Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 06

Α. Δροσόπουλος

25-10-2024

Outline

Topic

1. **Παραδείγματα**

Παραδείγματα από βιβλίο

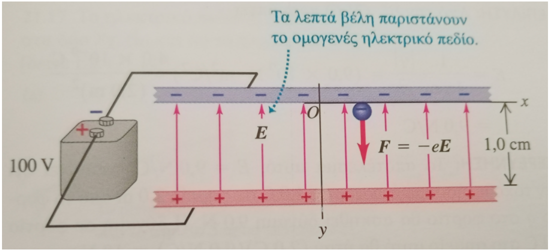
Παραδείγματα από βιβλίο σελ 771-775

examp5a.pdf

Παράδειγμα 21.7 - σελ 768

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο παραλλήλων αγώγιμων πλακών όπως φαίνεται στο σχήμα, έχει μέτρο $E = 10^4$ N/C. Ηλεκτρόνιο εν ηρεμία αφήνεται ελεύθερο στην επάνω πλάκα. Δίδεται φορτίο $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C και μάζα $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ηλεκτρονίου.

- Ποια είναι η επιτάχυνσή του;
- Ποια είναι η ταχύτητά του και η κινητική του ενέργεια όταν φθάσει στην κάτω πλάκα;
- Πόσος χρόνος απαιτείται για να διανύσει αυτήν την απόσταση;



Λύση

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = -1.76 \times 10^{15}\ \mathrm{m/s^2}$$

Εφόσον $v_0 = 0$ και για $a = |a_y|$, έχουμε

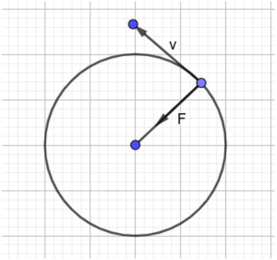
$$\left.\begin{array}{l} v = at \\ s = (1/2)at^2 \end{array}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{2as} = 5.93 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 1.6 \times 10^{-17}\ \mathrm{J}$$

$$t = \frac{v}{a} = 3.37 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε κλασσικά τη συχνότητα περιστροφής, τη γραμμική ταχύτητα και τη στροφορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου ($R = 0.53$ Å, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C). Δίδεται 1 Å $= 10^{-10}$ m.



Άσκηση 8 - Λύση

$$F = \frac{mv^2}{R} = K\frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{K}{mR}} = 2.187 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 6.568 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$L = mvR = 1.056 \times 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

```
>> K=9e9; e=1.602e-19; m=9.11e-31; R=0.53e-10;
>> v=e*sqrt(K/(m*R))
v =  2187190.66266
>> printf("v = %g\n",v)
v = 2.18719e+06
>> w=v/R
w =    4.1268e+16
>> f=w/(2*pi)
f =  6567966140516086
>> printf("f = %g\n",f)
f = 6.56797e+15
>> L=m*v*R
L =    1.0560e-34
```

Πεδίο σημειακού φορτίου

Έστω στάσιμο σημειακό φορτίο Q. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο γύρω του;

Από τον νόμο Coulomb

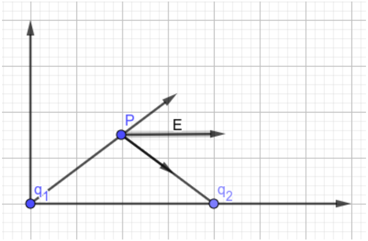
$$\mathbf{E} = K \frac{Q}{\mathscr{r}^2} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

όπου $\mathscr{r}$ η απόσταση μεταξύ φορτίου και σημείου που υπολογίζουμε το πεδίο με $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που τα συνδέει.

Το δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο που υπολογίζουμε το πεδίο είναι πάντα θετικό άρα η φορά είναι απωστική αν $Q > 0$ και ελκτική αν $Q < 0$.

Πεδίο δυο σημειακών φορτίων

Έστω δυο στάσιμα σημειακά φορτία q_1, q_2 (ετερώνυμα στο σχήμα)



$$\mathbf{E} = K q_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'\|^3} + K q_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2'\|^3}$$

όπου $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$ τα διανύσματα θέσης των φορτίων και $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης του πεδίου.
Σαρώνουμε τον χώρο γύρω από τα φορτία.

Δίπολο και πεδία

Βλ σελ 19-22 από PanPhysicsKef 21.

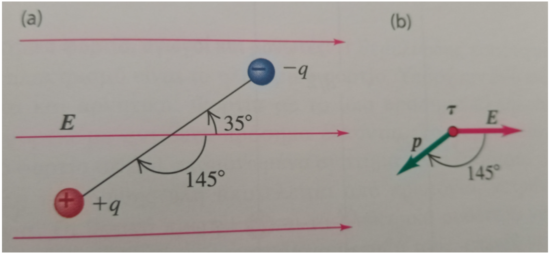
Ανίχνευση πεδίων με δίπολα

- walt07, Walter Lewin

Παράδειγμα 21.13 - σελ 779

Έστω ηλεκτρικό δίπολο με φορτία $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C και απόσταση 0.125 nm σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου $E = 5 \times 10^5$ N/C όπως στο σχήμα. Υπολογίστε:

- την ολική δύναμη που ασκεί το πεδίο στο δίπολο
- τη διπολική ροπή (μέτρο και φορά)
- τη ροπή που ασκεί το πεδίο στο δίπολο
- τη δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση που φαίνεται



Λύση

- Συνισταμένη δύναμη μηδέν
- Μέτρο διπολικής ροπής: $p = qd = 2 \times 10^{-29}$ C · m. Σε καρτεσιανό σύστημα με άξονα x παράλληλο στο πεδίο και y κάθετο σε αυτό και προς τα πάνω, το διάνυσμα της διπολικής ροπής είναι:

$$\mathbf{p} = p\cos(-145^\circ)\,\hat{\mathbf{x}} + p\sin(35^\circ)\,\hat{\mathbf{y}} = -1.64 \times 10^{-29}\,\hat{\mathbf{x}} + 1.15 \times 10^{-29}\,\hat{\mathbf{y}}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

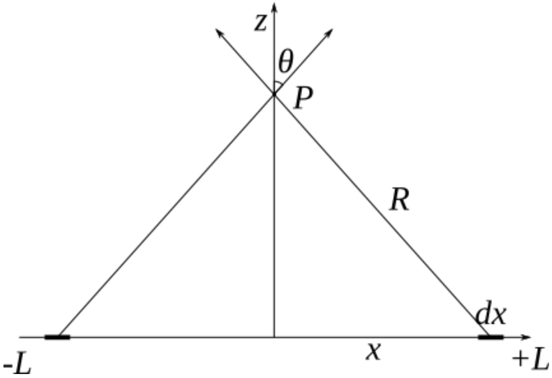
- Η ροπή που ασκεί το πεδίο στο δίπολο:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = -5.74 \times 10^{-24}\,\hat{\mathbf{z}}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

- Δυναμική ενέργεια: $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = 8.19 \times 10^{-24}$ J

Παράδειγμα 21.10 - σελ 772

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από τη μέση ευθυγράμμου τμήματος μήκους $2L$ με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου λ.



Λύση

Βολεύει να πάρουμε συμμετρικά κομμάτια στοιχειώδους φορτίου στα $\pm x$ έτσι ώστε να μηδενιστεί η οριζόντια συνιστώσα. Οπότε

$$d\mathbf{E} = 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\lambda dx}{R^2}\right)\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\cos\theta = z/R \qquad R = \sqrt{z^2 + x^2}$$

και για την z συνιστώσα:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}}dx = \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x}{z^2\sqrt{z^2 + x^2}}\right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}}\right]$$

και $\mathbf{E} = E_z\hat{\mathbf{z}}$ όπου χρησιμοποιήσαμε τον μετασχηματισμό $x = z\tan\theta$ για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

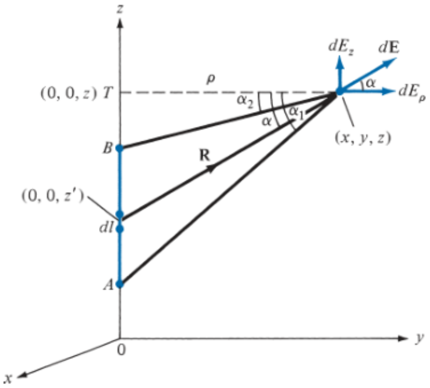
Μακριά από το τμήμα $(z \gg L)$ αυτό γίνεται

$$E_z \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda L}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}$$

όπου $Q = 2\lambda L$ το φορτίο. Μοιάζει με σημειακό.

Γενίκευση πεδίου ευθυγράμμου τμήματος

Θεωρούμε ευθύγραμμη και ομοιόμορφα κατανεμημένη κατανομή φορτίου από A έως B και ζητούμε το ηλεκτροστατικό πεδίο σε κάποιο σημείο του χώρου όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο ευθύγραμμου φορτισμένου τμήματος

Γενίκευση 2

Το σύστημα έχει κυλινδρική συμμετρία και θεωρούμε την γραμμική κατανομή φορτίου στον άξονα z από *A* έως *B*. Έχουμε $dQ = \rho_L d\ell' = \rho_L dz'$ και το σημείο P που υπολογίζουμε το πεδίο έχει συντεταγμένες (x, y, z). Οπότε:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x, y, z) - (0, 0, z') = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\rho_L\, d\ell'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{z}}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dz'$$

$$R = |\mathbf{R}| = \frac{\rho}{\cos\alpha} \qquad z - z' = \rho\tan\alpha \Rightarrow z' = z - \rho\tan\alpha \Rightarrow dz' = -\rho\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\tan\alpha\,\hat{\mathbf{z}}}{(\rho/\cos\alpha)^3} \rho\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{z}}]\, d\alpha \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0\rho}[-(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,\hat{\mathbf{z}}]$$

Στην ειδική περίπτωση όπου το φορτισμένο ευθύγραμμο τμήμα εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ έχουμε $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/2$, η συνιστώσα z εξαφανίζεται και

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Γενίκευση 3

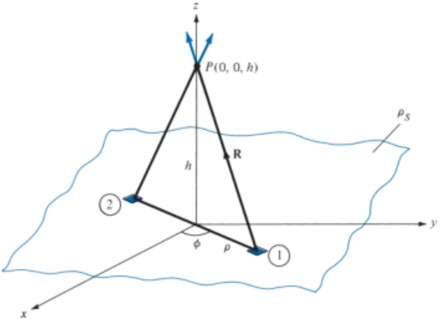
Τι σημαίνει η τελευταία σχέση;

Σημαίνει ότι πάτε στο επίπεδο που σχηματίζει το σημείο και η ευθεία. Το σημείο εφαρμογής του διανύσματος $\mathbf{E}$ είναι ακριβώς αυτό το σημείο. Έχει συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ και συνιστώσα $\hat{\mathbf{z}}$. Η συνισταμένη είναι το ολικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο σημείο εκείνο.

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια, απείρων διαστάσεων, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα φορτίου ρ_S. Το στοιχειώδες φορτίο dQ μιας στοιχειώδους επιφάνειας dS σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$dQ = \rho_S \, dS = \rho_S \, \rho \, d\phi \, d\rho$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 2

Η συνεισφορά του dQ στο ολικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο σημείο $P(0,0,h)$ είναι

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{R}} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$$

όπου

$$\mathbf{r} = h\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{r}' = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \mathbf{r}-\mathbf{r}' = -\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| = (\rho^2+h^2)^{1/2}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S\;\rho\;d\phi\;d\rho[-\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\,\hat{\mathbf{z}}]}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+h^2)^{3/2}}$$

Λόγω συμμετρίας για κάθε στοιχειώδες φορτίο dQ σε γωνία ϕ υπάρχει το συμμετρικό του στη γωνία $\phi+\pi$ που μηδενίζει τη συνιστώσα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Οπότε

$$\mathbf{E} = \int_S d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho\;d\rho\;d\phi}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S\;h\;2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty}(\rho^2+h^2)^{-3/2}\,\frac{1}{2}\,d(\rho^2)\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S\;h}{2\epsilon_0}\left[-(\rho^2+h^2)^{-1/2}\right]\Bigg|_0^{\infty}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Πεδίο επίπεδης φορτισμένης επιφάνειας 3

Όπως φαίνεται το πεδίο είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το φορτισμένο επίπεδο καθώς και το σημείο παρατήρησης του πεδίου P.

Στην πράξη, σε πυκνωτή με δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο κατά προσέγγιση και βλέπουμε ότι το πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των πλακών του πυκνωτή είναι:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} + \frac{(-\rho_S)}{2\epsilon_0}(-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Ασκήσεις βιβλίου

21.1, 21.2, 21.3, 21.6, 21.7, 21.20