

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 04

A. Δροσόπουλος

18-10-2024

1 Coulomb

2 Ηλεκτρικό Πεδίο

3 Ασκήσεις

1 **Coulomb**

2 Ηλεκτρικό Πεδίο

3 Ασκήσεις

Νόμος Coulomb

Οι δυνάμεις μεταξύ φορτίων ονομάζονται δυνάμεις **Coulomb** και για δυο φορτισμένα υλικά σημεία με φορτία q_1 , q_2 και απόσταση z μεταξύ τους, ακολουθούν νόμο ανάλογο με τον νόμο της παγκοσμίου έλξης:

$$\mathbf{F} = K \frac{q_1 q_2}{z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

όπου z η απόσταση μεταξύ των φορτίων και $\hat{\mathbf{z}}$ μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που τα συνδέει. Η κατεύθυνση του \mathbf{F} είναι ελκτική για ετερόνυμα φορτία και απωστική για ομώνυμα.

Στο σύστημα μονάδων SI τα φορτία έχουν μονάδα το coulomb, C, η απόσταση είναι σε μέτρα, m, η δύναμη είναι σε Newton, N και η σταθερά $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ ή m/F. Εναλλακτικά:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{όπου} \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2) \text{ ή F/m}$$

η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού και κατά προσέγγιση του αέρα.

Νόμος Coulomb 2

Για τις δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων δεχόμαστε ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας σύμφωνα με την οποία η δύναμη μεταξύ ζεύγους φορτίων είναι ανεξάρτητη από την παρουσία άλλων φορτίων. Η ολική δύναμη θα είναι το διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων από όλα τα ζεύγη φορτίων που αλληλεπιδρούν σε ένα σύστημα. Η αρχή αυτή διαπιστώνεται μόνο πειραματικά και δεν είναι καθόλου προφανής.

Για τη δύναμη που εξασκεί ένα στάσιμο φορτίο q στη θέση \mathbf{r}' σε ένα δοκιμαστικό φορτίο Q στη θέση \mathbf{r} ισχύει ο νόμος Coulomb

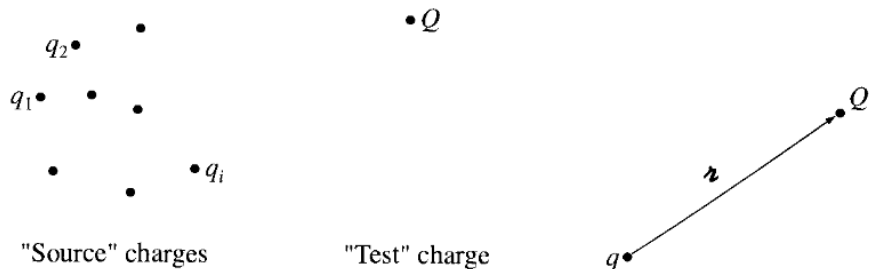
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

όπου

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

και η δύναμη έχει την κατεύθυνση μεταξύ q και Q . Η φορά είναι απωστική αν τα φορτία είναι ομώνυμα και ελκτική αν είναι ετερόνυμα.

Νόμος Coulomb 3



Σχήμα: Φορτία πηγής, δοκιμαστικό και απόσταση μεταξύ τους

Στην ηλεκτροστατική τα φορτία πηγής είναι στάσιμα αλλά το δοκιμαστικό μπορεί να κινείται.

Νόμος Coulomb 4

Γενικεύοντας (αρχή επαλληλίας), για σύστημα N στασίμων φορτίων, q_1, q_2, \dots, q_N σε θέσεις $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N$, η συνολική δύναμη σε φορτίο Q στη θέση \mathbf{r} είναι:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \frac{Qq_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} + \dots + \frac{Qq_N}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_N)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_N|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3}$$

Εναλλακτικά, για $\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{z_i^2} \hat{\mathbf{z}}_i = Q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

όπου

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{z_i^2} \hat{\mathbf{z}}_i$$

είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα φορτία πηγής.

Οι δυνάμεις Coulomb είναι πολύ ισχυρότερες από τις δυνάμεις βαρύτητας. Σε σύστημα π.χ. δυο ηλεκτρονίων με φορτίο $e = 1.60217662 \times 10^{-19}$ C, μάζα $m_e = 9.10938356 \times 10^{-31}$ kg για την ίδια απόσταση r :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K e^2}{G m_e^2} = \frac{9 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11}} \frac{e^2}{m_e^2} = 4.1741 \times 10^{42}$$

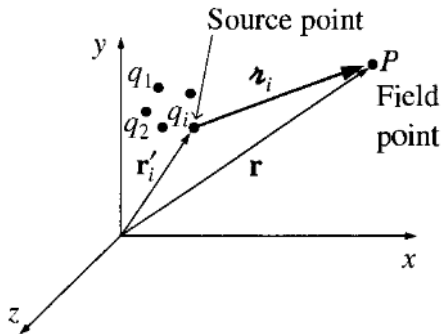
1 Coulomb

2 Ηλεκτρικό Πεδίο

3 Ασκήσεις

Ηλεκτρικό πεδίο

Ηλεκτροστατικό πεδίο



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P

Ηλεκτρικό πεδίο 2

Όπως έχουμε πει σε προηγούμενο μάθημα το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη δική του φυσική οντότητα. Σε χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο αν φέρουμε κάποιο άλλο φορτίο (δοκιμαστικό) θα εξασκηθεί δύναμη σε αυτό. Το παραπάνω μοντέλο είναι καλό αν η αλληλεπίδραση μεταξύ του δοκιμαστικού φορτίου Q και των φορτίων πηγής είναι αμελητέα.

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

Μην ξεχνάμε ότι και το Q δημιουργεί γύρω του το δικό του πεδίο.

Προφανώς το Q δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το φορτίο του ηλεκτρονίου (προσοχή στον υπολογισμό πεδίων σε ατομικές διαστάσεις) αλλά το παραπάνω όριο το ερμηνεύουμε ότι το Q είναι αρκετά μικρό και δεν επηρεάζει τα άλλα στάσιμα φορτία του χώρου που δημιουργούν το πεδίο. Η ακριβής ονομασία του πεδίου είναι τότε *ηλεκτροστατικό πεδίο*.

- Ο Maxwell π.χ. πίστευε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αντιπροσωπεύει πιέσεις και παραμορφώσεις κάποιου αόρατου, αρχέγονου, ζελατινοειδούς μέσου, του αιθέρα.
- Βασίστηκε στην αναλογία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και κυμάτων σε νερό ή αέρα (ο Maxwell πρόέβλεψε την ύπαρξη των πρώτων και ο Hertz αργότερα το επαλήθευσε πειραματικά).

Ηλεκτρικό πεδίο 3

Για σύστημα σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots, q_N , σταθερά διατεταγμένων στο χώρο, σύμφωνα με τον νόμο Coulomb και αρχή επαλληλίας, σε οποιοδήποτε θετικό σημειακό δοκιμαστικό φορτίο Q εξασκείται η συνισταμένη δύναμη

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{z_i^2} \hat{\mathbf{z}}_i$$

όπου z_i η απόσταση μεταξύ φορτίου q_i και Q και $\hat{\mathbf{z}}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση των δυο φορτίων.

Ο χώρος γύρω από τα φορτία q_i εντός του οποίου κάποιο άλλο φορτίο δέχεται δύναμη \mathbf{F} καλείται ηλεκτρικό πεδίο.

Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από μια διανυσματική συνάρτηση θέσης, την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που είναι

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{z_i^2} \hat{\mathbf{z}}_i$$

όπου \mathbf{r} η θέση που θεωρούμε την τιμή της συνάρτησης \mathbf{E} .

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου εκφράζει τη δύναμη ανά μονάδα φορτίου. Για σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων έχουμε

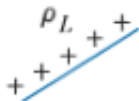
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Ηλεκτρικό πεδίο 4

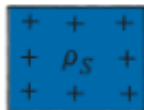
Μπορούμε να γενικεύσουμε την κατανομή των φορτίων που δημιουργούν ένα πεδίο από το σημειακό φορτίο σε ευθύγραμμο αγωγό (γραμμή), σε επιφάνεια και σε όγκο.



Point
charge



Line
charge



Surface
charge



Volume
charge

Σχήμα: Κατανομές φορτίου.

Ηλεκτρικό πεδίο 5

Νόημα εδώ έχει η πυκνότητα φορτίου, ρ_L σε (C/m) για γραμμικό φορτίο σε κάποια καμπύλη L , ρ_S σε (C/m²) για επιφανειακό φορτίο σε κάποια επιφάνεια S και ρ_V σε (C/m³) για χώρο όγκου V . Οπότε το ολικό φορτίο q που δημιουργεί πεδίο σε κάθε περίπτωση είναι:

$$q = \int_L \rho_L d\ell \quad q = \int_S \rho_S dS \quad q = \int_V \rho_V dV$$

με αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_{\Omega} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z^2}$$

για οποιαδήποτε κατανομή φορτίου στα σημεία \mathbf{r}' στο χώρο Ω .

Στη βιβλιογραφία:

$$\begin{array}{lll} \rho_L \rightarrow \lambda & \rho_S \rightarrow \sigma & \rho_V \rightarrow \rho \\ dq = \lambda d\ell' & dq = \sigma da' & dq = \rho d\tau' \end{array}$$

- Μικροσκοπικά, η πυκνότητα φορτίου είναι ασυνεχής. Μακροσκοπικά, τη θεωρούμε συνεχή. Η απόσταση $z = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ είναι μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του στοιχειώδους όγκου που συμπεριλαμβάνει τα φορτία (πολλά).
- Πεδίο είναι γενικότερα μια ποσότητα που είναι συνάρτηση της θέσης στο χώρο. Έχουμε τα βαθμωτά (scalar fields) και τα διανυσματικά (vector fields). Στη γενική περίπτωση, βαθμωτά και διανυσματικά πεδία μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο.

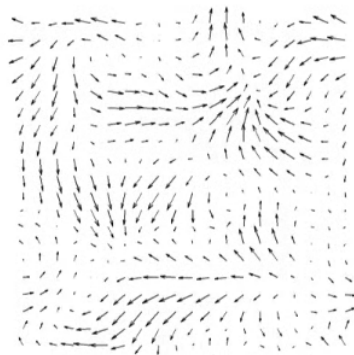
Πεδία

Ένα πεδίο είναι μια συνάρτηση που περιγράφει κάποιο μέγεθος σε κάποια σημείο του χώρου. Το μέγεθος μπορεί να είναι βαθμωτό ή διανυσματικό και να μεταβάλλεται ή όχι και στο χώρο και στο χρόνο.



Scalar Field, $f(x, y)$

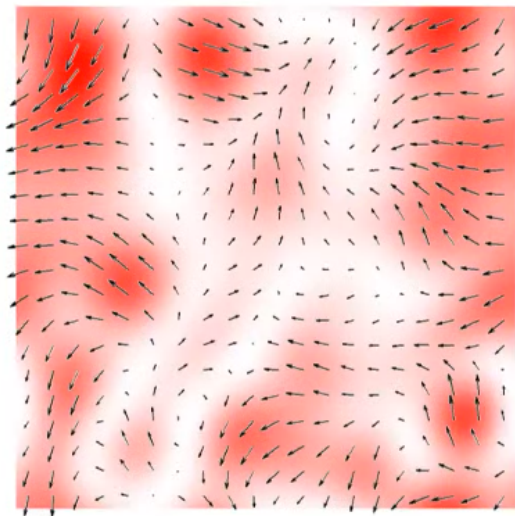
magnitude(x, y, z)



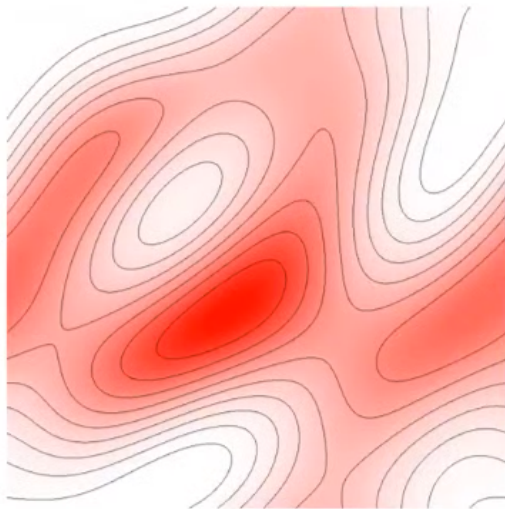
Vector Field, $\vec{v}(x, y)$

magnitude(x, y, z)

+ direction (x, y, z)



Σχήμα: Εναλλακτική μορφή διανυσματικού πεδίου



Σχήμα: Υψομετρικά περιγράμματα - isocontour lines σε βαθμωτά πεδία

Ένα ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί από τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, ένα σύστημα καμπύλων που βοηθά να προσδιορίσουμε την ένταση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο αυτού.

Πυκνότητα, καμπυλότητα και φορά των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών χαράζονται έτσι ώστε:

- 1 Η διεύθυνση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο ηλεκτρικής δυναμικής γραμμής να συμπίπτει με τη διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.
- 2 Η ηλεκτρική δυναμική γραμμή έχει παντού τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου.
- 3 Η πυκνότητα των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών σε κάθε σημείο είναι ανάλογη του μέτρου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

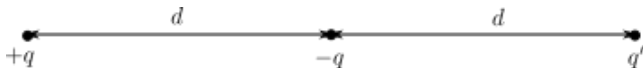
1 Coulomb

2 Ηλεκτρικό Πεδίο

3 **Ασκήσεις**

Άσκηση 1

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των φορτίων $+q$, $-q$ και q' ώστε η δύναμη στο φορτίο $+q$ να είναι μηδέν;



Άσκηση 1 - Λύση

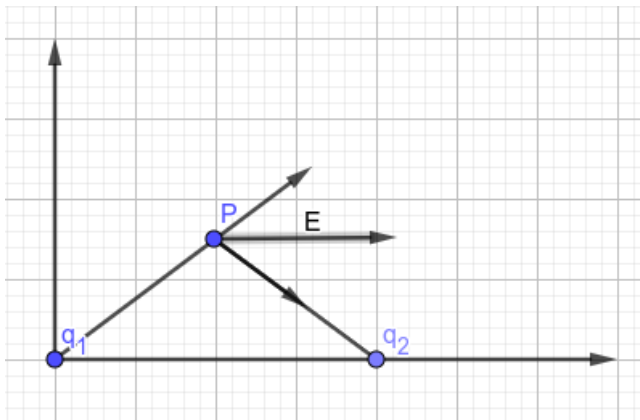
Η δύναμη στο $+q$ από το $-q$ είναι ελκτική. Για να μηδενίζεται η ολική δύναμη, η επι μέρους δύναμη από το q' πρέπει να είναι απωστική.

Άρα:

$$K \frac{q^2}{d^2} = K \frac{qq'}{4d^2} \Rightarrow q' = 4q$$

Άσκηση 2

Δυο σημειακά φορτία $q_1 = 1.25 \times 10^{-8} \text{ C}$, $q_2 = -1.25 \times 10^{-8} \text{ C}$ βρίσκονται στα σημεία $(0, 0)$ και $(8, 0)$. Οι αποστάσεις σε m. Να βρεθεί η ένταση του πεδίου στο $(4, 3)$.



Άσκηση 2 - Λύση

$$\mathbf{r} = (4, 3) \quad \mathbf{r}'_1 = (0, 0) \quad \mathbf{r}'_2 = (8, 0)$$

$$\mathbf{E} = Kq_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1\|^3} + Kq_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2\|^3} = (7.2, 0) \text{ N/C}$$

```
>> r=[4 3]; r1=[0 0]; r2=[8 0]; K=9e9; q1=1.25e-8; q2=-1.25e-8;
```

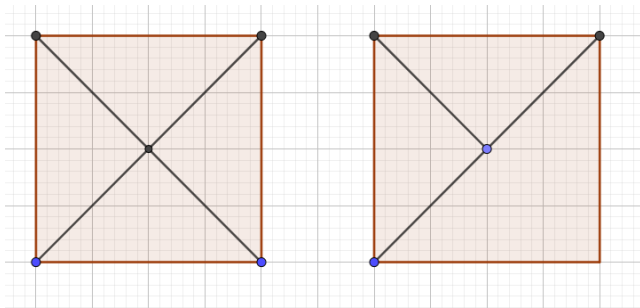
```
>> E=K*q1*(r-r1)/(norm(r-r1))^3 + K*q2*(r-r2)/(norm(r-r2))^3
```

```
E =
```

```
7.20000 0.00000
```


Άσκηση 3

Να βρεθεί η δύναμη σε φορτίο $4q$ στο κέντρο τετραγώνου όταν σε κάθε κορυφή του υπάρχει φορτίο q . Ποια είναι η δύναμη όταν σε μια από τις κορυφές του δεν υπάρχει φορτίο; Εφαρμογή για $q = 2 \text{ C}$ και πλευρά τετραγώνου $a = 0.2 \text{ cm}$.



Άσκηση 3 - Λύση

Όλα τα φορτία ομώνυμα άρα δυνάμεις απωστικές. Όταν και οι τέσσερις κορυφές έχουν φορτίο, λόγω συμμετρίας, η δύναμη στο κέντρο είναι μηδέν. Όταν μόνο οι τρεις κορυφές έχουν φορτίο, μόνο η μια κορυφή απέναντι της κενής, μετρά. Αν a η πλευρά, $a\sqrt{2}$ η διαγώνιος και $a\sqrt{2}/2$ η ημι-διαγώνιος.

$$\mathbf{r} = (a/2, a/2) \quad \mathbf{r}'_1 = (0, a)$$

$$\mathbf{F} = K4q^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1\|^3} = (5.0912 \times 10^{16}, -5.0912 \times 10^{16}) \text{ N}$$

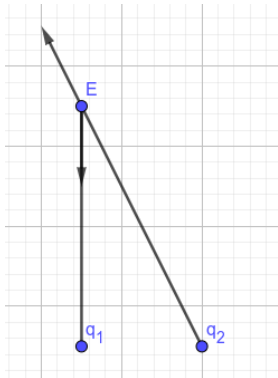
$$\|\mathbf{F}\| = 7.2000 \times 10^{16} \text{ N}$$

```
>> a=0.2e-2; r=[a/2 a/2]; r1=[0 a]; K=9e9; q=2;
>> F=K*4*q^2*(r-r1)/(norm(r-r1))^3
F =
    5.0912e+16    -5.0912e+16
>> norm(F)
ans =    7.2000e+16
```

Άσκηση 4

Δυο σημειακά φορτία $q_1 = -3 \mu\text{C}$ και $q_2 = 12 \mu\text{C}$ βρίσκονται στα σημεία $(0, 0)$ και $(30, 0)$. Οι αποστάσεις σε cm.

- 1 Να υπολογιστεί το \mathbf{E} στο σημείο $(0, 60)$.
- 2 Να βρεθεί το σημείο P_0 στο οποίο $\mathbf{E} = 0$.



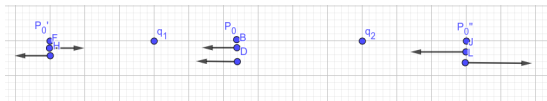
Άσκηση 4 - Λύση

$$\mathbf{r} = (0, 0.6) \quad \mathbf{r}'_1 = (0, 0) \quad \mathbf{r}'_2 = (0.3, 0)$$
$$\mathbf{E} = Kq_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1\|^3} + Kq_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2\|^3} = (-1.073, 1.397) \times 10^5 \text{ N/C}$$

```
>> r=[0 0.6]; r1=[0 0]; r2=[0.3 0]; K=9e9; q1=-3e-6; q2=12e-6;
>> E=K*q1*(r-r1)/(norm(r-r1))^3 + K*q2*(r-r2)/(norm(r-r2))^3
E =
  1.0e+05 *
  -1.0733   1.3966
```

Άσκηση 4 - Λύση 2

Για να μηδενιστεί το E το σημείο P_0 πρέπει να βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα φορτία, δηλ. άξονα x και να βρίσκεται είτε αριστερά, είτε ανάμεσα, είτε δεξιά.



Αν είναι ανάμεσα, τα πεδία έχουν ίδια φορά, άρα δεν μηδενίζονται. Αν είναι δεξιά, είναι πιο κοντά στο μεγαλύτερο φορτίο που υπερισχύει, άρα πάλι δεν μηδενίζονται. Επομένως είναι αριστερά, σε απόσταση x από το q_1 .

$$K \frac{|q_1|}{x^2} = K \frac{|q_2|}{(x + 0.3)^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \frac{0.3\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_2|} - \sqrt{|q_1|}} = 0.3 \text{ m}$$

Επομένως $P_0 = (-0.3, 0) \text{ m} = (-30, 0) \text{ cm}$.

```
>> x=(0.3*sqrt(abs(q1)))/(sqrt(abs(q2))-sqrt(abs(q1)))
```

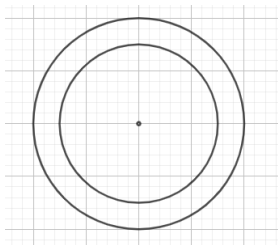
```
x = 0.300000
```

Άσκηση 5

Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα εντός σφαίρας με ακτίνα R και πυκνότητα φορτίου ρ . Να βρεθούν:

- 1 η πυκνότητα ρ του φορτίου και
- 2 το φορτίο εντός του εξωτερικού φλοιού με πάχος d .

Δίδονται: $Q = 12 \text{ C}$, $R = 4 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$.



Άσκηση 5 - Λύση

$$Q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = 4.4762 \times 10^4 \text{ C/m}^3$$

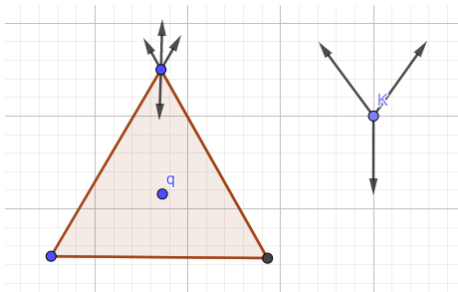
Φορτίο q στο φλοιό:

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 - \rho \frac{4}{3} \pi (R - d)^3 = \frac{4\pi\rho}{3} [R^3 - (R - d)^3] = 6.9375 \text{ C}$$

```
>> Q=12; R=4e-2; d=1e-2;
>> rho=(3*Q)/(4*pi*R^3)
rho = 44762.32774
>> q=(4*pi*rho/3)*(R^3-(R-d)^3)
q = 6.9375
```

Άσκηση 9

Θεωρείστε ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου και φορτίο $q > 0$ στο κέντρο βάρους αυτού. Να βρεθεί το φορτίο q για το οποίο μηδενίζεται η δύναμη σε κάθε ηλεκτρόνιο.



Άσκηση 9 - Λύση

Πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου a . Ύψος $v = a\sqrt{3}/2$. Απόσταση κορυφής από κέντρο βάρους $(2/3)v = a\sqrt{3}/3$.

$$F_e = K \frac{e^2}{a^2} \quad F_q = K \frac{qe}{a^2/3}$$

$$2F_e \cos(30^\circ) = F_q \Rightarrow 2K \frac{e^2}{a^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = K \frac{3qe}{a^2} \Rightarrow q = e \frac{\sqrt{3}}{3}$$