Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 04

Α. Δροσόπουλος

20-10-2023

Outline

Topic

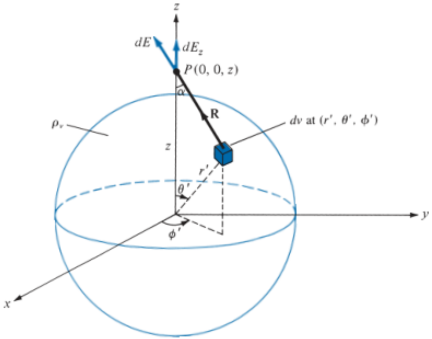
1. Παραδείγματα

2. Ροή και νόμος Gauss

Φορτισμένη σφαίρα

Έστω σφαίρα ακτίνας a γεμάτη με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ_V. Θέλουμε το πεδίο εκτός της σφαίρας. Το στοιχειώδες φορτίο dQ που αντιστοιχεί στον στοιχειώδη όγκο dV στο σημείο (r', θ', ϕ') είναι

$$dQ = \rho_V \, dV \Rightarrow Q = \int_V \rho_V \, dV = \rho_V \int_V dV = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$



Σχήμα: Ηλεκτρικό πεδίο σφαιρικής κατανομής φορτίου στο χώρο

Φορτισμένη σφαίρα 2

και Q είναι το ολικό φορτίο της σφαίρας.

Το στοιχειώδες πεδίο εκτός της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο το υπολογίζουμε για το σημείο $P(0, 0, z)$

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{R}} = \frac{\rho_V\, dV}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$$

Λόγω συμμετρίας οι συνιστώσες E_x, E_y μηδενίζονται και μένει μόνο η συνιστώσα E_z.

$$E_z = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \int_V dE\cos\alpha = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\, dV}{R^2}$$

Από νόμο συνημιτόνου

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta' \Rightarrow \cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'}$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς θ' με σταθερά z, r' έχουμε

$$\sin\theta'\; d\theta' = \frac{RdR}{zr'}$$

Φορτισμένη σφαίρα 3

Καθώς το θ' μεταβάλλεται από 0 σε π, το R μεταβάλλεται από $(z-r')$ σε $(z+r')$ για P εκτός της σφαίρας. Οπότε

$$E_z = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\, dV}{R^2} = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\cos\alpha\, r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'\, dr'}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{RdR}{zr'} dr' \frac{z^2+R^2-r'^2}{2zR}\frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V 2\pi}{8\pi\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{RdR}{r'} dr' \frac{z^2+R^2-r'^2}{R}\frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'\, dR dr' \frac{z^2+R^2-r'^2}{R^2} =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1+\frac{z^2-r'^2}{R^2}\right] dRdr' =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a} r' \left[R-\frac{z^2-r'^2}{R}\right]_{R=z-r'}^{z+r'} dr' =$$

$$= \frac{\rho_V}{4\epsilon_0 z^2}\int_{r'=0}^{a} 4r'^2 dr' = \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Φορτισμένη σφαίρα 4

Οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Εφόσον

$$Q = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$$

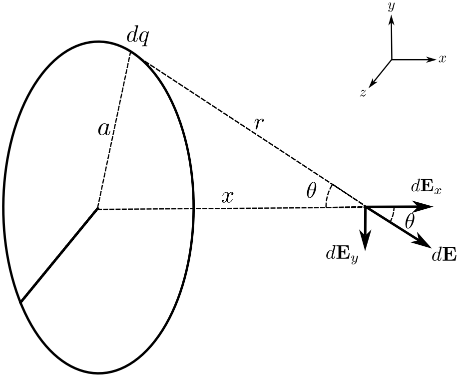
τότε

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_V \, 4\pi a^3}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_V \, a^3}{3\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Παράδειγμα 21.9 και 21.11 - σελ 772,773

Φορτίο q κατανέμεται ομοιόμορφα με μορφή λεπτού δακτυλίου ακτίνας a. Υπολογίστε το $\mathbf{E}$ στον άξονα του δακτυλίου. Σε ποια απόσταση από το κέντρο του δακτυλίου και επί του άξονά του η ένταση του πεδίου $\mathbf{E}$ γίνεται μέγιστη και πόση είναι αυτή;

Αντί για δακτύλιο θεωρείστε λεπτό δίσκο ακτίνας R στον οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα το φορτίο q και υπολογίστε το $\mathbf{E}$ στον άξονα του δίσκου.



Λύση 1

Επιλέγουμε άξονα δακτυλίου τον άξονα x. Στοιχειώδες φορτίο dq επί του δακτυλίου δημιουργεί στοιχειώδες πεδίο $d\mathbf{E}$ σε σημείο του άξονα. Αυτό αναλύεται σε συνιστώσα παράλληλη στον άξονα και συνιστώσα κάθετη. Το συμμετρικό ως προς το κέντρο του δακτυλίου στοιχειώδες φορτίο δημιουργεί και αυτό το δικό του πεδίο στο ίδιο σημείο. Η κάθετη συνιστώσα εξουδετερώνεται και μένει η παράλληλη με μέτρο

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας για όλα τα dq έχουμε

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{xq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

και το ολικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}}$$

Λύση 2

Για το σημείο x που έχουμε μέγιστο πεδίο, $dE_x/dx = 0$. Οπότε

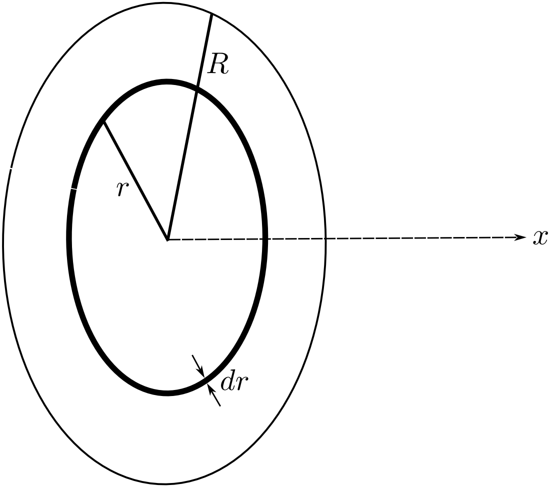
$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(x^2+a^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+a^2)^{1/2}}{(x^2+a^2)^3}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2+a^2-3x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

και

$$\mathbf{E}_{\mathrm{max}} = \pm\frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Λύση 3



Λύση 4

Για τον δίσκο χρησιμοποιούμε την προηγούμενη σχέση δακτυλίου και θεωρούμε ότι ο δίσκος αναλύεται σε δακτυλίους ακτίνας r όπου $0 \leq r \leq R$. Η πυκνότητα φορτίου όπως κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρο το δίσκο είναι

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2}$$

και ένας δακτύλιος με πάχος dr θα έχει εμβαδόν

$$dS = 2\pi r dr$$

και φορτίο

$$dq = \rho dS = 2\pi r \rho dr$$

Οπότε

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\; 2\pi r \rho dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{x\rho}{2\epsilon_0} \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

και

$$E_x = \frac{x\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{x\rho}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{\sqrt{x^2+r^2}} \right]_0^R = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right]$$

Επομένως

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right] \hat{\mathbf{x}}$$

Topic

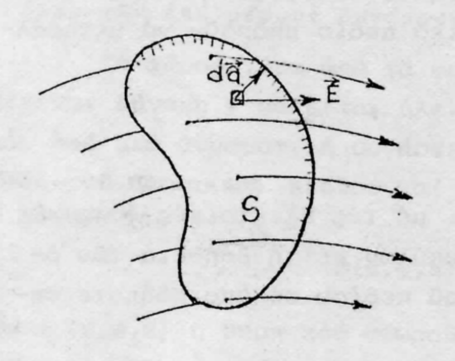
1. Παραδείγματα

2. Ροή και νόμος Gauss

Ροή ηλεκτρικού πεδίου. Νομος Gauss

Διαφάνειες PanPhysicsKef 22

Παράδειγμα



Σχήμα: Ηλεκτρική ροή από απλή επιφάνεια S

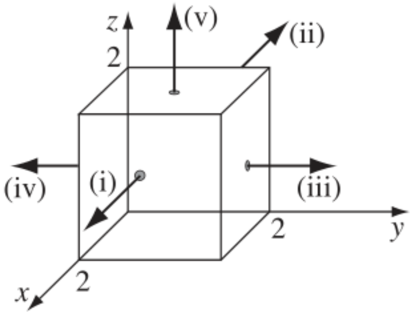
$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Παράδειγμα (2)

Υπολογίστε τη ροή του πεδίου

$$\mathbf{v} = 2xz\,\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\,\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\,\hat{\mathbf{z}}$$

που διέρχεται από τις επιφάνειες του κύβου του σχήματος όπου εξαιρούμε την κάτω πλευρά.



Παράδειγμα (3)

(i): $x = 2,\ d\mathbf{a} = dydz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 2xzdydz = 4zdydz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 4\int_0^2 dy \int_0^2 zdz = 16$$

(ii): $x = 0,\ d\mathbf{a} = -dydz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -2xzdydz = 0$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 0$$

(iii): $y = 2,\ d\mathbf{a} = dxdz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = (x+2)dxdz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 (x+2)dx \int_0^2 dz = 12$$

Παράδειγμα (4)

(iv): $y = 0,\ d\mathbf{a} = -dxdz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -(x+2)dxdz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -\int_0^2 (x+2)dx \int_0^2 dz = -12$$

(v): $z = 2,\ d\mathbf{a} = dxdy\,\hat{\mathbf{z}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = y(z^2-3)dxdy = ydxdy$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 dx \int_0^2 ydy = 4$$

Άρα, συνολική ροή:

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20$$

Νόμος Gauss

Ο νόμος του Gauss εκφράζει ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται μέσα από μια κλειστή επιφάνεια ισούται με το ολικό ηλεκτρικό φορτίο που εσωκλείεται από την επιφάνεια. Είναι θεμελιώδης (μια από τις εξισώσεις Maxwell). Με προσεκτική μελέτη βλέπουμε ότι βασίζεται

1. Στην εξάρτηση της δύναμης από το αντίστροφο του τετραγώνου της αποστάσεως των φορτίων.
2. Στην κεντρική φύση των δυνάμεων.
3. Στην αρχή της επαλληλίας.

Δηλ. νόμο Coulomb και αρχή επαλληλίας.

Ισχύει επίσης και στο πεδίο βαρύτητας.

Προσφέρει έναν απλούστερο τρόπο εύρεσης ηλεκτρικού πεδίου για συμμετρικές κατανομές φορτίων (π.χ. σφαιρική, κυλινδρική, επίπεδη). Ισχύει βέβαια και για μη συμμετρικές κατανομές μόνο που τότε η λύση δεν είναι απλή.

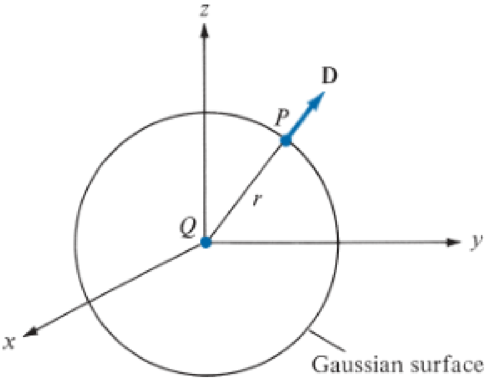
Εφαρμογές νόμου Gauss

Η διαδικασία εφαρμογής του νόμου Gauss είναι:

- Διαπιστώνουμε εάν υπάρχει συμμετρία.
- Κατασκευάζουμε κατάλληλη κλειστή επιφάνεια (επιφάνεια Gauss) όπου $\mathbf{E}$ είναι κάθετο ή εφαπτόμενο στην επιφάνεια. Εάν είναι κάθετο, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EdS$ και εάν είναι εφαπτόμενο $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
- Η επιφάνεια είναι αυθαίρετη αλλά πρέπει να έχει κάποια από τη συμμετρία της κατανομής φορτίου. Η επιλογή της εξαρτάται από τη δική μας διαίσθηση και εμπειρία.

Σημειακό φορτίο

Έστω σημειακό φορτίο στην αρχή των αξόνων κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Θέλουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ σε κάποιο σημείο στο χώρο. Είναι προφανές ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss μια κλειστή σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημειακό φορτίο.



Σημειακό φορτίο 2

Εφόσον $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει σταθερή τιμή στην επιφάνεια

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E\, 4\pi r^2$$

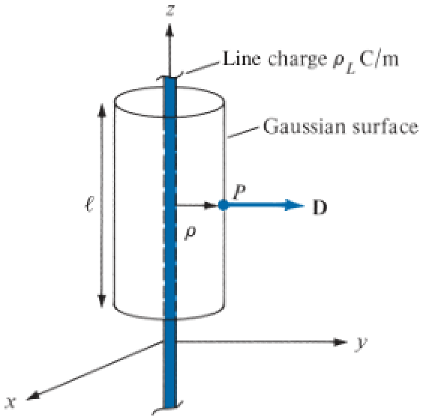
οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

η γνωστή μας σχέση.

Φορτισμένη ευθεία

Έστω ευθεία απείρου μήκους, στον άξονα z, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα ρ_L C/m. Θέλουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ στο σημείο P. Η συμμετρία εδώ είναι κυλινδρική και το ζητούμενο πεδίο είναι της μορφής $\mathbf{E} = E\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ με μηδενική z συνιστώσα. Οπότε:



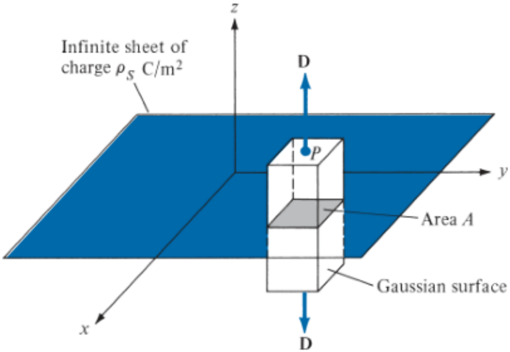
Φορτισμένη ευθεία 2

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho_L \ell}{\epsilon_0} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \int_S dS = E\, 2\pi\rho\ell \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Φορτισμένη επίπεδη επιφάνεια

Εστω επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων (επίπεδο $z = 0$) φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα ρ_S $\mathrm{C/m^2}$. Η επιφάνεια Gauss είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που «κόβει» τη φορτισμένη επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.



Φορτισμένη επίπεδη επιφάνεια 2

Το πεδίο $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και η μη μηδενική συνεισφορά είναι από την επάνω και κάτω πλευρά. Έχουμε

$$\rho_S \int_S dS = \rho_S A = Q \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} =$$

$$= E\left[\int_{\text{επάνω}} dS + \int_{\text{κάτω}} dS\right] = E[A + A] = 2AE$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Φορτισμένη σφαίρα

Έστω σφαίρα, ακτίνας a, φορτισμένη ομοιόμορφα με πυκνότητα $\rho_o\ \mathrm{C/m^3}$. Είναι προφανές ότι έχουμε σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss μια κλειστή σφαιρική επιφάνεια, με ίδιο κέντρο και ακτίνα $r \leq a$ ή $r \geq a$ (οι δυο δυνατές περιπτώσεις).

Φορτισμένη σφαίρα 2

Για $r \leq a$ το ολικό φορτίο που εσωκλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q = \int_V \rho_o dV = \rho_o \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r} r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\phi = \rho_o \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \rho_o \frac{4}{3\epsilon_0}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \rho_o\, \frac{r}{3\epsilon_0}\, \hat{\mathbf{r}} \quad \text{για} \quad r \leq a$$

Για $r \geq a$ το ολικό φορτίο που εσωκλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q = \int_V \rho_o dV = \rho_o \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\phi = \rho_o \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \rho_o \frac{4}{3\epsilon_0}\pi a^3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \rho_o\, \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2}\, \hat{\mathbf{r}} \quad \text{για} \quad r \geq a$$

Φορτισμένη σφαίρα 3