Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 17

Α. Δροσόπουλος

14-12-2022

Outline

1. Μαγνητική επαγωγή
2. Περίληψη
3. Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά

Topic

1. Μαγνητική επαγωγή
2. Περίληψη
3. Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά

Μαγνητική επαγωγή - Πυκνότητα μαγνητικής ροής

Η πυκνότητα μαγνητικής ροής $\mathbf{B}$ είναι παρόμοια με την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής $\mathbf{D}$. Όπως έχουμε $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ στο κενό ή αέρα, έτσι έχουμε και

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού με τιμή $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$.

Η μαγνητική ροή μέσα από μια επιφάνεια S είναι

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου Φ η μαγνητική ροή σε Weber (Wb) και η πυκνότητα μαγνητικής ροής σε $\mathrm{Wb/m^2}$ ή Tesla (T).

- Οι γραμμές μαγνητικής ροής είναι οι γραμμές όπου το $\mathbf{B}$ είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο τους.
- Είναι αυτές όπου προσανατολίζονται οι βελόνες μιας μαγνητικής πυξίδας.
- Κάθε γραμμή είναι κλειστή χωρίς αρχή και τέλος και δεν μπλέκονται μεταξύ τους.
- Εφόσον δεν υπάρχουν μεμονωμένα μαγνητικά φορτία (μονόπολα) έχουμε πάντα

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Μαγνητική επαγωγή (συνέχεια 1)

και από το θεώρημα απόκλισης

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

μια από τις εξισώσεις Maxwell

Μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό

Δυο ταυτότητες που ισχύουν για οποιοδήποτε βαθμωτό πεδίο V και διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}$ είναι:

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Επομένως από τη μαγνητοστατική εξίσωση Maxwell όπου $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, εάν $\mathbf{J} = 0$ έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (-\nabla V_m) = 0$$

που σημαίνει μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό V_m με

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \qquad \text{για περιοχή όπου} \qquad \mathbf{J} = 0$$

σε αναλογία με το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό $\mathbf{E} = -\nabla V$. Που σημαίνει και εδώ ότι έχουμε αντίστοιχη εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad \text{για} \qquad \mathbf{J} = 0$$

Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό

Από την εξίσωση Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ και την δεύτερη ταυτότητα μπορούμε να ορίσουμε ένα μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ σε $\mathrm{Wb/m}$ ως

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Σε αναλογία με το ηλεκτρικό δυναμικό

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

μπορούμε και εδώ να ορίσουμε

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi R} \quad \mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R} \quad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R}$$

για γραμμική, επιφανειακή και χωρική κατανομή ρεύματος αντίστοιχα.

Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό (συνέχεια 1)

Από τον ορισμό της μαγνητικής ροής και το θεώρημα Stokes

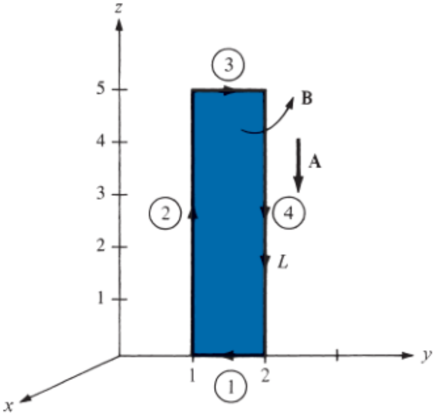
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού μαγνητικής ροής.

Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο επίλυσης ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, ιδίως στην περιοχή με ακτινοβολίες και κεραίες.

Άσκηση

Δοθέντος του μαγνητικού δυναμικού $\mathbf{A} = -\rho^2/4\,\hat{\mathbf{z}}$ Wb/m υπολογίστε την μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια $\phi = \pi/2$, $1 \le \rho \le 2$ m, $0 \le z \le 5$ m.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Μέθοδος 1

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\rho}{2}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad d\mathbf{S} = d\rho dz\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{5}\int_{\rho=1}^{2} \rho d\rho dz = \frac{5}{4}\rho^2\Big|_1^2 = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ Wb}$$

Μέθοδος 2

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$$

$$\Phi_1 = \Phi_3 = 0 \qquad \text{εφόσον } \mathbf{A} \text{ έχει μόνο } z \text{ συνιστώσα}$$

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_4 = -\frac{1}{4}\int_0^5 dz - \frac{4}{4}\int_5^0 dz = -\frac{5}{4} + 5 = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ Wb}$$

Προσοχή εδώ στην κατεύθυνση ολοκλήρωσης.

Topic

1 Μαγνητική επαγωγή

2 Περίληψη

3 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά

Περίληψη

- Νόμος Biot-Savart αντίστοιχος του Coulomb όπου το μαγνητικό πεδίο $d\mathbf{H}$ στο $\mathbf{r}$ που οφείλεται στο στοιχειώδες ρεύμα $I d\mathbf{l}$ στο $\mathbf{r}'$ είναι

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad \text{σε A/m}$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ και $R = |\mathbf{R}|$. Για επιφανειακά ρεύματα ή ρεύματα χώρου αντικαθιστούμε το $I d\mathbf{l}$ με $\mathbf{K} dS$ ή $\mathbf{J} dv$ αντίστοιχα.

- Νόμος Ampere παρόμοιος με νόμο Gauss που ορίζει την κυκλοφορία του $\mathbf{H}$ σε έναν κλειστό βρόγχο να ισούται με το ρεύμα που εσωκλείεται από το βρόγχο.

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{ή} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

η τρίτη εξίσωση Maxwell. Για συμμετρικά ρεύματα όπου μπορούμε να βρούμε μια διαδρομή Ampere για την οποία $\mathbf{H} = H_\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ είναι σταθερή, το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται εύκολα από

$$H_\phi \oint_L d\ell = I_{\text{enc}} \Rightarrow H_\phi = \frac{I_{\text{enc}}}{\ell}$$

Περίληψη (συνέχεια 1)

- Η μαγνητική ροή μέσω μιας επιφάνειας S είναι

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{σε Wb}$$

όπου $\mathbf{B}$ η πυκνότητα μαγνητικής ροής σε $\mathrm{Wb/m^2}$. Στο κενό

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

- Εφόσον δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα η ολική μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν.

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{η τέταρτη εξίσωση Maxwell}$$

Περίληψη (συνέχεια 2)

- Οι εξισώσεις Maxwell για στατικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

- Το μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό ορίζεται σαν

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \qquad \text{για} \qquad \mathbf{J} = 0$$

και το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό σαν

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \text{για} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ (Coulomb gauge)}$$

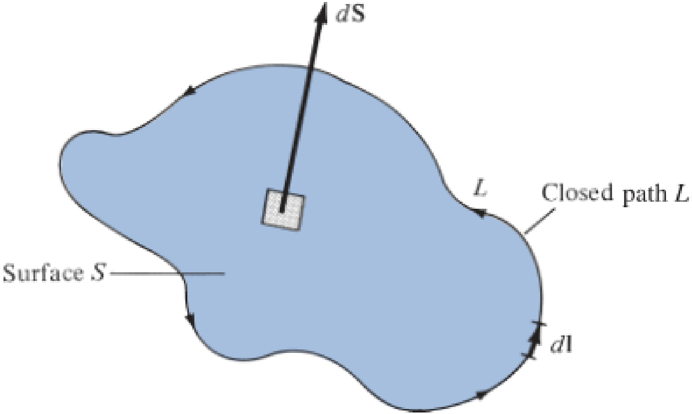
η τελευταία σχέση από $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Με αυτόν τον ορισμό του $\mathbf{A}$ η μαγνητική ροή μέσω μιας επιφάνειας S είναι

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου L είναι μια κλειστή διαδρομή που ορίζει την επιφάνεια S.

Περίληψη (συνέχεια 3)



Σχήμα: Walter Lec15, 3:50-7:30

Περίληψη (συνέχεια 4)

- Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό στο $\mathbf{r}$ που οφείλεται στο στοιχειώδες ρεύμα $Id\mathbf{l}$ στο $\mathbf{r}'$ είναι
$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi R} \qquad \text{όπου} \qquad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$
- Υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ ηλεκτροστατικών και μαγνητοστατικών πεδίων όπως φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Περίληψη (συνέχεια 5)

Term	Electric	Magnetic
Basic laws	$\mathbf{F} = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R$	$d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_o I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$
	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$
Force law	$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$
Source element	dQ	$dQ\mathbf{u} = I d\mathbf{l}$
Field intensity	$E = \dfrac{V}{\ell}\,(\text{V/m})$	$H = \dfrac{I}{\ell}\,(\text{A/m})$
Flux density	$D = \dfrac{\psi}{S}\,(\text{C/m}^2)$	$B = \dfrac{\psi}{S}\,(\text{Wb/m}^2)$
Relationship between fields	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Potentials	$\mathbf{E} = -\nabla V$	$\mathbf{H} = -\nabla V_m \; (\mathbf{J} = 0)$
	$V = \displaystyle\int_L \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon R}$	$\mathbf{A} = \displaystyle\int_L \frac{\mu\, I\, d\ell}{4\pi R}$
Flux	$\psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
	$\psi = Q = CV$	$\psi = LI$
	$I = C\dfrac{dV}{dt}$	$V = L\dfrac{dI}{dt}$
Energy density	$w_E = \dfrac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_m = \dfrac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
Poisson's equation	$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$

Topic

1 Μαγνητική επαγωγή

2 Περίληψη

3 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά

Μαγνητικές δυνάμεις

Υπάρχουν τρεις τρόποι που καταλαβαίνουμε δυνάμεις από μαγνητικά πεδία.

1. Σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται σε πεδίο $\mathbf{B}$.
2. Σε στοιχειώδη ρεύματα που βρίσκονται σε εξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}$.
3. Μεταξύ δυο ρευμάτων.

Δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτίο

Από νόμο Coulomb γνωρίζουμε ότι η δύναμη σε ηλεκτρικό φορτίο q (κινούμενο ή μη) που βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

Αντιθέτως, ένα μαγνητικό πεδίο εξασκεί δύναμη μόνο σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία. Πειραματικά, για κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο q με ταχύτητα $\mathbf{u}$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, έχουμε

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

- Η $\mathbf{F}_e$ είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα και μπορεί να εκτελέσει έργο στο φορτίο και να αλλάξει την κινητική του ενέργεια.
- Αντιθέτως, η $\mathbf{F}_m$ εξαρτάται από την ταχύτητα του φορτίου και είναι κάθετη σε αυτή. Επομένως, δεν μπορεί να εκτελέσει έργο στο φορτίο και δεν αλλάζει την κινητική του ενέργεια.
- Εν γένει $F_m \ll F_e$ εκτός αν η ταχύτητα είναι υψηλή.

Δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτία (συνέχεια 1)

Επομένως, για κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο σε χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο η ολική δύναμη στο φορτίο είναι

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

γνωστή σαν εξίσωση Lorentz. Σύνδεση με τη κλασσική μηχανική και το νόμο Newton

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

επιτρέπει την κινηματική μελέτη φορτισμένων σωματιδίων. Τονίζεται πάλι ότι μεταφορά ενέργειας γίνεται μόνο μέσω του ηλεκτρικού πεδίου.

Δυνάμεις σε ρεύματα

$$I d\mathbf{l} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} = dq\mathbf{u}$$

για στοιχειώδες ρεύμα που οφείλεται σε στοιχειώδες φορτίο κινούμενο με μέση ταχύτητα $\mathbf{u}$. Οπότε

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{u} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

η δύναμη εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ σε στοιχειώδες ρεύμα $I d\mathbf{l}$. Εάν το ρεύμα κινείται σε κάποιο κλειστό βρόχο κυκλώματος (κλειστή διαδρομή L) η ολική δύναμη είναι

$$\mathbf{F} = \oint_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

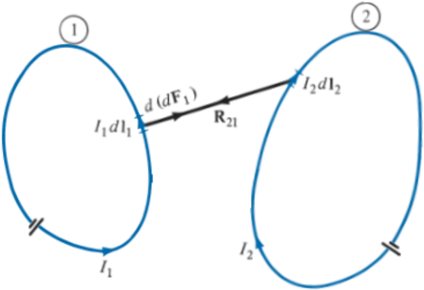
Γενικεύοντας για ρεύματα επιφάνειας και χώρου

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} dS \times \mathbf{B} \qquad \mathbf{F} = \int_v \mathbf{J} dv \times \mathbf{B}$$

Το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ ορίζεται σαν τη δύναμη ανά μονάδα στοιχειώδους ρεύματος, ή, σαν το διάνυσμα που ικανοποιεί την $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

Δυνάμεις μεταξύ ρευμάτων

Εξετάζουμε τη δύναμη μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων $I_1 d\mathbf{l}_1$ και $I_2 d\mathbf{l}_2$. Η δύναμη στο 1 από το πεδίο του 2 είναι



$$d(d\mathbf{F}_1) = I_1 d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2 \quad d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2 d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{R}}_{21}}{4\pi R_{21}^2} \quad d(d\mathbf{F}_1) = \frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{R}}_{21})}{4\pi R_{21}^2}$$

Δυνάμεις μεταξύ ρευμάτων (συνέχεια 1)

Η τελευταία σχέση εκφράζει τη δύναμη μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων και είναι ανάλογος του νόμου Coulomb για δύναμη μεταξύ δυο στασίμων φορτίων. Για την ολική δύναμη στον βρόχο 1 που οφείλεται στο ρεύμα του βρόχου 2 έχουμε

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{R}}_{21})}{R_{21}^2}$$

Ισχύει $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ άρα ικανοποιείται και ο τρίτος νόμος του Newton (δράση ίση με αντίδραση). Σημειώνεται ότι αυτή είναι η σχέση που πειραματικά ευρέθηκε από Oersted και Ampere. Οι Biot και Savart εδώ βασίστηκαν για να βγάλουν το δικό τους νόμο.

Μαγνητική ροπή

Από τη στιγμή που έχουμε βρόχο ρεύματος και εξασκούνται δυνάμεις στα διάφορα σημεία του βρόχου, αυτές οι δυνάμεις είναι ικανές να στρέψουν το βρόχο, άρα έχουμε την εμφάνιση ροπής. Ορίζουμε τη ροπή γύρω από έναν άξονα στροφής

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

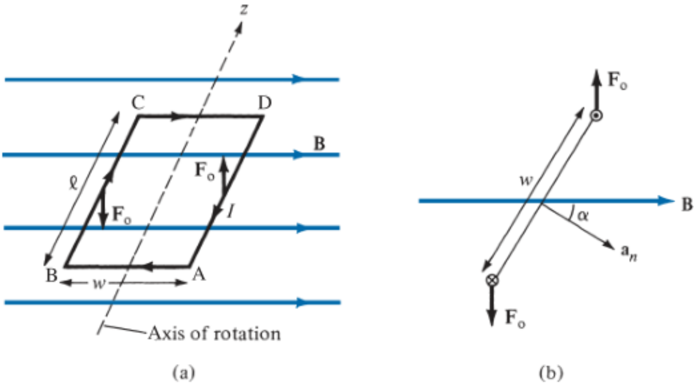
όπου $\mathbf{r}$ το διάνυσμα από τον άξονα στροφής (όπου μετράμε τη ροπή) στο σημείο εφαρμογής της δύναμης. Μονάδα ροπής το $\mathrm{N} \cdot m$.

Θεωρούμε ορθογώνιο ρευματοφόρο βρόχο (πλαίσιο) μήκους ℓ και πλάτους w σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$. Οι πλευρές AB και CD είναι παράλληλες στο πεδίο άρα δεν εμφανίζονται δυνάμεις σε αυτές. Δυνάμεις εμφανίζονται στις κάθετες πλευρές και έχουμε

$$\mathbf{F} = I\int_B^C d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I\int_D^A d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I\int_0^\ell dz\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} + I\int_\ell^0 dz\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_o - \mathbf{F}_o = 0$$

όπου $|\mathbf{F}_o| = IB\ell$. Η ολική δύναμη είναι μηδέν αλλά οι πλευρικές δρούν σαν ζεύγος και στρέφουν το πλαίσιο.

Μαγνητική ροπή (συνέχεια 1)



Σχήμα: (a) Ορθογώνιος βρόχος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο (b) κάτοψη

Μαγνητική ροπή (συνέχεια 2)

Έστω ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{a}}_n$ στο επίπεδο του βρόχου σχηματίζει γωνία α με το $\mathbf{B}$ όπως φαίνεται στην κάτοψη. Έχουμε

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{F}_o| w \sin\alpha = BI\ell w \sin\alpha = BIS \sin\alpha$$

Ορίζουμε την μαγνητική διπολική ροπή $\mathbf{m} = IS\hat{\mathbf{a}}_n$ του βρόχου, σαν το γινόμενο ρεύματος και εμβαδού του βρόχου, με $\hat{\mathbf{a}}_n$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του βρόχου και κατεύθυνση που ορίζεται από τον κανόνα δεξιού χεριού (αντίχειρας $\hat{\mathbf{a}}_n$ και δάκτυλα κατεύθυνση ρεύματος). Η μαγνητική ροπή γίνεται τότε:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Παρά το ότι η σχέση βγήκε για ορθογώνιο βρόχο, ισχύει για οποιουδήποτε σχήματος επίπεδο βρόχο με μόνη προϋπόθεση την ομογένεια του μαγνητικού πεδίου. Η ροπή που δημιουργείται προσπαθεί να ελαττώσει την γωνία α και να φέρει $\mathbf{m}$ και $\mathbf{B}$ στην ίδια κατεύθυνση. Στη θέση ισορροπίας και η ροπή και η συνολική δύναμη στο βρόχο είναι μηδέν.