Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 19

Α. Δροσόπουλος

11-01-2023

Outline

Topic

1. Εξισώσεις Maxwell

Εισαγωγικά

- Στατικά ηλεκτρικά πεδία. $\mathbf{E}(x, y, z)$. Στατικά φορτία δημιουργούν ηλεκτροστατικά πεδία.
- Στατικά μαγνητικά πεδία. $\mathbf{H}(x, y, z)$. Στατικά ρεύματα (συνεχή) - φορτία κινούμενα με σταθερή ταχύτητα δημιουργούν μαγνητοστατικά πεδία.
- Επιταχυνόμενα φορτία / εναλλασσόμενο ρεύμα δημιουργούν δυναμικά, χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία (ηλεκτρομαγνητικά κύματα).
- Τα πεδία $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ και $\mathbf{H}(x, y, z, t)$. Σε αντίθεση με τα στατικά, τα χρονικώς μεταβαλλόμενα πεδία εμπλέκονται μεταξύ τους. Αυτά ενδιαφέρουν στις περισσότερες εφαρμογές.

Νόμος Faraday

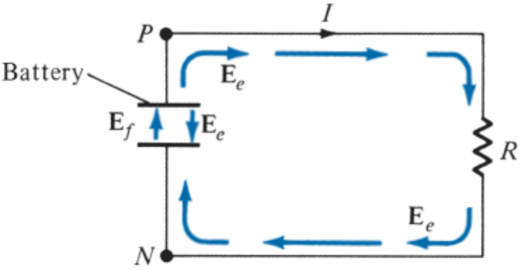
- Μετά τα πειράματα του Oersted ότι ένα συνεχές ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο (εδώ βασίστηκαν Ampere και Biot-Savart για τους νόμους τους) το ερώτημα τέθηκε εάν ένα μαγνητικό πεδίο μπορούσε να δημιουργήσει ηλεκτρικό ρεύμα. Περίπου 11 χρόνια μετά τον Oersted, το 1831, οι Faraday και Henry ανεκάλυψαν ότι ένα εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα.
- Η μεταβολή της μαγνητικής ροής σε κλειστό κύκλωμα δημιουργεί επαγωγική τάση στο κύκλωμα που με τη σειρά της προκαλεί ροή ρεύματος.

$$V_{\mathrm{emf}} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

Το αρνητικό πρόσημο (νόμος Lentz) απλώς σημαίνει ότι η επαγωγική τάση αντιτίθεται στη ροή που την προκαλεί, δηλ. το επαγωγικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο αντίθετο από το αρχικό.

Νόμος Faraday (συνέχεια 1)

- Ηλεκτρικό πεδίο είναι ο χώρος όπου εξασκούνται δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτία. Στην ηλεκτροστατική οι γραμμές ηλεκτρικής ροής πηγάζουν από και καταλήγουν σε φορτία. Με τον νόμο Faraday βλέπουμε ότι έχουμε δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου και επαγωγικά. Πολλά συστήματα μετατροπής ενέργειας πέφτουν σε αυτή τη κατηγορία.



- Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος.

Νόμος Faraday (συνέχεια 2)

- Οι ηλεκτροχημικές αντιδράσεις δημιουργούν επαγωγικό πεδίο $\mathbf{E}_f$ μέσα στη μπαταρία. Τα φορτία που συσσωρεύονται στους ακροδέκτες δημιουργούν ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}_e$ μέσα και έξω στη μπαταρία, αντιθέτου φοράς μέσα. Το $\mathbf{E}_f$ είναι μηδενικό εκτός της μπαταρίας και αντίθετο του $\mathbf{E}_e$ εντός. Το ολικό πεδίο είναι $\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_e$. Ολοκληρώνοντας στο κύκλωμα, η τάση είναι

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} + 0 = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l}$$

  όπου η κυκλοφορία του $\mathbf{E}_e$ είναι μηδενική εφόσον είναι συντηρητικό.
- Μέσα στη μπαταρία

$$V_{\text{emf}} = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = -\int_N^P \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = IR$$

Συμπεράσματα/παρατηρήσεις

- Ένα ηλεκτροστατικό πεδίο δεν μπορεί να υποστηρίξει συνεχές ρεύμα σε κλειστό κύκλωμα γιατί η κυκλοφορία του είναι μηδέν.
- Το επαγωγικό πεδίο $\mathbf{E}_f$ είναι μη-συντηρητικό.
- Ηλεκτρική τάση και δυναμικό είναι μη ισοδύναμες έννοιες σε μη στατικές συνθήκες.

Νόμος Faraday (συνέχεια 3)

Έχουμε

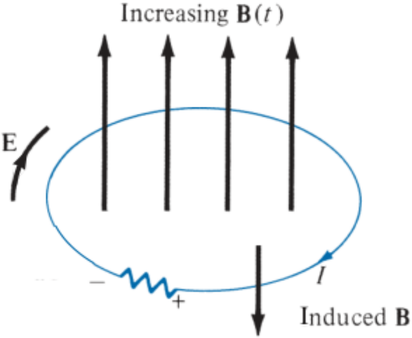
$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου S η επιφάνεια που σχηματίζει το κύκλωμα με σύνορο την κλειστή διαδρομή L των αγωγών του. Μεταβολή ροής έχουμε με τρεις τρόπους:

1. Στατικό βρόχο σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.
2. Κινούμενο βρόχο σε στατικό $\mathbf{B}$.
3. Κινούμενο βρόχο σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.

Περίπτωση 1

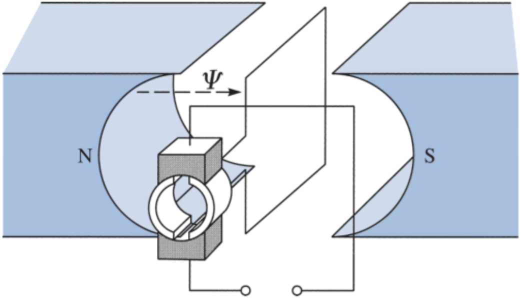
Στατικός βρόχος σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.



$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$$

Περίπτωση 2

Κινούμενος βρόχος σε στατικό $\mathbf{B}$.



Περίπτωση 2 (συνέχεια 1)

Από τη δύναμη σε κινούμενα φορτία μέσα σε μαγνητικό πεδίο ορίζουμε ηλεκτρικό πεδίο κίνησης $\mathbf{E}_m$ ως εξής

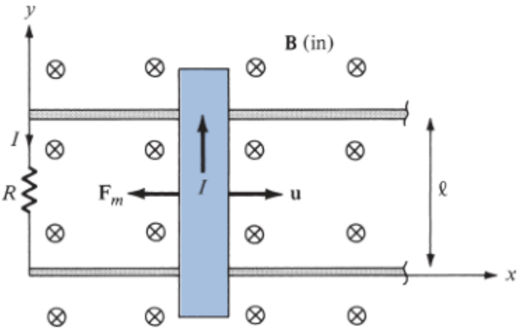
$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{Q} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

ΗΕΔ κίνησης

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Περίπτωση 2 (συνέχεια 2)

Παρόμοια κατάσταση έχουμε και με ένα μεταβλητό πλαίσιο.



$$\mathbf{F}_m = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} \Rightarrow F_m = I\ell B \quad \text{και} \quad V_{\text{emf}} = uB\ell$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E}_m = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Περίπτωση 3

Κινούμενος βρόχος σε χρονικά μεταβαλλόμενο $\mathbf{B}$.

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Ρεύμα μετατόπισης

Μεταβολή στροβιλισμού μαγνητικού πεδίου σε χρονικά μεταβαλλόμενες συνθήκες.

Για στατικές συνθήκες $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

Απόκλιση στροβιλισμού για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο είναι μηδέν.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Η εξίσωση συνεχείας όμως απαιτεί

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0$$

Τροποποιούμε τον στροβιλισμό με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Ρεύμα μετατόπισης (συνέχεια 1)

Άρα

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

και τελικά η πλήρη εξίσωση Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

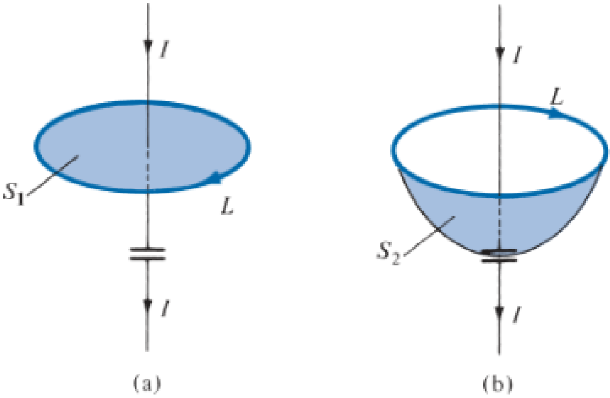
όπου $\mathbf{J}_d$ η πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης και $\mathbf{J}$ η πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας.

Ο όρος αυτός εισήχθη από τον Maxwell και προβλέπει την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κάτι που πειραματικά επαληθεύτηκε αρκετά χρόνια αργότερα (Hertz).

Το ρεύμα μετατόπισης είναι

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Ρεύμα μετατόπισης (συνέχεια 2)



Σχήμα: Εξήγηση για ρεύμα μετατόπισης σε πυκνωτή

Τελική μορφή εξισώσεων Maxwell

Differential Form	Integral Form	Remarks
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv$	Gauss's law
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Nonexistence of isolated magnetic charge*
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	Faraday's law
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$	Ampère's circuit law

*This is also referred to as Gauss's law for magnetic fields.

Τελική μορφή εξισώσεων Maxwell (συνέχεια 1)

Εξίσωση Lorentz

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Καταστατικές εξισώσεις (γραμμικότητα, ομογένεια, ισοτροπία)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \rho_v \mathbf{u}$$

Τελική μορφή εξισώσεων Maxwell (συνέχεια 2)

Οριακές συνθήκες

$$
\begin{array}{ccc}
E_{1t} - E_{2t} = 0 & \text{ή} & (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \\
H_{1t} - H_{2t} = K & \text{ή} & (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K} \\
D_{1n} - D_{2n} = \rho_s & \text{ή} & (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_s \\
B_{1n} - B_{2n} = 0 & \text{ή} & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0
\end{array}
$$

Για ιδανικό αγωγό ($\sigma = \infty$)

$$\mathbf{E} = 0,\ \mathbf{H} = 0,\ \mathbf{J} = 0 \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B}_n = 0,\ \mathbf{E}_t = 0$$

Για ιδανικό διηλεκτρικό ($\sigma = 0$) το μόνο που αλλάζει στα παραπάνω είναι ότι $\mathbf{K} = 0$.

Χρονικώς μεταβαλλόμενα δυναμικά

Για στατικά πεδία έχουμε

$$V = \int_v \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \qquad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu \mathbf{J} dv}{4\pi R}$$

Για χρονικώς μεταβαλλόμενα πεδία

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Χρονικώς μεταβαλλόμενα δυναμικά (συνέχεια 1)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) =$$

$$= \mu \mathbf{J} - \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Με χρήση της ταυτότητας $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, έχουμε

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε στροβιλισμό και απόκλιση. Τον στροβιλισμό τον ορίσαμε ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Εάν ορίσουμε την απόκλιση (συνθήκη Lorentz)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

Χρονικώς μεταβαλλόμενα δυναμικά (συνέχεια 2)

μπορούμε να αποσυνδέσουμε τα δυο δυναμικά σε δυο κυματικές εξισώσεις

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad \text{και} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}$$

και οι λύσεις (καθυστερημένα δυναμικά - retarded potentials)

$$V = \int_v \frac{[\rho_v]dv}{4\pi\epsilon R} \qquad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu[\mathbf{J}]dv}{4\pi R}$$

όπου ο χρόνος t στα μεγέθη $[\rho_v]$ και $[\mathbf{J}]$ είναι ο καθυστερημένος χρόνος (retarded time) t'

$$t' = t - \frac{R}{u}$$

όπου $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ είναι η απόσταση μεταξύ πηγής $\mathbf{r}'$ και πεδίου $\mathbf{r}$ και η ταχύτητα μετάδοσης

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Η παραπάνω ταχύτητα στο κενό είναι η γνωστή μας ταχύτητα του φωτός.

Αρμονικά πεδία

Ωραίες, καλές οι παραπάνω εξισώσεις αλλά πολύπλοκες και χρονοβόρες στην επίλυση. Μπορούμε να κάνουμε κάποια απλοποίηση;

Ναι. Υπόθεση ότι τα πεδία είναι αρμονικά. Πάμε σε φάσορες. Εάν ένα διάνυσμα $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ είναι αρμονικό στο χρόνο, τότε

$$\mathbf{A}(x,y,z,t) = \Re e\{\mathbf{A}(x,y,z)e^{j\omega t}\}$$

π.χ. για το πεδίο $\mathbf{A}(x,t) = A_0 \cos(\omega t - \beta x)\,\hat{\mathbf{y}}$ γράφουμε

$$\mathbf{A}(x,t) = \Re e\{A_0 e^{-j\beta x} e^{j\omega t}\}\,\hat{\mathbf{y}}$$

και ο φάσορας είναι

$$\mathbf{A}(x) = A_0 e^{-j\beta x}$$

Ισχύουν επίσης (όπως στη ανάλυση κυκλωμάτων)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \qquad \int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$$

Αρμονικά πεδία (συνέχεια 1)

Point Form	Integral Form
$\nabla \cdot \mathbf{D}_s = \rho_{vs}$	$\oint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{vs}\, dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B}_s = 0$	$\oint \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{B}_s$	$\oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s$	$\oint \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s) \cdot d\mathbf{S}$

Εξισώσεις Maxwell

Domain	Integral Form	Differential Form	Name
Time-Domain	$Q_e(t)=\oiint_S \vec{D}(t)\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v(t)\,dv$	$\nabla\bullet\vec{D}(t)=\rho_v(t)$	Gauss' Law
Time-Domain	$\oiint_S \vec{B}(t)\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}(t)=0$	No Magnetic Charge
Time-Domain	$V_{emf}(t)=\oint_L \vec{E}(t)\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}(t)=-\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}$	Faraday's Law
Time-Domain	$I(t)=\oint_L \vec{H}(t)\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}(t)=\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}$	Ampere's Circuit Law
Time-Domain	$\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-\frac{\partial Q_e}{\partial t}$	$\nabla\bullet\vec{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$	Continuity of Current
Time-Domain	$\vec{D}(t)=\left[\varepsilon(t)\right]*\vec{E}(t)$ $\vec{B}(t)=\left[\mu(t)\right]*\vec{H}(t)$	Electric Response Magnetic Response	Constitutive Relations
Frequency-Domain	$Q_e=\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v\,dv$	$\nabla\bullet\vec{D}=\rho_v$	Gauss' Law
Frequency-Domain	$\oiint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}=0$	No Magnetic Charge
Frequency-Domain	$V_{emf}=\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[j\omega\vec{B}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$	Faraday's Law
Frequency-Domain	$I=\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}+j\omega\vec{D}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$	Ampere's Circuit Law
Frequency-Domain	$\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-j\omega Q_e$	$\nabla\bullet\vec{J}=-j\omega\rho_v$	Continuity of Current
Frequency-Domain	$\vec{D}=[\varepsilon]\vec{E}$ $\vec{B}=[\mu]\vec{H}$	Electric Response Magnetic Response	Constitutive Relations

Parameter Definitions

Electric Field Intensity, E (V/m)

Electric Flux Density, D (C/m^2)

Magnetic Field Intensity, H (A/m)

Magnetic Flux Density, B (Wb/m^2)

Electric Current Density, J (A/m^2)

Volume Charge Density, ρ_v (C/m^3)

Permittivity, ε (F/m)

Permeability, μ (H/m)

Electrical Conductivity, σ (1/Ω·m)

Constants

Permittivity: $[\varepsilon]=\varepsilon_0[\varepsilon_r]$

$\varepsilon_0=8.8541878176\times10^{-12}$ (F/m)

Permeability: $[\mu]=\mu_0[\mu_r]$

$\mu_0\approx 4\pi\times10^{-7}$ (H/m)

$\mu_0=1.2566370614\times10^{-6}$ (H/m)

Impedance: $\eta_0\approx120\pi$ (Ω)

$\eta_0=376.73031346177$ (Ω)

Speed of Light: $c_0=299,792,458$ (m/s)

Lorentz Force Law

$\vec{F}=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$

Sign Convention

e^{-jkz} For propagation in the +z direction.

Παράδειγμα 1

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στο κενό δίδονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{E} = \frac{50}{\rho}\cos(\omega t + \beta z)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\ \mathrm{V/m} \qquad \mathbf{H} = \frac{H_0}{\rho}\cos(\omega t + \beta z)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\ \mathrm{A/m}$$

όπου $\omega = 10^6\ \mathrm{rad/s}$. Εκφράστε τις σχέσεις σε μορφή φάσορα και προσδιορίστε τις σταθερές H_0 και β έτσι ώστε τα πεδία να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

Η σχέση των δοθέντων πεδίων με τους αντίστοιχους φάσορες είναι:

$$\mathbf{E}(z,t) = \Re e\{\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}\}, \qquad \mathbf{H}(z,t) = \Re e\{\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{E}(z) = \frac{50}{\rho}e^{j\beta z}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \mathbf{H}(z) = \frac{H_0}{\rho}e^{j\beta z}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Στο κενό, $\rho_v = 0$, $\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ και οι εξισώσεις Maxwell γίνονται:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

Αντικαθιστώντας τους φάσορες του προβλήματος στις παραπάνω εξισώσεις Maxwell έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\rho) = 0$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια 2)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \right) = \frac{\partial H_\rho}{\partial z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{j\beta H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Πρέπει

$$\frac{j\beta H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = j\omega\epsilon_0 \frac{50}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \Rightarrow \beta H_0 = 50\omega\epsilon_0$$

Ομοίως

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(\frac{50}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) = -\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} = -j\beta \frac{50}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} =$$

$$= -j\omega\mu_0 \mathbf{H} = -j\omega\mu_0 \frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \Rightarrow 50\beta = \omega\mu_0 H_0$$

$$H_0 = \pm 50 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \pm 0.1327 \text{ A/m} \qquad \text{και} \qquad \beta = \frac{50\omega\epsilon_0}{H_0} = \pm 3.336 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

Παράδειγμα 2

Σε μέσο με παραμέτρους $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$ και $\epsilon = 4\epsilon_0$ και πεδίο $\mathbf{E} = 20\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{y}}$ V/m όπου $\omega = 10^8$ rad/s, προσδιορίστε β και $\mathbf{H}$.

Μέθοδος 1 (πεδίο χρόνου)

Από νόμο Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ είμαστε εντάξει ($\rho_v = 0$).

Από νόμο Faraday βγάζουμε έκφραση για το $\mathbf{H}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu}\int (\nabla \times \mathbf{E})dt$$

Από τη σχέση που δίδεται

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{E_y}{\partial z}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{E_y}{\partial x}\,\hat{\mathbf{z}} = 20\beta\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu}\int \cos(\omega t - \beta z)dt\ \hat{\mathbf{x}} = -\frac{20\beta}{\mu\omega}\sin(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{x}}$$

Από εδώ φαίνεται ότι ικανοποιείται και ο νόμος Gauss για τα μαγνητικά πεδία

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

Από το νόμο Ampere και για $\sigma = 0$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\int (\nabla \times \mathbf{H})dt$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z}\ \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\ \hat{\mathbf{z}} = \frac{20\beta^2}{\mu\omega}\cos(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{20\beta^2}{\mu\epsilon\omega}\int \cos(\omega t - \beta z)dt\ \hat{\mathbf{y}} = \frac{20\beta^2}{\mu\epsilon\omega^2}\sin(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{y}}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Συγκρίνοντας με το δοθέν $\mathbf{E}$ έχουμε

$$\frac{20\beta^2}{\mu\epsilon\omega^2} = 20 \Rightarrow \beta = \pm\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \pm 2\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \pm 0.6671 \text{ rad/m}$$

Κρατάμε τη θετική τιμή για ισοτροπικά υλικά. Οπότε

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu\omega}\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}} = -0.1062\sin(\omega t - 0.6671z)\,\hat{\mathbf{x}} \text{ A/m}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 3)

Μέθοδος 2 (πεδίο συχνοτήτων)

$$\mathbf{E}(z,t) = \Im m\{\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \mathbf{E}(z) = 20e^{-j\beta z}\,\hat{\mathbf{y}}$$

και πάλι

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{(-j\omega\mu)} = \frac{1}{(-j\omega\mu)}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{\mathbf{x}}\right) = -\frac{20\beta}{\omega\mu}e^{-j\beta z}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Ικανοποιείται και η $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$.

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{\partial H_x}{\partial z}\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{20\beta^2 e^{-j\beta z}}{\omega^2\mu\epsilon}\,\hat{\mathbf{y}}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια 4)

που σημαίνει ότι όπως και πριν

$$20 = \frac{20\beta^2}{\omega^2 \mu \epsilon} \Rightarrow \beta = 0.6671 \text{ rad/m}$$

Και για το $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\omega\mu} e^{-j\beta z}\, \hat{\mathbf{x}} = -0.1062 e^{-j\beta z}\, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H} = \Im m\{-0.1062 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}\, \hat{\mathbf{x}} = -0.1062 \sin(\omega t - \beta z)\, \hat{\mathbf{x}} \text{ A/m}$$

Δυο ενδιαφέροντα video

Και δυο ενδιαφέροντα video από το youtube

Maxwell's laws

Maxwell's equations