Ορισμός ανεξάρτητος συστήματος συντεταγμένων

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

το όριο της κυκλοφορίας στην κλειστή καμπύλη C ως προς την επιφάνεια $\mathbf{a}$ όταν αυτή τείνει στο μηδέν. Η ποσότητα αυτή είναι ο στροβιλισμός του πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο.

Θεώρημα Stokes



Σχήμα: Άθροισμα κυκλοφοριών στα C_i ισούται με την κυκλοφορία επί της C.

Και εδώ μπορούμε να υποδιαιρέσουμε την επιφάνεια που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη C με κλειστές καμπύλες C_i και να ορίσουμε

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i}{a_i} \right)$$

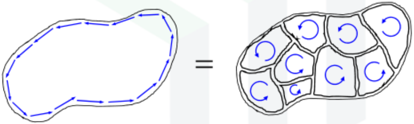
όπου οριακά για $N \to \infty$ και $a_i \to 0$ η παράσταση στην παρένθεση είναι ο στροβιλισμός του $\mathbf{F}$, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα και $\mathbf{a}_i \to d\mathbf{a}$.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$$

Θεώρημα Stokes 2

Stoke's Theorem

$$\oint_L \vec{F} \bullet d\vec{\ell} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \bullet d\vec{s}$$



Stoke's theorem allows us to write a closed-contour line integral as a surface integral.

Σχήμα: Συνδέει επικαμπύλιο με επιφανειακό ολοκλήρωμα

Το ολοκλήρωμα του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου σε μια επιφάνεια ισούται με την κυκλοφορία του στην κλειστή καμπύλη που οριοθετεί την επιφάνεια.

- Ανεξάρτητο επιφάνειας. Εξαρτάται μόνο από την καμπύλη οριοθέτησης.
- Για κλειστή επιφάνεια μηδενίζεται.

Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 4

Ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$ στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Στροβιλισμός (curl ή rot) διανυσματικού πεδίου 5

- Ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο
- $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
- $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$
- Η απόκλιση του στροβιλισμού διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- Ο στροβιλισμός της βάθμωσης βαθμωτού πεδίου είναι μηδέν, $\nabla \times \nabla f = 0$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το στροβιλισμό των πεδίων:

- $\mathbf{P} = x^2yz\,\hat{\mathbf{x}} + xz\,\hat{\mathbf{z}}$,
- $\mathbf{A} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{C} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$

$$\nabla \times \mathbf{P} = \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= (0-0)\hat{\mathbf{x}} + (x^2y - z)\hat{\mathbf{y}} + (0 - x^2z)\hat{\mathbf{z}} = (x^2y - z)\hat{\mathbf{y}} - x^2z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = -6xz\hat{\mathbf{x}} + 2z\hat{\mathbf{y}} + 3z^2\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -2y\hat{\mathbf{x}} - 3z\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{C} = 0$$

Άσκηση

- Έστω δυο διανυσματικά πεδία $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Ποια είναι η έκφραση $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες;
- Υπολογίστε την έκφραση $(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{r}}$ για το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης $\hat{\mathbf{r}}$.
- Για τα πεδία $\mathbf{A} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$ και $\mathbf{B} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$ υπολογίστε το $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$.

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\,\hat{\mathbf{x}} +$$

$$+\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\,\hat{\mathbf{y}} + \left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Άσκηση (συν)

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Η συνιστώσα x

$$[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}]_x = \frac{1}{\sqrt{}} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ x \left[()^{-1/2} - x\frac{1}{2}()^{-3/2} 2x \right] + yx \left[-\frac{1}{2}()^{-3/2} 2y \right] + zx \left[-\frac{1}{2}()^{-3/2} 2z \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \frac{x}{r} - \frac{1}{r^3}(x^3 + xy^2 + xz^2) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{x}{r} - \frac{x}{r} \right) = 0$$

ομοίως και οι άλλες συνιστώσες οπότε:

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = 0$$

Άσκηση (συν)

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xz^2\frac{\partial}{\partial y} - 2xz\frac{\partial}{\partial z}\right)(xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= \left(x^2y + 3x^2z^2\right)\,\hat{\mathbf{x}} + \left(6xz^3 - 4xyz\right)\,\hat{\mathbf{y}} - \left(3x^2z\right)\,\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= x^2(y+3z^2)\hat{\mathbf{x}} + 2xz(3z^2-2y)\hat{\mathbf{y}} - 3x^2z\hat{\mathbf{z}}$$

Θεώρημα Helmholtz

Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο σε μια περιοχή από την απόκλιση και το στροβιλισμό του:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \qquad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

σαν (θεώρημα Helmholtz)

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}$$

όπου

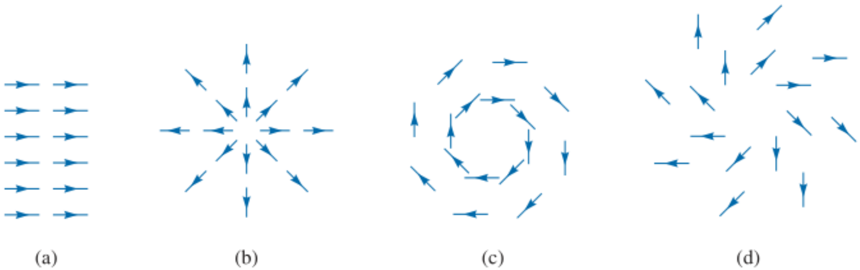
$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dr' \qquad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dr'$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα σαρώνουν όλη την περιοχή και συγκλίνουν. Σύγκλιση σημαίνει απόκλιση D και στροβιλισμός $\mathbf{C}$ να τείνουν στο 0 ταχύτερα από $1/r^2$ καθώς $r \to \infty$ και $\mathbf{F}$ τείνει στο 0 καθώς $r \to \infty$. Η τυπική οριακή συνθήκη όπου όλα τα πεδία τείνουν στο μηδέν όσο απομακρυνόμαστε από τα φορτία που τα δημιουργούν. Τότε η λύση που προτείνει το θεώρημα Helmholtz είναι και μοναδική.

Κατηγοριοποίηση (classification) διανυσματικών πεδίων

Ένα διανυσματικό πεδίο χαρακτηρίζεται πλήρως από την απόκλιση (divergence) ΚΑΙ το στροβιλισμό (curl) του. Οι περιπτώσεις που έχουμε είναι:

a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$
b) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$
c) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$
d) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$



Συντηρητικό πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται συντηρητικό (conservative), ή αστρόβιλο (irrotational) εάν $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Από το θεώρημα Stoke's

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

που σημαίνει ότι η κυκλοφορία του πεδίου γύρω από μια κλειστή καμπύλη είναι εκ ταυτότητος μηδέν, άρα η κυκλοφορία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της καμπύλης. Π.χ. ηλεκτροστατικό πεδίο και πεδίο βαρύτητας. Εν γένει ισχύει ότι $\nabla \times (\nabla V) = 0$ για οποιοδήποτε βαθμωτό πεδίο V άρα,

$$\text{εάν} \quad \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\text{τότε} \quad \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = -\nabla V$$

Το $\mathbf{A}$ ονομάζεται επίσης δυναμικό πεδίο με V το βαθμωτό δυναμικό του $\mathbf{A}$.

Σωληνοειδές πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται σωληνοειδές εάν έχει μηδενική απόκλιση, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Από το θεώρημα απόκλισης

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV = 0$$

φαίνεται ότι οι γραμμές ροής του $\mathbf{A}$ που εισέρχονται στην κλειστή επιφάνεια S πρέπει και να εξέρχονται. Δεν έχουμε πηγές (sources) ή καταβόθρες (sinks). Π.χ. ασυμπίεστα ρευστά, μαγνητικά πεδία, πυκνότητες ρεύματος σε σταθερές καταστάσεις. Εν γένει ισχύει ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ άρα,

$$\text{εάν} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{τότε} \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F}$$

Τυπολόγιο

Εσωτερικά γινόμενα

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta_{AB}$
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$
$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = (\nabla\cdot\mathbf{A})f + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

Εξωτερικά γινόμενα

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta_{AB}\ \hat{\mathbf{n}}$
$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$
$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$
$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$
$\nabla\times(f\mathbf{A}) = (\nabla\times\mathbf{A})f + (\nabla f)\times\mathbf{A}$

Τριπλά γινόμενα

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$
$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$
$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Διάφορα Θεωρήματα

Stoke's $\displaystyle\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$

Απόκλισης $\displaystyle\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{A})\ dV$

Καρτεσιανές: (x,y,z)
Βαθμωτό πεδίο: $f(x,y,z)$
Διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x,y,z) &= A_x(x,y,z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x,y,z)\hat{\mathbf{y}}\\ &+ A_z(x,y,z)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Διαφορικά:

$d\mathbf{l} = dx\ \hat{\mathbf{x}} + dy\ \hat{\mathbf{y}} + dz\ \hat{\mathbf{z}}$
$d\mathbf{S} = dydz\ \hat{\mathbf{x}} + dxdz\ \hat{\mathbf{y}} + dxdy\ \hat{\mathbf{z}}$
$dV = dxdydz$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned}
\nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\
\nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 A_x\ \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\ \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\ \hat{\mathbf{z}}\\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\
\nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}}\\
&+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Κυλινδρικές: (ρ,ϕ,z)
Βαθμωτό πεδίο: $f(\rho,\phi,z)$
Διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\rho,\phi,z) &= A_\rho(\rho,\phi,z)\,\hat{\boldsymbol{\varrho}} + A_\phi(\rho,\phi,z)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ &+ A_z(\rho,\phi,z)\,\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Διαφορικά:

$d\mathbf{l} = d\rho\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + \rho d\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\ \hat{\mathbf{z}}$
$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + d\rho dz\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \rho d\rho d\phi\ \hat{\mathbf{z}}$
$dV = \rho d\rho d\phi dz$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned}
\nabla &= \frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\varrho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\varrho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\
\nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 A_\rho\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + \nabla^2 A_\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla^2 A_z\ \hat{\mathbf{z}}\\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\
\nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\varrho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\
&+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Σφαιρικές: (r,θ,ϕ)
Βαθμωτό πεδίο: $f(r,\theta,\phi)$
Διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(r,\theta,\phi) &= A_r(r,\theta,\phi)\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta(r,\theta,\phi)\,\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\\ &+ A_\phi(r,\theta,\phi)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}$$

Διαφορικά:

$d\mathbf{l} = dr\ \hat{\mathbf{r}} + rd\theta\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + r\sin\theta d\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\ \hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta dr d\phi\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + rdrd\theta\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned}
\nabla &= \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\\
\nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 A_r\ \hat{\mathbf{r}} + \nabla^2 A_\theta\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \nabla^2 A_\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}\\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\\
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\\
&+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.11

Δείξτε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{και} \quad \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

όπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

Άσκηση 2.11 - Λύση

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}-\frac{1}{2}\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=-\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x'}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y'}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z'}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(-2)(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2)(y-y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2)(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

Άσκηση 2.12

Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου σημειακού φορτίου.

Ηλεκτροστατικό πεδίο από σημειακό φορτίο Q:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

όπου $\mathbf{r}$ η θέση που υπολογίζουμε το πεδίο και $\mathbf{r}' = 0$ (επιλογή για δική μας ευκολία) η θέση που είναι στερεωμένο το Q. Η απόκλιση του πεδίου είναι $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Προφανώς βολεύουν σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right] = 0 \quad \text{για} \quad r \neq 0$$

Αν πάρουμε το όριο για $r \to 0$ τότε $\nabla \cdot \mathbf{E} \to \infty$. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσω μιας σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το φορτίο είναι

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

σε συμφωνία με το νόμο του Gauss.

Άσκηση 2.12 (2)

Σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

κάτι πεπερασμενο. Το κλειδί είναι το $r = 0$. Ο νόμος Gauss σε διαφορική μορφή είναι $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ όπου ρ η πυκνότητα του φορτίου. Θέλουμε λοιπόν κάτι που να απειρίζεται στο μηδέν αλλά όταν ολοκληρώνουμε σε μια απειροστή περιοχή γύρω του να έχουμε κάτι πεπερασμένο. Αυτός είναι και ο ορισμός της συνάρτησης δ του Dirac. Επομένως η απόκλιση για όλα τα r συμπεριλαμβανομένου και του $r = 0$ είναι:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

και για φορτίο στη θέση $\mathbf{r}'$ γενικεύεται:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Άσκηση 2.13

Το ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου είναι

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

όπου λ σταθερά. Δείξτε ότι το $\mathbf{E}$ είναι σωληνοειδές και συντηρητικό.

Σωληνοειδές όταν $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Συντηρητικό όταν $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Το $\mathbf{E}$ είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες με $\mathbf{E} = E_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}}$ όπου $E_\rho = \lambda/(2\pi\epsilon\rho)$. Επομένως:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho E_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho E_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho E_\rho\right) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho E_\rho\right)\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\right)\hat{\mathbf{z}} = 0$$

Άσκηση 2.14

Το πεδίο ηλεκτρικού διπόλου δίδεται από

$$\mathbf{E} = k\frac{(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})}{r^3}$$

όπου k σταθερά. Δείξτε ότι το $\mathbf{E}$ είναι συντηρητικό.

Πρέπει $\nabla\times\mathbf{E} = 0$. Οπότε, σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(E_\phi\sin\theta\Big) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(rE_\phi\Big)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rE_\theta\Big) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k\sin\theta}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2k\cos\theta}{r^3}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{r}\left[-\frac{2k\sin\theta}{r^3} + \frac{2k\sin\theta}{r^3}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$$

Άσκηση 2.15

Δώστε την αναλυτική έκφραση του $\mathbf{E}$ στις περιπτώσεις: $V_1 = x^3 + 2x^2y + 3y^2z$ και $V_2 = (x-2)(y-4) + 8$. Προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η ένταση του πεδίου είναι μηδέν.

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(x^3 + 2x^2y + 3y^2z\right) = -(3x^2 + 4xy)\,\hat{\mathbf{x}} - (2x^2 + 6yz)\,\hat{\mathbf{y}} - 3y^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

Για $\mathbf{E}_1 = 0$ πρέπει οι τρεις συνιστώσες να μηδενίζονται και αυτό γίνεται για $x = 0$, $y = 0$, z οτιδήποτε, δηλ. άξονας z.

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\Big((x-2)(y-4) + 8\Big) = -(y-4)\,\hat{\mathbf{x}} - (x-2)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Για $\mathbf{E}_2 = 0$ πρέπει οι τρεις συνιστώσες να μηδενίζονται και αυτό γίνεται για $x = 2$, $y = 4$, z οτιδήποτε, δηλ. τομή επιπέδων $x = 2$, $y = 4$, γραμμή παράλληλη στον άξονα z.

Άσκηση 2.16

Ποια από τα παρακάτω ηλεκτρικά πεδία είναι ηλεκτροστατικά; Ποια ικανοποιούν την εξίσωση Laplace; Οι ποσότητες c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές.

$$\mathbf{E}_1 = (c_1 x, c_2 x, c_3 z) \quad \mathbf{E}_2 = (c_1 yz, c_2 zx, c_3 xy) \quad \mathbf{E}_3 = (c_1 x, c_2 y, c_3 z) \quad \mathbf{E}_4 = (c_1 xy, c_2 yz, c_3 zx)$$

Για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο ισχύει $\mathbf{E} = -\nabla V$ και ισχύει $\nabla \times (\nabla V) = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$. Η τελευταία σχέση μάλιστα βγαίνει κατευθείαν από τον νόμο Faraday (εξίσωση Maxwell): $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, επειδή στα ηλεκτροστατικά πεδία δεν έχουμε μεταβολές στο χρόνο και επομένως $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$.

Για $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Οπότε:

Άσκηση 2.16 (2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1: \quad & \nabla \times \mathbf{E}_1 = (0, 0, c_2) \neq 0 \\
\mathbf{E}_2: \quad & \nabla \times \mathbf{E}_2 = (c_3 x - c_2 x, c_1 y - c_3 y, c_2 z - c_1 z) \neq 0 \\
\mathbf{E}_3: \quad & \nabla \times \mathbf{E}_3 = (0, 0, 0) = 0 \\
\mathbf{E}_4: \quad & \nabla \times \mathbf{E}_4 = (-c_2 y, -c_3 z, -c_1 x) \neq 0
\end{aligned}$$

Μόνο το $\mathbf{E}_3$ είναι ηλεκτροστατικό.

Η εξίσωση Laplace είναι $\nabla^2 V = 0$. Από $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = 0$ βγαίνει ότι θέλουμε $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1: \quad & \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = c_1 \neq 0 \\
\mathbf{E}_2: \quad & \nabla \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \\
\mathbf{E}_3: \quad & \nabla \cdot \mathbf{E}_3 = c_3 + c_2 + c_1 \neq 0 \\
\mathbf{E}_4: \quad & \nabla \cdot \mathbf{E}_4 = c_2 z + c_3 x + c_1 y \neq 0
\end{aligned}$$

Μόνο το $\mathbf{E}_2$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Άσκηση 2.17

Να βρεθεί η συνάρτηση $q(r)$ για την οποία $\nabla \cdot [q(r)\mathbf{r}] = 0$.

Έχουμε $\nabla \cdot [q(r)\mathbf{r}] = \nabla \cdot [q(r)\ r\ \hat{\mathbf{r}}]$ με την συνάρτηση που θέλουμε να υπολογίσουμε την απόκλιση να είναι συνάρτηση μόνο του r. Επιλέγουμε σφαιρικές συντεταγμένες και έχουμε:

$$\nabla \cdot [q(r)\ r\ \hat{\mathbf{r}}] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2 q(r) r] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^3 q(r)] = \frac{1}{r^2}\left(3r^2 q + r^3 q'\right) = 3q + rq' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{q'}{q} = -\frac{3}{r} \Rightarrow \ln q = -3\ln r = \ln r^{-3} \Rightarrow q(r) = cr^{-3}$$

Άσκηση 2.18

Να υπολογιστούν οι συνιστώσες E_x, E_y και η πυκνότητα του φορτίου ρ ηλεκτρικού πεδίου με δυναμικό $V = cx/y$, όπου c σταθερή ποσότητα.

$$V = c\frac{x}{y} \qquad \nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(c\frac{x}{y}\right) = c\left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0\right)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left(-\frac{c}{y}, \frac{cx}{y^2}, 0\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(-\frac{c}{y}, \frac{cx}{y^2}, 0\right) = -\frac{2\epsilon_0 cx}{y^3}$$

Άσκηση 2.20

Φορτίο κατανέμεται εντός σφαίρας με ακτίνα r_0 και πυκνότητα φορτίου $\rho = a/r$ όπου a σταθερά. Να υπολογιστούν $\mathbf{E}$ και V εντός και εκτός της σφαίρας. Να υπολογιστεί η τιμή του a συναρτήσει του ολικού φορτίου q και της ακτίνας r_0.

$$\text{ολικό φορτίο} \quad q = \int_v \rho dv = \int_{r=0}^{r_0} \frac{a}{r} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{a r_0^2}{2} \times 2 \times 2\pi = 2\pi a r_0^2 \Rightarrow a = \frac{q}{2\pi r_0^2}$$

Εντός σφαίρας όπου $r < r_0$

$$\epsilon_0 \int E dS = \int \rho dv \Rightarrow \epsilon_0 E 4\pi r^2 = 2\pi a r^2 \Rightarrow E = \frac{a}{2\epsilon_0} \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = \frac{a}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Στην επιφάνεια της σφαίρας το δυναμικό είναι σαν σημειακού φορτίου:

$$V(r = r_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{2\pi a r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{a r_0}{2\epsilon_0}$$

$$V = -\int E dr = -\frac{a}{2\epsilon_0} r + A \Rightarrow \frac{a r_0}{2\epsilon_0} = -\frac{a}{2\epsilon_0} r_0 + A \Rightarrow A = \frac{a r_0}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{a}{2\epsilon_0} r + \frac{a r_0}{\epsilon_0} = \frac{a}{\epsilon_0}\left(r_0 - \frac{r}{2}\right)$$

Εκτός σφαίρας όπου $r > r_0$ όλα είναι σαν σημειακού φορτίου:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2\pi a r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{a r_0^2}{2\epsilon_0 r^2} \qquad \mathbf{E} = \frac{a r_0^2}{2\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{a r_0^2}{2\epsilon_0 r}$$

Άσκηση 2.21

Εξετάστε αν το πεδίο $\mathbf{D} = (3\rho + 1)\sin\phi\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι σωληνοειδές.

Πρέπει $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Έχουμε, σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho D_\rho\Big) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial[(3\rho + 1)\sin\phi]}{\partial z} = 0$$

Άσκηση 2.22

Αν $V = (5\cos\phi)/r^2$ βρείτε ∇V, $\nabla \cdot \nabla V$, $\nabla \times \nabla V$.

Έχουμε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{10\cos\phi}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{5\sin\phi}{r^3\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla\cdot\nabla V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} = \frac{10\cos\phi}{r^4} - \frac{5\cos\phi}{r^4\sin^2\theta} = \frac{5\cos\phi}{r^4}\left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= -\frac{5\cos\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{10\sin\phi}{r^4\sin\theta} + \frac{10\sin\phi}{r^4\sin\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{5\cos\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{20\sin\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$