Ηλεκτρομαγνητισμός - Πρόοδος - Λύσεις

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

2022-12-16

1 Θέμα (2.5 μον.)

Η πυκνότητα φορτίου μιας μη ομογενούς αλλά σφαιρικά συμμετρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \dfrac{4r}{3R}\right) & \text{για} \quad r \leq R \\ 0 & \text{για} \quad r \geq R \end{cases}$$

όπου ρ_0 μια θετική σταθερά.

- Βρείτε το ολικό φορτίο που περιέχεται στην κατανομή φορτίου.
- Βρείτε έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές $r \leq R$ και $r \geq R$.
- Παραστήστε γραφικά το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση του r.
- Βρείτε την τιμή του r για την οποία το πεδίο είναι μέγιστο και βρείτε την τιμή του μέγιστου αυτού πεδίου.

Λύση

Ολικό φορτίο τρόπος 1 με σφαιρικούς φλοιούς ακτίνας r και πάχους dr όπου $dV = 4\pi r^2 dr$.

$$Q = \int \rho(r) dV = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr = 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(1 - \frac{4r}{3R}\right) r^2 dr = 4\pi\rho_0 \left[\int_0^R r^2 dr - \frac{4}{3R}\int_0^R r^3 dr\right] =$$

$$= 4\pi\rho_0 \left[\frac{R^3}{3} - \frac{4}{3R}\frac{R^4}{4}\right] = 0$$

Ολικό φορτίο τρόπος 2 με τυπολόγιο $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ που οδηγεί στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα.

$$Q = \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{4r}{3R}\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \rho_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{r=0}^R \left(1 - \frac{4r}{3R}\right) r^2 dr =$$

$$= 2\pi\rho_0 \cdot 2 \cdot \int_{r=0}^R \left(1 - \frac{4r}{3R}\right) r^2 dr = 4\pi\rho_0 \left[\frac{R^3}{3} - \frac{4}{3R}\frac{R^4}{4}\right] = 0$$

Για $r \geq R$, και νόμο Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$$

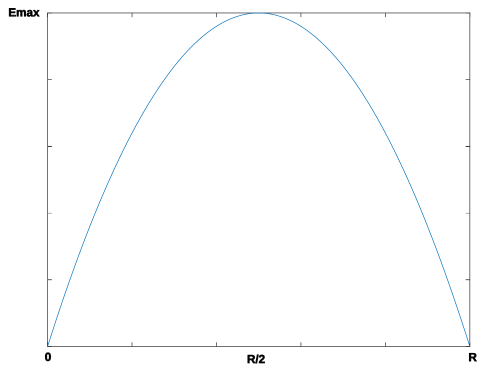
Για $r \leq R$, και νόμο Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^r \left[r'^2 - \frac{4}{3R} r'^3\right] dr' =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{4}{3R}\frac{r^4}{4}\right] = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} r^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{r}{3R}\right] \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r \left[\frac{1}{3} - \frac{r}{3R}\right] = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \left[1 - \frac{r}{R}\right]$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση του r είναι μια παραβολή με ρίζες 0 και R. Άρα το μέγιστο είναι προφανές ότι θα είναι για $r = R/2$. Πιο αυστηρά:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{2\rho_0 r}{3\epsilon_0 R} = 0 \Rightarrow r_{\text{max}} = \frac{R}{2} \qquad \text{και} \qquad E_{\text{max}} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{R}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{\rho_0 R}{12\epsilon_0}$$



2 Θέμα (2.5 μον.)

Αν δυο πυρήνες δευτερίου (φορτίο $+e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, μάζα $m = 3.34 \times 10^{-27}$ kg) πλησιάσουν αρκετά κοντά ο ένας στον άλλο, η έλξη της ισχυρής πυρηνικής δύναμης θα προκαλέσει τη σύντηξή τους σε έναν πυρήνα ^{3}He ελευθερώνοντας τεράστιες ποσότητες ενέργειας. Η εμβέλεια αυτής της δύναμης είναι περίπου 10^{-15} m. Οι πυρήνες δευτερίου κινούνται πολύ γρήγορα για να περιοριστούν από φυσικούς τοίχους και έτσι αυτό γίνεται με μαγνητικά πεδία.

- Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινούνται οι πυρήνες ώστε σε μια μετωπική σύγκρουση να πλησιάσουν αρκετά κοντά ο ένας στον άλλο και να υποστούν σύντηξη; (Υποθέστε ότι οι ταχύτητές τους είναι ίσες. Θεωρείστε ότι οι πυρήνες είναι σημειακά φορτία και υποθέστε ότι μια προσέγγιση σε απόσταση 10^{-15} m απαιτείται για σύντηξη.)
- Ποιας έντασης μαγνητικό πεδίο απαιτείται για να κάνει τους πυρήνες δευτερίου με αυτή τη ταχύτητα να κινούνται σε κύκλο ακτίνας 0.9 m;

Δίδεται $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m.

Λύση

Για την κίνηση των δυο πυρήνων μπορούμε να εφαρμόσουμε αρχή διατήρησης ενέργειας. Έχουμε αρχική και τελική θέση. Στην αρχική θέση, μακριά, μπορούμε να θεωρήσουμε δυναμική ενέργεια μηδέν για το σύστημα των δυο πυρήνων και ταυτόχρονα, ίση, σταθερή ταχύτητα και για τους δυο πυρήνες. Στη τελική θέση η ταχύτητα είναι μηδέν (σύντηξη) αλλά η δυναμική ενέργεια είναι η ενέργεια συστήματος δυο σημειακών φορτίων στη συγκεκριμένη απόσταση. Άρα:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow K_1 + 0 = 0 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 mr}} = 8.31 \times 10^6 \text{ m/s}$$

```
>> e=1.602e-19; m=3.34e-27; r=1e-15; e0=8.854e-12;
>> v=e*sqrt(1/(4*pi*e0*m*r))
v = 8.3103e+06
```

Η μαγνητική δύναμη σε φορτίο είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα και το πεδίο. Για φορτίο που εισέρχεται με κάποια σταθερή ταχύτητα σε περιοχή ομογενούς μαγνητικού πεδίου η μαγνητική δύναμη θα δράσει σαν κεντρομόλος και θα έχουμε:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR} = 0.192 \text{ T}$$

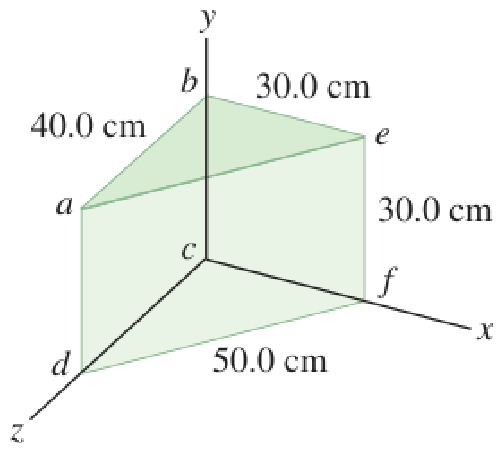
```
>> R=0.9;
>> B=m*v/(e*R)
B = 0.1925
```

όπου $R = 0.9$ m και θεωρήσαμε $\mathbf{v}$ και $\mathbf{B}$ κάθετα για να γίνει ο περιορισμός των φορτίων από το μαγνητικό πεδίο.

3 Θέμα (2.5 μον.)

Το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή του σχήματος είναι $\mathbf{B} = 0.785\ \hat{\mathbf{z}}$ T.

- Ποια είναι η μαγνητική ροή μέσα από την επιφάνεια *abcd* του σχήματος;
- Ποια είναι η μαγνητική ροή μέσα από την επιφάνεια *befc*;
- Ποια είναι η μαγνητική ροή μέσα από την επιφάνεια *aefd*;
- Ποια είναι η ολική μαγνητική ροή μέσα από τις πέντε επιφάνειες που περικλείουν τον σκιασμένο όγκο στο σχήμα;



Λύση

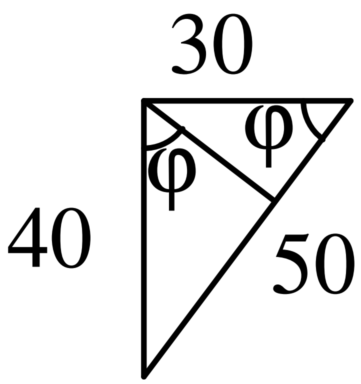
Η μαγνητική ροή ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ μέσα από μια επίπεδη επιφάνεια $\mathbf{A}$ είναι: $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Το διάνυσμα $\mathbf{A}$ έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας και φορά από μέσα προς τα έξω. Οπότε:

- Το επίπεδο *abcd* έχει διάνυσμα κάθετο με το πεδίο άρα $\Phi = 0$.
- Το επίπεδο *befc* έχει διάνυσμα $\mathbf{A} = -A\ \hat{\mathbf{z}}$ άρα $\Phi = -BA = -0.0706$ Wb.

```
>> A=(30e-2)^2; B=0.785; Phi = -B*A
Phi = -0.070650
```

- Το επίπεδο *aefd* έχει διάνυσμα $\mathbf{A}$ που σχηματίζει γωνία ϕ με το $\mathbf{B}$ όπου $\cos\phi = 30/50 = 3/5$ άρα $\Phi = BA\cos\phi = 0.0706$ Wb.

```
>> A=(30e-2)*(50e-2); B=0.785; Phi = B*A*(3/5)
Phi = 0.070650
```



Σχήμα 1: Όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

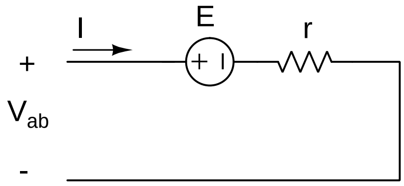
- Τα επάνω και κάτω επίπεδα έχουν και τα δυο διανύσματα κάθετα με το πεδίο άρα και εκεί $\Phi = 0$. Επομένως συνολικό άθροισμα βγαίνει μηδέν όπως άλλωστε περιμέναμε εφόσον η μαγνητική ροή μέσα από κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε μηδέν.

4 Θέμα (2.5 μον.)

Ένας ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος με τον ρότορά του και τα πηνία πεδίου συνδεδεμένα σε σειρά έχει εσωτερική αντίσταση 2.9 Ω. Όταν λειτουργεί με πλήρες φορτίο συνδεδεμένος σε μια γραμμή 220 V, η ΗΕΔ στον ρότορα είναι 200 V.

- Ποιο είναι το ρεύμα που παρέχεται από τη γραμμή στον κινητήρα;
- Με πόση ισχύ τροφοδοτείται ο κινητήρας;
- Ποια είναι η μηχανική ισχύς που αναπτύσσει ο κινητήρας;

Λύση



Έχουμε $V_{ab} = E + Ir \Rightarrow I = (V_{ab} - E)/r = 6.9$ A.

Η ηλεκτρική ισχύς που έρχεται από τη γραμμή στον κινητήρα είναι: $P_e = IV_{ab} = 1517.2$ W.

Η μηχανική ισχύς είναι η ηλεκτρική μείον τις απώλειες στην εσωτερική αντίσταση: $P_m = P_e - I^2 r = 1379.3$ W.

```
>> r=2.9; Vab=220; E=200;
>> I=(Vab-E)/r
I = 6.8966
>> Pe=I*Vab
Pe = 1517.2
>> Pm=Pe-I^2*r
Pm = 1379.3
```