

Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 07

A. Δροσόπουλος

01-11-2023

1 Ασκήσεις

1 Ασκήσεις

Άσκηση 21.1 (σελ 784)

21.1 •• Επιπλέον ηλεκτρόνια τοποθετούνται πάνω σε μια μικρή μολύβδινη σφαίρα μάζας 8,00 g, ώστε το ολικό φορτίο να είναι $-3,20 \times 10^{-9}$ C. (a) Υπολογίστε τον αριθμό των επιπλέον ηλεκτρονίων στη σφαίρα. (b) Πόσα επιπλέον ηλεκτρόνια υπάρχουν ανά άτομο μολύβδου; Ο ατομικός αριθμός του μολύβδου είναι 82 και η ατομική του μάζα είναι 207 g/mol.

Φορτίο ηλεκτρονίου $e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

- Πλεονάζοντα ηλεκτρόνια στη σφαίρα:

$$\frac{q}{-e} = \frac{-3.20 \times 10^{-9}}{-1.602 \times 10^{-19}} = 2 \times 10^{10} \text{ ηλεκτρόνια}$$

- Επιπλέον ηλεκτρόνια ανά άτομο μολύβδου. Αριθμός Ανογαδρό $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ άτομα/mol}$.

$$\frac{m}{M} = \frac{8 \text{ g}}{207 \text{ g/mol}} = 0.038647 \text{ mol}$$

$$n = 0.038647 N_A = 2.3273 \times 10^{22} \text{ άτομα}$$

$$\frac{2 \times 10^{10} \text{ ηλεκτρόνια}}{2.3273 \times 10^{22} \text{ άτομα}} = 8.593 \times 10^{-13}$$

Άσκηση 21.2 (σελ 784)

21.2 • Κεραυνός παρατηρείται όταν υπάρχει ροή ηλεκτρικού φορτίου (κυρίως ηλεκτρονίων) μεταξύ του εδάφους και σύννεφου καταιγίδας. Ο μέγιστος ρυθμός ροής φορτίου κατά την έκσπαση κεραυνού είναι περίπου $20\,000\text{ C/s}$ η διάρκεια αυτού είναι $100\ \mu\text{s}$ ή μικρότερης διάρκειας. Πόσο φορτίο ρέει μεταξύ του εδάφους και του σύννεφου στον χρόνο αυτό; Πόσα ηλεκτρόνια ρέουν κατά τη διάρκεια αυτή;

- Φορτίο:

$$Q = 20000 \text{ C/s} \cdot 100 \times 10^{-6} \text{ s} = 2 \text{ C}$$

- Ηλεκτρόνια:

$$\frac{Q}{e} = 1.248 \times 10^{19}$$

Άσκηση 21.6 (σελ 785)

21.6 • Δύο μικρές σφαίρες, τοποθετημένες 20,0 cm η μία από την άλλη, φέρουν το ίδιο φορτίο. Πόσα επιπλέον ηλεκτρόνια έχει κάθε σφαίρα εάν το μέτρο της απωστικής δύναμης μεταξύ των δύο σφαιρών είναι $3,33 \times 10^{-21}$ N;

Από νόμο Coulomb: $q = \sqrt{Fr^2/K} = 1.217 \times 10^{-16}$ C.

Επομένως: $n = q/e = 759.4 \sim 760$ ηλεκτρόνια.

Άσκηση 21.6 (σελ 785)

21.6 • Δύο μικρές σφαίρες, τοποθετημένες 20,0 cm η μία από την άλλη, φέρουν το ίδιο φορτίο. Πόσα επιπλέον ηλεκτρόνια έχει κάθε σφαίρα εάν το μέτρο της απωστικής δύναμης μεταξύ των δύο σφαιρών είναι $3,33 \times 10^{-21}$ N;

Από νόμο Coulomb: $q = \sqrt{Fr^2/K} = 1.217 \times 10^{-16}$ C.

Επομένως: $n = q/e = 759.4 \sim 760$ ηλεκτρόνια.

Άσκηση 21.7 (σελ 785)

21.7 •• Το βάρος ενός μέσου ανθρώπου είναι περίπου 650 N. Εάν κάθεται από δύο μέσους ανθρώπους μπορούσε να φέρει 1,0 C επιπλέον φορτίο, ο ένας θετικό και ο άλλος αρνητικό, σε πόση απόσταση μεταξύ τους θα πρέπει να τοποθετηθούν ώστε η ελκτική δύναμη μεταξύ τους να είναι ίση με το βάρος τους 650 N;

Από νόμο Coulomb: $r = \sqrt{Kq^2/F} = 3.721 \times 10^3 \text{ m}$

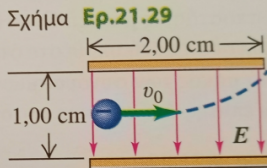
Άσκηση 21.7 (σελ 785)

21.7 •• Το βάρος ενός μέσου ανθρώπου είναι περίπου 650 N. Εάν κάθεται από δύο μέσους ανθρώπους μπορούσε να φέρει 1,0 C επιπλέον φορτίο, ο ένας θετικό και ο άλλος αρνητικό, σε πόση απόσταση μεταξύ τους θα πρέπει να τοποθετηθούν ώστε η ελκτική δύναμη μεταξύ τους να είναι ίση με το βάρος τους 650 N;

Από νόμο Coulomb: $r = \sqrt{Kq^2/F} = 3.721 \times 10^3 \text{ m}$

Άσκηση 21.29 (σελ 786)

21.29 •• CP Ηλεκτρόνιο εισέρχεται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 1,60 \times 10^6 \text{ m/s}$ σε ομογενές πεδίο μεταξύ δύο παράλληλων πλακών (Σχ. A21.29). Υποθέστε ότι το πεδίο μεταξύ των δύο πλακών είναι ομογενές και κατευθύνεται κατακόρυφα από την πάνω πλάκα προς την κάτω και το πεδίο εκτός των πλακών είναι μηδενικό. Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο πεδίο σε σημείο στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο πλακών. (a) Εάν



το ηλεκτρόνιο μόλις αστοχεί την πάνω πλάκα καθώς εξέρχεται από το πεδίο, υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου. (b) Υποθέστε ότι το ηλεκτρόνιο στο Σχ. E21.29 αντικαθίσταται από ένα πρωτόνιο με την ίδια αρχική ταχύτητα v_0 . Θα αναμένετε να προσκρούσει το πρωτόνιο στη μία από τις δύο πλάκες; Εάν όχι, ποιο θα ήταν το μέτρο και η κατεύθυνση της κατακόρυφης μετατόπισης καθώς εξέρχεται από την περιοχή του πεδίου; (c) Συγκρίνετε τις διαδρομές που διήνυσαν το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο και ερμηνεύστε τις διαφορές. (d) Συζητήστε εάν είναι λογικό να αγνοήσουμε τις επιπτώσεις της βαρύτητας για κάθε σωματίδιο.

21.30 • (a) Υπολογίστε...

Δύναμη $F = -eE$ με κίνηση προς τα πάνω. Πρόβλημα κινηματικής με $x = 2 \text{ cm}$, $y = 0.5 \text{ cm}$.

- x συνιστώσα

$$x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} = 1.25 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- y συνιστώσα

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a = 6.4 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$$

$$eE = ma \Rightarrow E = \frac{(9.109 \times 10^{-31} \text{ kg})(6.4 \times 10^{13} \text{ m/s}^2)}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 363.9 \text{ N/C}$$

Το πρωτόνιο (θετικό φορτίο) κινείται προς τα κάτω. Το μόνο που διαφέρει είναι η μάζα του.

$$a = \frac{eE}{m_p} = \frac{(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(363.9 \text{ N/C})}{1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.48 \times 10^{10} \text{ m/s}^2$$

Σε χρόνο t διανύει κατακόρυφη απόσταση προς τα κάτω:

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = 2.72 \times 10^{-6} \text{ m}$$

και δεν χτυπά την κάτω πλάκα.

Εφόσον $a \gg g$ είναι λογικό να αγνοήσουμε την επίδραση της βαρύτητας.

Άσκηση 21.53 (σελ 788)

21.53 • Σημειακά φορτία $q_1 = -4,5 \text{ nC}$ και $q_2 = +4,5 \text{ nC}$ απέχουν μεταξύ τους $3,1 \text{ mm}$, σχηματίζοντας ένα ηλεκτρικό δίπολο. (a) Βρείτε την ηλεκτρική διπολική ροπή (μέτρο και κατεύθυνση). (b) Τα φορτία βρίσκονται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η κατεύθυνση σχηματίζει γωνία $36,9^\circ$ με την ευθεία η οποία συνδέει τα φορτία. Ποιο είναι μέτρο του πεδίου αυτού εάν η ροπή που ασκείται στο δίπολο έχει μέτρο $7,2 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$;

- $p = qd = 1.39 \times 10^{-11} \text{ C} \cdot \text{m}$. Φορά από αρνητικό φορτίο q_1 προς θετικό q_2 .
- $\tau = pE \sin \phi \Rightarrow E = \tau / (p \sin \phi) = 859.6 \text{ N/C}$

Άσκηση 21.53 (σελ 788)

21.53 • Σημειακά φορτία $q_1 = -4,5 \text{ nC}$ και $q_2 = +4,5 \text{ nC}$ απέχουν μεταξύ τους $3,1 \text{ mm}$, σχηματίζοντας ένα ηλεκτρικό δίπολο. (a) Βρείτε την ηλεκτρική διπολική ροπή (μέτρο και κατεύθυνση). (b) Τα φορτία βρίσκονται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η κατεύθυνση σχηματίζει γωνία $36,9^\circ$ με την ευθεία η οποία συνδέει τα φορτία. Ποιο είναι μέτρο του πεδίου αυτού εάν η ροπή που ασκείται στο δίπολο έχει μέτρο $7,2 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$;

- $p = qd = 1.39 \times 10^{-11} \text{ C} \cdot \text{m}$. Φορά από αρνητικό φορτίο q_1 προς θετικό q_2 .
- $\tau = pE \sin \phi \Rightarrow E = \tau / (p \sin \phi) = 859.6 \text{ N/C}$

Άσκηση 21.54 (σελ 788)

στο διπολο έχει μέτρο $1,2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$.

21.54 • Το μόριο της αμμωνίας (NH_3) έχει διπολική ροπή $5,0 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$. Μόρια της αμμωνίας στην αέρια φάση τοποθετούνται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E με μέτρο $1,6 \times 10^6 \text{ N/C}$. (a) Ποια είναι η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας όταν η διπολική ροπή του μορίου αλλάζει τον προσανατολισμό της ως προς το E από παράλληλο σε κάθετο; (b) Σε ποια απόλυτη θερμοκρασία T η μέση μεταφορική κινητική ενέργεια $\frac{3}{2}kT$ ενός μορίου είναι ίση με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, η οποία υπολογίσθηκε στο (a) μέρος; (Σημείωση: Πάνω από αυτήν τη θερμοκρασία η θερμική κίνηση εμποδίζει την ευθυγράμμιση των διπόλων με το ηλεκτρικό πεδίο.)

Δυναμική ενέργεια $U(\phi) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \phi$ όπου ϕ η γωνία μεταξύ \mathbf{p} και \mathbf{E} . $\phi = 0$ παράλληλα και $U(0^\circ) = -pE$. $\phi = 90^\circ$ κάθετα και $U(90^\circ) = 0$. Άρα

$$\Delta U = U(90^\circ) - U(0^\circ) = pE = (5 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(1.6 \times 10^6 \text{ N/C}) = 8 \times 10^{-24} \text{ J}$$

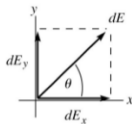
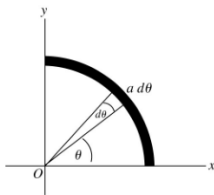
$$\frac{3}{2}kT = \Delta U \Rightarrow T = \frac{2\Delta U}{3k} = \frac{2(8 \times 10^{-24} \text{ J})}{3(1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K})} = 0.386 \text{ K}$$

όπου k η σταθερά Boltzmann. Χρειάζεται πολύ πιο ισχυρό πεδίο για προσανατολισμό σε ψηλότερες θερμοκρασίες.

Άσκηση 21.85 (σελ 790)

φύλλο.

21.85 •• CALC Αρνητικό φορτίο $-Q$ κατανέμεται ομοιόμορφα γύρω από το ένα τέταρτο κύκλου ακτίνας a , το οποίο κείται στο πρώτο τεταρτημόριο με κέντρο καμπυλότητας στην αρχή. Βρείτε τις συνιστώσες x και y του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.



$$dQ = \frac{a d\theta}{(1/2)\pi a} Q = \frac{2Q}{\pi} d\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|dQ|}{a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} d\theta \quad dE_x = dE \cos \theta \quad dE_y = dE \sin \theta$$

$$E_x = \int dE_x = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} (-\cos \theta \Big|_0^{\pi/2}) = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

Παρατηρούμε $E_x = E_y$ όπως αναμέναμε λόγω συμμετρίας με φορά από το κέντρο προς το τεταρτημόριο στη διχοτόμο.

Άσκηση 22.1 (σελ 818)

Εδάφιο 22.2 Υπολογισμός της Ηλεκτρικής Ροής

22.1 • Ένα επίπεδο φύλλο χαρτιού, εμβαδού $0,250 \text{ m}^2$, προσανατολίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε η κάθετη στο επίπεδο του φύλλου να σχηματίζει γωνία 60° με ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου 14 N/C . (a) Βρείτε την ηλεκτρική ροή η οποία διέρχεται διαμέσου του φύλλου. (b) Εξαρτάται από το σχήμα του φύλλου η απάντηση στο ερώτημα (a); Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (c) Για ποια γωνία ϕ μεταξύ της καθέτου στο φύλλο και του ηλεκτρικού πεδίου το μέτρο της ηλεκτρικής ροής γίνεται (i) μέγιστο και (ii) ελάχιστο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E \cos \phi dA = E \cos \phi \int dA = E \cos \phi A = \\ &= 14 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0.250 = 1.75 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

Φ_E είναι ανεξάρτητη από σχήμα χαρτιού εφόσον ϕ και E έχουν σταθερή τιμή.

Φ_E μέγιστη για $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$ και ελάχιστη για $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$.

Άσκηση 22.12 (σελ 819)

22.12 • Ηλεκτρικά Πεδία Μέσα σε Ένα Άτομο. Οι πυρήνες μεγάλων ατόμων, όπως το ουράνιο, με 92 πρωτόνια, μπορούν να μοντελοποιηθούν ως σφαιρικά συμμετρικές σφαίρες φορτίου. Η ακτίνα του πυρήνα του ουρανίου είναι περίπου ίση με $7,4 \times 10^{-15} \text{ m}$. (a) Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο παράγει ο πυρήνας αυτός μόλις έξω από την επιφάνειά του; (b) Ποιο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει σε απόσταση ίση με αυτή των ηλεκτρονίων, που είναι περίπου $1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$; (c) Τα ηλεκτρόνια μπορούν να μοντελοποιηθούν ως εάν να σχηματίζουν ένα ομογενές κέλυφος αρνητικού φορτίου. Πόσο είναι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν στον χώρο του πυρήνα;

Μόλις έξω από πυρήνα

$$E = K \frac{|q|}{r^2} = K \frac{92e}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{92(1.6 \times 10^{-19})}{(7.4 \times 10^{-15})^2} = 2.42 \times 10^{21} \text{ N/C}$$

Στο φλοιό του ατόμου πριν τα ηλεκτρόνια

$$E = 9 \times 10^9 \frac{92(1.6 \times 10^{-19})}{(1 \times 10^{-10})^2} = 1.32 \times 10^{13} \text{ N/C}$$

Πεδίο ηλεκτρονίων στον πυρήνα, μηδέν.

Άσκηση 22.19 (σελ 819)

22.19 •• Μια κοίλη, αγωγίμη σφαίρα με εξωτερική ακτίνα 0,250 m και εσωτερική ακτίνα 0,200 m έχει ομογενή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $+6,37 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$. Φορτίο $-0,500 \mu\text{C}$ τοποθετείται έπειτα στο κέντρο της κοιλότητας στο εσωτερικό της σφαίρας. (a) Πόση είναι η νέα πυκνότητα φορτίου έξω από τη σφαίρα; (b) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ακριβώς έξω από τη σφαίρα. (c) Πόση είναι η ηλεκτρική ροή διαμέσου σφαιρικής επιφάνειας ακριβώς μέσα στην εσωτερική επιφάνεια της σφαίρας;

Ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό είναι μηδέν και όλο το φορτίο πάει στην εξωτερική επιφάνεια. Εισαγωγή φορτίου στην κοιλότητα επάγει φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας που με τη σειρά του επάγει ίσο και αντίθετο φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού. Άρα το ολικό φορτίο είναι

$$q = q_{\text{εξ}} - q_{\text{εσ}} = (6.37 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2)4\pi(0.250 \text{ m})^2 - 0.5 \mu\text{C} = 5 \mu\text{C} - 0.5 \mu\text{C} = 4.5 \mu\text{C}$$

που σημαίνει επιφανειακή πυκνότητα

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi r^2} = 5.73 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$E = \frac{\Phi_E}{A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = 6.47 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$\Phi_E = \frac{q_e}{\epsilon_0} = \frac{-0.5 \mu\text{C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} = -5.65 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Άσκηση 22.21 (σελ 819)

22.21 •• Το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση $0,145\text{ m}$ από την επιφάνεια μιας συμπαγούς μονωμένης σφαίρας ακτίνας $0,355\text{ m}$ είναι 1750 N/C . (a) Θεωρώντας ότι το φορτίο της σφαίρας είναι ομογενώς κατανεμημένο, πόση είναι η πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό της; (b) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας σε απόσταση $0,200\text{ m}$ από το κέντρο.

$$EA = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$q = EA\epsilon_0 = (1750 \text{ N/C})(4\pi)(0.145 + 0.355 \text{ m})^2(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) = 4.866 \times 10^{-8} \text{ C}$$

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4.866 \times 10^{-8} \text{ C}}{\frac{4}{3}\pi(0.355 \text{ m})^3} = 2.60 \times 10^{-7} \text{ C/m}^3$$

$$q_{\text{εγκ}} = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = 2.60 \times 10^{-7} \text{ C/m}^3 \left[\frac{4}{3}\pi(0.2 \text{ m})^3 \right] = 8.71 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$E = K \frac{q_{\text{εγκ}}}{(0.2 \text{ m})^2} = 1.96 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Άσκηση 22.53 (σελ 822)

επιφάνεια της σφαίρας;

22.53 • CALC Η πυκνότητα φορτίου μιας μη ομογενούς αλλά σφαιρικά συμμετρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \quad \text{for } r \leq R$$

$$\rho(r) = 0 \quad \text{for } r \geq R$$

όπου $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ είναι μια θετική σταθερά. (a) Δείξτε ότι το ολικό φορτίο το οποίο περιέχεται στην κατανομή φορτίου είναι Q . (b) Δείξτε ότι για την περιοχή που ορίζεται από $r \geq R$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι το ίδιο με αυτό που προκύπτει από ένα σημειακό φορτίο Q στο σημείο $r = 0$. (c) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή $r \leq R$. (d) Παραστήστε γραφικά το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση του r . (e) Βρείτε την τιμή του r στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο είναι μέγιστο και βρείτε την τιμή του μέγιστου αυτού πεδίου.

Λύση

Θεωρούμε μέσα στη σφαίρα σφαιρικούς φλοιούς ακτίνας r και πάχους dr με όγκο $dV = 4\pi r^2 dr$ και φορτίο

$$dq = \rho(r)dV = 4\pi r^2 \rho_0(1 - r/R)dr$$

Το ολικό φορτίο είναι

$$\begin{aligned} Q_{\text{ολ}} &= \int dq = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0(1 - r/R)dr = 4\pi \rho_0 \int_0^R (r^2 - r^3/R)dr = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right]_0^R = \\ &= 4\pi \rho_0 \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R} \right] = 4\pi \rho_0 \frac{R^3}{12} = 4\pi \frac{3Q}{\pi R^3} \frac{R^3}{12} = Q \end{aligned}$$

Για $r \geq R$ θεωρούμε γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r . Έχουμε

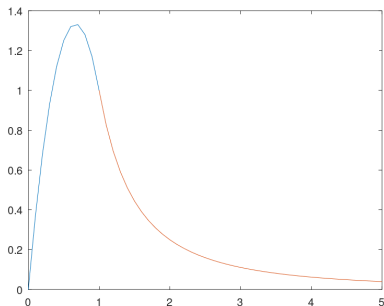
$$\Phi_E = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{εγ}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

σαν σημειακού φορτίου. Για $r \leq R$

$$\begin{aligned} Q_{\text{εγ}} &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0(1 - r/R)dr = \dots = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right] = 4\pi \rho_0 r^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right] = \\ &= 4\pi r^3 \frac{3Q}{\pi R^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right] = 12Q \frac{r^3}{R^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right] = Q \frac{r^3}{R^3} \left[4 - \frac{3r}{R} \right] \end{aligned}$$

Επομένως

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{εγ}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \left[4 - \frac{3r}{R} \right] \Rightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[4 - \frac{3r}{R} \right]$$



```
>> r=0:0.1:1;  
>> y=r.*(4-3.*r);  
>> plot(r,y)  
>> r2=1:0.1:5;  
>> y2=1./(r2.^2);  
>> plot(r2,y2)  
>> plot(r,y,r2,y2)
```

Μέγιστο. $dE/dr = 0$.

$$\frac{d}{dr} \left[4r - \frac{3r^2}{R} \right] = 0 \Rightarrow r = 2R/3 \quad \text{και} \quad E_{\max} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 R^2}$$