

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 03

A. Δροσόπουλος

16-10-2024

1 Μαθηματικό υπόβαθρο

2 Φορτίο

1 Μαθηματικό υπόβαθρο

2 Φορτίο

Αποστάσεις μεταξύ δυο σημείων

Η απόσταση d μεταξύ δυο σημείων με διανύσματα θέσης \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 δίδεται από

$$d = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$$

και στα τρία συστήματα συντεταγμένων είναι:

καρτεσιανό: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

κυλινδρικό: $d = \sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2}$

σφαιρικό: $d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 - 2r_1r_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos(\phi_2 - \phi_1)}$

Άσκηση 1.01

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και \mathbf{A}, \mathbf{B} κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου α ;

Σύμφωνα με το τεστ εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

Άσκηση 1.01

Εάν $\mathbf{A} = (1, \alpha, 1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, 1, 1)$ και \mathbf{A}, \mathbf{B} κάθετα μεταξύ τους, ποια η τιμή της παραμέτρου α ;

Σύμφωνα με το τεστ εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

Άσκηση 1.02

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του \mathbf{B} στο \mathbf{A} ;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

Προβολή \mathbf{A} στο \mathbf{B}

$$A \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

Προβολή \mathbf{B} στο \mathbf{A}

$$B \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = 1.4286$$

Άσκηση 1.02

Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του $\mathbf{A} = (6, 2, -3)$ στο $\mathbf{B} = (3, -4, 0)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του \mathbf{B} στο \mathbf{A} ;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

Προβολή \mathbf{A} στο \mathbf{B}

$$A \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = 2$$

Προβολή \mathbf{B} στο \mathbf{A}

$$B \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = 1.4286$$

Άσκηση 1.02 (συν)

```
octave:1> A=[6 2 -3]; B=[3 -4 0];
```

```
octave:2> dot(A,B)/norm(B)
```

```
ans = 2
```

```
octave:3> dot(A,B)/norm(A)
```

```
ans = 1.4286
```

```
octave:4> dot(A,B)
```

```
ans = 10
```

```
octave:5> norm(A)
```

```
ans = 7
```

```
octave:6> norm(B)
```

```
ans = 5
```

Άσκηση 1.03

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη:

- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$
- $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\|$
- $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- γωνία μεταξύ \mathbf{A} και \mathbf{B}

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C} = (17, -25, 48)$$

$$(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\| = (0.0811111, 0.811107, 1.378882)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = (0, -1, 5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -32$$

$$\cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \right] = 86.69^\circ$$

Άσκηση 1.03

Έστω $\mathbf{A} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{C} = (4, -6, 10)$. Υπολογίστε τα μεγέθη:

- $\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}$
- $(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\|$
- $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- γωνία μεταξύ \mathbf{A} και \mathbf{B}

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C} = (17, -25, 48)$$

$$(2\mathbf{A} + 5\mathbf{B})/\|\mathbf{C}\| = (0.0811111, 0.811107, 1.378882)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = (0, -1, 5)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -32$$

$$\cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \right] = 86.69^\circ$$

Άσκηση 1.03 (συν)

```
octave:7> A=[-2 5 1]; B=[1 0 3]; C=[4 -6 10];
```

```
octave:8> A-B+5*C
```

```
ans =
```

```
17 -25 48
```

```
octave:9> (2*A+5*B)/norm(C)
```

```
ans =
```

```
0.081111 0.811107 1.378882
```

```
octave:10> x=[1 0 0];
```

```
octave:11> cross(x,A)
```

```
ans =
```

```
0 -1 5
```

```
octave:12> dot(A,cross(B,C))
```

```
ans = -32
```

```
octave:13> acos( dot(A,B)/(norm(A)*norm(B)) ) * 180/pi
```

```
ans = 86.690
```

Άσκηση 1.04

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. Εάν \mathbf{A} και \mathbf{B} παράλληλα, υπολογίστε α και β .

Σύμφωνα με το τεστ εξωτερικού γινομένου πρέπει

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 4 & 2 & -1 \\ \alpha & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(6 + \beta)\hat{x} - (12 + \alpha)\hat{y} + (4\beta - 2\alpha)\hat{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12 \quad \beta = -6 \quad 4\beta - 2\alpha = 0$$

Άσκηση 1.04

Έστω $\mathbf{A} = (4, 2, -1)$ και $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, 3)$. Εάν \mathbf{A} και \mathbf{B} παράλληλα, υπολογίστε α και β .

Σύμφωνα με το τεστ εξωτερικού γινομένου πρέπει

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 4 & 2 & -1 \\ \alpha & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(6 + \beta)\hat{\mathbf{x}} - (12 + \alpha)\hat{\mathbf{y}} + (4\beta - 2\alpha)\hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12 \quad \beta = -6 \quad 4\beta - 2\alpha = 0$$

Άσκηση 1.05

Μετατρέψτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω σημείων σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

$$P : (5.3852, 68.199^\circ, 1) \quad (5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ)$$

$$Q : (5, 126.87^\circ, 0) \quad (5, 90^\circ, 126.87^\circ)$$

$$R : (6.3246, 18.435^\circ, -4) \quad (7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)$$

Άσκηση 1.05

Μετατρέψτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω σημείων σε κυλινδρικές και σφαιρικές. $P(2, 5, 1)$, $Q(-3, 4, 0)$, $R(6, 2, -4)$.

$$P : (5.3852, 68.199^\circ, 1) \quad (5.4772, 79.480^\circ, 68.199^\circ)$$

$$Q : (5, 126.87^\circ, 0) \quad (5, 90^\circ, 126.87^\circ)$$

$$R : (6.3246, 18.435^\circ, -4) \quad (7.4833, 122.31^\circ, 18.435^\circ)$$

Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:14> x=2; y=5; z=1;
octave:15> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 5.3852
octave:16> phi=atan2(y,x)
phi = 1.1903
octave:17> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 68.199
octave:18> help atan2

octave:21> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 5.4772
octave:22> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 79.480
octave:23> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 68.199
```

Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:24> x=-3; y=4; z=0;
octave:25> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 5
octave:26> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 126.87

octave:27> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 5
octave:28> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 90
octave:29> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 126.87
```

Άσκηση 1.05 (συν)

```
octave:30> x=6; y=2; z=-4;
octave:31> rho=sqrt(x^2+y^2)
rho = 6.3246
octave:32> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 18.435

octave:33> r=sqrt(x^2+y^2+z^2)
r = 7.4833
octave:34> theta=acos(z/r)*180/pi
theta = 122.31
octave:35> phi=atan2(y,x)*180/pi
phi = 18.435
```

Άσκηση 1.06

Εκφράστε τα παρακάτω διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

- $\mathbf{A} = \rho \sin \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} - 2z \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = 4r \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + r \hat{\boldsymbol{\theta}}$
- $\mathbf{F} = (4/r^2) \hat{\mathbf{r}}$

Κυλινδρικές: $\mathbf{A} = A_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$

$$A_x = 0$$

$$A_y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_z = -2z$$

Άσκηση 1.06 (συν)

Σφαιρικές: $\mathbf{B} = 4r \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + r \hat{\boldsymbol{\theta}} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + B_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$

$$B_x = \frac{x(4x + z)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$B_y = \frac{y(4x + z)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$B_z = \frac{4xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Άσκηση 1.06 (συν)

Σφαιρικές: $\mathbf{F} = (4/r^2) \hat{\mathbf{r}} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$

Καρτεσιανές: $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$

$$F_x = \frac{4x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_y = \frac{4y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{4z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Άσκηση 1.07

Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των παρακάτω ζευγών σημείων.

- $(2, 1, 5)$ και $(6, -1, 2)$
- $(3, \pi/2, -1)$ και $(5, 3\pi/2, 5)$
- $(10, \pi/4, 3\pi/4)$ και $(5, \pi/6, 7\pi/4)$
- $(4, 30^\circ, 0^\circ)$ και $(6, 90^\circ, 180^\circ)$

```
octave:5> r1=[2 1 5]; r2=[6 -1 2]; d=norm(r1-r2)
d = 5.3852
```

```
octave:6> r1=[3 pi/2 -1]; r2=[5 3*pi/2 5];
octave:7> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2)-r1(2)) + (r2(3)-r1(3))^2)
d = 10
```

```
octave:8> r1=[10 pi/4 3*pi/4]; r2=[5 pi/6 7*pi/4];
octave:9> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2)) -
2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3))))
d = 9.9558
```

```
octave:11> r1=[4 30*pi/180 0]; r2=[6 90*pi/180 180*pi/180];
octave:12> d=sqrt((r2(1)^2 + r1(1)^2 - 2*r1(1)*r2(1)*cos(r2(2))*cos(r1(2)) -
2*r1(1)*r2(1)*sin(r2(2))*sin(r1(2))*cos(r2(3)-r1(3))))
d = 8.7178
```

1 Μαθηματικό υπόβαθρο

2 Φορτίο

Η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής οντότητας, του ηλεκτρικού φορτίου, που η παρουσία του γίνεται αντιληπτή, μεταξύ άλλων, από αναπτυσσόμενες ελκτικές ή απωστικές δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων. Την οντότητα του ηλεκτρικού φορτίου την δεχόμαστε αξιωματικά για να εξηγήσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα που παρατηρούμε γύρω μας. Εντελώς ανάλογα αποδεχόμαστε και την οντότητα της μάζας για υλικά σώματα.

Ενδιαφέρον το [μοντέλο Bohr](#) και αυτό της κβαντομηχανικής.

Τα φορτία στη φύση τα διακρίνουμε σε δυο είδη, θετικά και αρνητικά. Η ονομασία είναι αυθαίρετη ([Benjamin Franklin](#)) γιατί δεν υπάρχει ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου που να δικαιολογεί αυτόν τον χαρακτηρισμό. Εκείνο που χαρακτηρίζει τα φορτία είναι η έλξη μεταξύ αντιθέτων (ετερωνύμων) και η άπωση μεταξύ ομοίων (ομονύμων) φορτίων.

Από διαλέξεις Ηλεκτρομαγνητισμού Walter Lewin

Εισαγωγικά πειράματα από MIT.

Walter Lewin

- [walt01](#), What holds our world together
- [walt02](#), πρώτο πείραμα στατικού ηλεκτρισμού, επαγωγή, ανταλλαγή φορτίου
- [walt03](#), φόρτιση μονωτή - εισαγωγή
- [walt04](#), φόρτιση μονωτή - πείραμα
- [walt05](#), beating Simon
- [walt06](#), flying hair

Λεπτομέρειες για γεννήτρια [van de Graaff](#) διαχωρισμού φορτίων με μηχανική τριβή.

Στο eclass, [waltA.7z](#), τα παραπάνω video.

Ισχύει η αρχή της διατηρήσεως, όπου το ολικό άθροισμα θετικών και αρνητικών φορτίων σε ένα μεμονωμένο σύστημα παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου. Μεμονωμένο σύστημα θεωρούμε εκείνο στο οποίο δεν γίνεται ανταλλαγή μάζας με το περιβάλλον. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό φορτίο από το τίποτα αλλά ούτε και να το καταστρέψουμε.

Παραβίαση αυτής της αρχής θα αποτελούσε π.χ. η δημιουργία μεμονωμένα ενός φορτισμένου σωματιδίου, κάτι που δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ. Δημιουργία φορτίων παρατηρείται, αλλά πάντα σε ζεύγη αντιθέτως φορτισμένων σωματιδίων με συνολικό αλγεβρικό άθροισμα φορτίου μηδέν. Π.χ. δίδυμη γένεση ([pair production](#)) όπου ένα φωτόνιο κατάλληλης ενέργειας μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (ίσο και αντίθετο φορτίο, ίσα ακριβώς μάζα).

Ηλεκτρικό Φορτίο 3

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει επίσης την ιδιότητα να παραμένει αναλλοίωτο κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα φορτίου σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση του σώματος σε σχέση με παρατηρητή που μετράει. Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται με τη μεταβολή της μάζας ενός σώματος σε σχέση με την ταχύτητά του όπως περιγράφεται από τη θεωρία της σχετικότητας. Σε πειράματα, το μετρήσιμο μέγεθος είναι ο λόγος q/m , όπου m η μάζα του σώματος και q είναι το φορτίο που μεταφέρει. Η μεταβολή του λόγου αυτού με την ταχύτητα εξηγείται πλήρως, και μόνο, με τη μεταβολή της μάζας με την ταχύτητα

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας του σώματος, v είναι η ταχύτητά του και c είναι η ταχύτητα του φωτός. Επομένως δεχόμαστε ότι το φορτίο δεν αλλάζει με την ταχύτητα.

Άλλη βασική ιδιότητα είναι η κβάντωση, όπου οποιαδήποτε ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου e του ηλεκτρονίου (**elementary charge**). Πειράματα ακριβείας μέχρι τα μέσα του περασμένου αιώνα δείχνουν ότι αν υπάρχει διαφορά, θα είναι μικρότερη από $10^{-20} e$. (Σημείωση: Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν υπο-σωματίδια, τα quarks, με φορτίο $e/3$. Ο χώρος ύπαρξής τους όμως είναι της τάξεως της διαμέτρου των στοιχειωδών σωματιδίων $\sim 10^{-15}$ m και ποτέ δεν εμφανίζονται μεμονωμένα). Η κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου αγνοείται στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό όπου δεχόμαστε ότι το φορτίο είναι συνεχές με οποιαδήποτε τιμή.