Ηλεκτρομαγνητισμός
Διάλεξη 07

Α. Δροσόπουλος

30-10-2024

Outline

Topic

1. Παραδείγματα

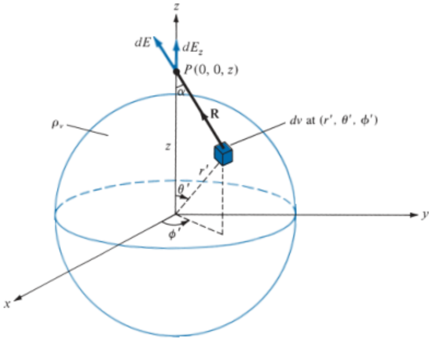
Ασκήσεις βιβλίου

21.1, 21.2, 21.3, 21.6, 21.7, 21.20

Φορτισμένη σφαίρα

Έστω σφαίρα ακτίνας a γεμάτη με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ_V. Θέλουμε το πεδίο εκτός της σφαίρας. Το στοιχειώδες φορτίο dQ που αντιστοιχεί στον στοιχειώδη όγκο dV στο σημείο (r', θ', ϕ') είναι

$$dQ = \rho_V \, dV \Rightarrow Q = \int_V \rho_V \, dV = \rho_V \int_V dV = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο σφαιρικής κατανομής φορτίου στο χώρο

Φορτισμένη σφαίρα 2

και Q είναι το ολικό φορτίο της σφαίρας.

Το στοιχειώδες πεδίο εκτός της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο το υπολογίζουμε για το σημείο $P(0, 0, z)$

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{R}} = \frac{\rho_V\, dV}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$$

Λόγω συμμετρίας οι συνιστώσες E_x, E_y μηδενίζονται και μένει μόνο η συνιστώσα E_z.

$$E_z = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \int_V dE\cos\alpha = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\; dV}{R^2}$$

Από νόμο συνημιτόνου

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta' \Rightarrow \cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'}$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς θ' με σταθερά z, r' έχουμε

$$\sin\theta'\; d\theta' = \frac{RdR}{zr'}$$

Φορτισμένη σφαίρα 3

Καθώς το θ' μεταβάλλεται από 0 σε π, το R μεταβάλλεται από $(z - r')$ σε $(z + r')$ για P εκτός της σφαίρας. Οπότε

$$E_z = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\; dV}{R^2} = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\; r'^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' dr'}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{RdR}{zr'} dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}\frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V 2\pi}{8\pi\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{RdR}{r'} dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{R}\frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r' dR dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2}\right] dR dr' =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a} r' \left[R - \frac{z^2 - r'^2}{R}\right]_{R=z-r'}^{z+r'} dr' =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a} 4r'^2 dr' = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Φορτισμένη σφαίρα 4

Οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Εφόσον

$$Q = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$

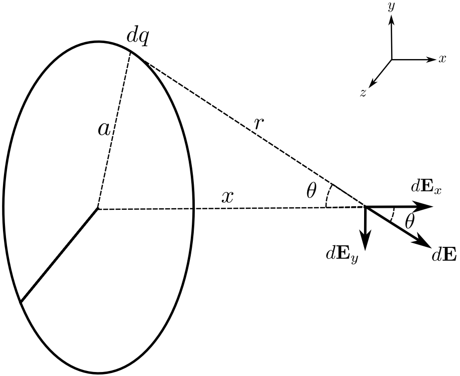
τότε

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_V\ 4\pi a^3}{3\cdot 4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_V\ a^3}{3\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Παράδειγμα 21.9 και 21.11 - σελ 772,773

Φορτίο q κατανέμεται ομοιόμορφα με μορφή λεπτού δακτυλίου ακτίνας a. Υπολογίστε το $\mathbf{E}$ στον άξονα του δακτυλίου. Σε ποια απόσταση από το κέντρο του δακτυλίου και επί του άξονά του η ένταση του πεδίου $\mathbf{E}$ γίνεται μέγιστη και πόση είναι αυτή;

Αντί για δακτύλιο θεωρείστε λεπτό δίσκο ακτίνας R στον οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα το φορτίο q και υπολογίστε το $\mathbf{E}$ στον άξονα του δίσκου.



Λύση 1

Επιλέγουμε άξονα δακτυλίου τον άξονα x. Στοιχειώδες φορτίο dq επί του δακτυλίου δημιουργεί στοιχειώδες πεδίο $d\mathbf{E}$ σε σημείο του άξονα. Αυτό αναλύεται σε συνιστώσα παράλληλη στον άξονα και συνιστώσα κάθετη. Το συμμετρικό ως προς το κέντρο του δακτυλίου στοιχειώδες φορτίο δημιουργεί και αυτό το δικό του πεδίο στο ίδιο σημείο. Η κάθετη συνιστώσα εξουδετερώνεται και μένει η παράλληλη με μέτρο

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας για όλα τα dq έχουμε

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{xq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

και το ολικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}}$$

Λύση 2

Για το σημείο x που έχουμε μέγιστο πεδίο, $dE_x/dx = 0$. Οπότε

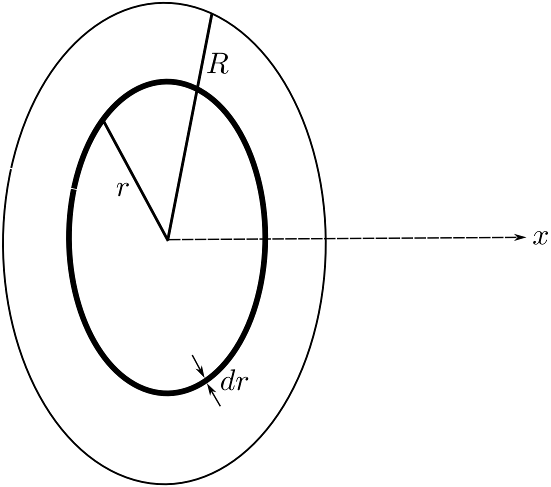
$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+a^2)^{1/2}}{(x^2+a^2)^3}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 + a^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

και

$$\mathbf{E}_{\mathrm{max}} = \pm\frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Λύση 3



Λύση 4

Για τον δίσκο χρησιμοποιούμε την προηγούμενη σχέση δακτυλίου και θεωρούμε ότι ο δίσκος αναλύεται σε δακτυλίους ακτίνας r όπου $0 \leq r \leq R$. Η πυκνότητα φορτίου όπως κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρο το δίσκο είναι

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2}$$

και ένας δακτύλιος με πάχος dr θα έχει εμβαδόν

$$dS = 2\pi r dr$$

και φορτίο

$$dq = \rho dS = 2\pi r \rho dr$$

Οπότε

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\ 2\pi r \rho dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x\rho}{2\epsilon_0} \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

και

$$E_x = \frac{x\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x\rho}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_0^R = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]$$

Επομένως

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \hat{\mathbf{x}}$$