Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 14

Α. Δροσόπουλος

02-12-2022

Outline

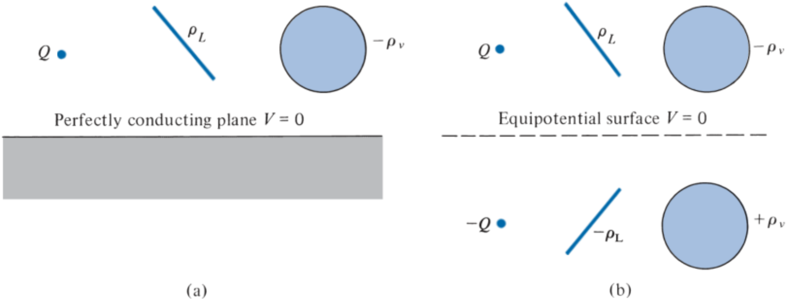
Topic

Μέθοδος ειδώλων (method of images)

Η μέθοδος ειδώλων (Kelvin, 1848) χρησιμοποιείται για προσδιορισμό $V, \mathbf{E}, \mathbf{D}$ και ρ_S που οφείλονται σε φορτία παρουσία αγωγών. Με τη μέθοδο αυτή αποφεύγουμε την επίλυση των εξισώσεων Laplace και Poisson αξιοποιώντας το γεγονός ότι η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική. Αν και δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα ηλεκτροστατικά προβλήματα, εκεί που μπορεί, μετατρέπει ένα δύσκολο πρόβλημα σε απλό.

Σύμφωνα με τη μέθοδο ειδώλων μια δοθείσα κατανομή φορτίου πάνω από ένα τέλεια αγώγιμο απείρων διαστάσεων επίπεδο μπορεί να αντικατασταθεί από την ίδια την κατανομή φορτίου, το είδωλό της και μια ισοδυναμική επιφάνεια στην θέση του αγώγιμου επιπέδου.

Μέθοδος ειδώλων (συνέχεια 1)

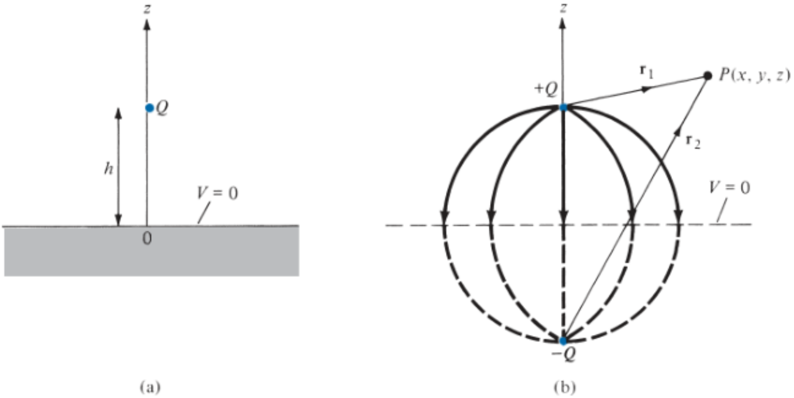


Παράδειγμα σημειακού φορτίου, γραμμικής κατανομής φορτίου και κατανομής φορτίου στο χώρο με την εφαρμογή της μεθόδου ειδώλων.

Συνθήκες εφαρμογής:

1. Τα φορτία είδωλα πρέπει να βρίσκονται στην αγώγιμη περιοχή (ικανοποιείται η εξίσωση Poisson).
2. Τα φορτία είδωλα πρέπει να είναι τοποθετημένα έτσι, ώστε στην αγώγιμη επιφάνεια το δυναμικό είναι μηδενικό ή σταθερό (ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες).

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο



Σχήμα: (a) Σημειακό φορτίο και αγώγιμο γειωμένο επίπεδο. (b) Σύστημα φορτίων με μέθοδο ειδώλων.

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο (συνέχεια 1)

Φορτίο Q σε απόσταση h από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο απείρων διαστάσεων. Το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο $P(x, y, z)$ είναι:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{Q\mathbf{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{-Q\mathbf{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3}$$

$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z) - (0, 0, h) = (x, y, z - h)$$

$$\mathbf{r}_2 = (x, y, z) - (0, 0, -h) = (x, y, z + h)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(x, y, z - h)}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} - \frac{(x, y, z + h)}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{3/2}}\right]$$

$$V = V_+ + V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{1/2}}\right]$$

για $z \geq 0$ και $V = 0$ για $z \leq 0$. Επίσης $V(z = 0) = 0$.

Σημειακό φορτίο επάνω από αγώγιμο γειωμένο επίπεδο (συνέχεια 2)

Η επιφανειακή πυκνότητα του επαγώμενου φορτίου υπολογίζεται τώρα

$$\rho_S = D_n = \epsilon_0 E_n\Big|_{z=0} = \frac{-Qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

και το ολικό επαγώμενο φορτίο

$$Q_i = \int \rho_S dS = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qh\ dx\ dy}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

και με αλλαγή μεταβλητών $\rho^2 = x^2+y^2$, $dxdy = \rho d\rho d\phi$

$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{Qh}{2\pi}2\pi\int_0^{\infty}(\rho^2+h^2)^{-3/2}\frac{1}{2}d(\rho^2) =$$

$$= \frac{Qh}{(\rho^2+h^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\infty} = -Q$$

όπως θα αναμέναμε.

Topic

Περίληψη Ηλεκτροστατικά προβλήματα

- Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες είναι εκείνα όπου τα δυναμικά ή οι παράγωγές τους είναι γνωστά στις οριακές επιφάνειες μιας περιοχής και καλούμαστε να προσδιορίσουμε το δυναμικό πεδίο μέσα στην περιοχή. Αυτό γίνεται με επίλυση εξίσωσης Poisson $(\rho_v \neq 0)$ ή Laplace $(\rho_v = 0)$.
- Σε μη ομογενή περιοχή (ϵ εξαρτάται από τη θέση στο χώρο) η εξίσωση Poisson είναι

  $$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

  Σε ομογενή περιοχή (ϵ σταθερά, δεν εξαρτάται από τη θέση στο χώρο) η εξίσωση Poisson είναι

  $$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

  Σε περιοχή μηδενικού φορτίου $(\rho_v = 0)$ η εξίσωση Poisson γίνεται εξίσωση Laplace

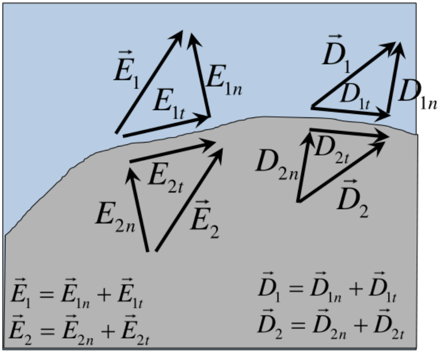
  $$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0 \qquad \text{ή} \qquad \nabla^2 V = 0$$

Περίληψη (συνέχεια 1)

- Δοθέντος ενός ηλεκτροστατικού στοιχείου με κάποια κατανομή φορτίου θέλουμε να δούμε τι πεδίο σχηματίζεται στο στοιχείο.
- Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση Laplace ή Poisson με διπλή ολοκλήρωση αν το δυναμικό V εξαρτάται από μια μεταβλητή ή με τη μέθοδο διαχωριζομένων μεταβλητών αν εξαρτάται από περισσότερες. Εφαρμογή των οριακών συνθηκών οδηγούν στη μοναδική λύση.
- Ο υπολογισμός της αντίστασης R ή της χωρητικότητας C ενός στοιχείου μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα τέτοιο πρόβλημα οριακών συνθηκών. Για προσδιορισμό της R θεωρούμε τάση V_0 μεταξύ των άκρων του στοιχείου, λύνουμε την εξίσωση Laplace, υπολογίζουμε το ρεύμα $I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ και τελικά την $R = V_0/I$. Ομοίως, για την χωρητικότητα C, θεωρούμε τάση V_0 μεταξύ των οπλισμών του στοιχείου, λύνουμε την εξίσωση Laplace, υπολογίζουμε το φορτίο $Q = \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ και τελικά την $C = Q/V_0$.
- Πρόβλημα οριακών συνθηκών σε σύστημα με κατανομή φορτίου που συμπεριλαμβάνει αγώγιμο επίπεδο ή γωνία που σχηματίζεται από αγώγιμα επίπεδα μπορεί να λυθεί με την μέθοδο ειδώλων. Σύμφωνα με αυτή, αντικαθιστούμε την αγώγιμη επιφάνεια με ισοδυναμική και προσθέτουμε την εικονική κατανομή ειδώλων στο σύστημά μας. Ακολουθεί η διαδικασία λύσης με τις γνωστές τεχνικές.

- Δεν έχουμε ηλεκτροστατικά πεδία μέσα σε αγωγούς, $\rho_v = 0,\ \mathbf{E} = 0,\ \nabla V = 0.$
- Τι συμβαίνει στις διαχωριστικές επιφάνειες διηλεκτρικό-διηλεκτρικό, διηλεκτρικό-αγωγός; Αναλύουμε $\mathbf{E}$ και $\mathbf{D}$ σε τοπικά κάθετη και εφαπτόμενη συνιστώσα στην διαχωριστική επιφάνεια. Για διηλεκτρικό-διηλεκτρικό και $\rho_S = 0$ ισχύει:

Boundary Conditions



Tangential Components:

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Normal Components:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad D_{1n} = D_{2n}$$

Refraction:

$$\frac{\tan\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2}$$

Not Snell's Law

Περίληψη οριακές συνθήκες (συνέχεια 1)

- Για διηλεκτρικό-αγωγό, καταρχήν δεν έχουμε ηλεκτροστατικά πεδία μέσα σε αγωγούς. Στη διαχωριστική επιφάνεια έχουμε

$$\begin{array}{lll} \text{μέρος διηλεκτρικού} & E_t = 0 & D_n = \rho_S \\ \text{μέρος αγωγού} & \mathbf{E} = 0 & \mathbf{D} = 0 \end{array}$$

Topic

Άσκηση

Να βρεθεί η πόλωση σε ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 2.8$, $\mathbf{D} = 3 \times 10^{-7}\ \hat{\mathbf{a}}\ \mathrm{C/m^2}$.

Εφόσον $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ και $\chi_e = \epsilon_r - 1$ έχουμε

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = 1.93 \times 10^{-7}\ \hat{\mathbf{a}}\ \mathrm{C/m^2}$$

Άσκηση

Να βρεθεί το $\mathbf{E}$ σε υλικό με ηλεκτρική επιδεκτικότητα 3.5 και $\mathbf{P} = 2.3 \times 10^{-7}\ \hat{\mathbf{a}}\ \mathrm{C/m^2}$. Δίδεται $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$.

Με την προϋπόθεση ότι $\mathbf{P}$ και $\mathbf{E}$ συγγραμμικά (ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0}\mathbf{P} = 7.422 \times 10^3\ \hat{\mathbf{a}}\ \mathrm{V/m}$$

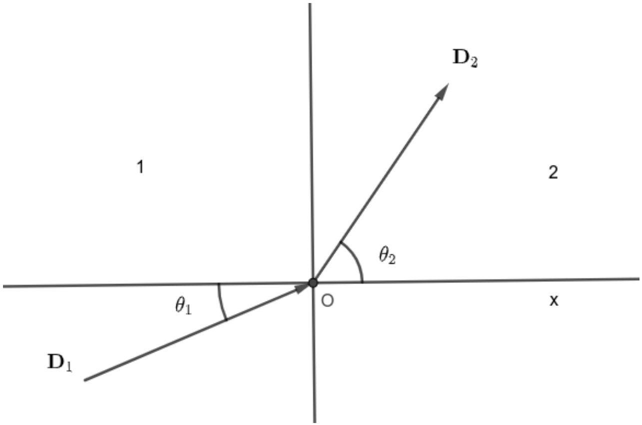
Άσκηση

Δυο σημειακά φορτία σε διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 5.2$ αλληλεπιδρούν με δύναμη $8.6\ \mathrm{mN}$. Ποια θα ήταν η αντίστοιχη δύναμη στο κενό;

$$\frac{F_{\text{κενό}}}{F_{\text{διηλεκτρικό}}} = \frac{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}} = \epsilon_r \Rightarrow F_{\text{κενό}} = 44.7\ \mathrm{mN}$$

Άσκηση

Η περιοχή 1, $x < 0$, είναι αέρας και η περιοχή 2, $x > 0$, είναι διηλεκτρικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά 2.4. Δοθέντος $\mathbf{D}_1 = (3, -4, 6)\ \mathrm{C/m^2}$ να βρεθούν τα μεγέθη $\mathbf{E}_2$, θ_1, θ_2.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Περιοχή 1, αέρας, $\epsilon_{r1} = 1$ και

$$\mathbf{D}_1 = (3, -4, 6)\ \mathrm{C/m^2} \qquad \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0}(3, -4, 6)\ \mathrm{V/m}$$

Περιοχή 2, διηλεκτρικό, $\epsilon_{r2} = 2.4$ και

$$\mathbf{D}_2 = (3, D_{2y}, D_{2z})\ \mathrm{C/m^2} \qquad \mathbf{E}_2 = \left(E_{2x}, -\frac{4}{\epsilon_0}, \frac{6}{\epsilon_0}\right)\ \mathrm{V/m}$$

εφόσον D_n συνεχές (x συνιστώσα) και E_t συνεχές (y και z συνιστώσες). Επομένως

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_0\epsilon_{r2}\mathbf{E}_2 \Rightarrow (3, D_{2y}, D_{2z}) = (\epsilon_0\epsilon_{r2}E_{2x}, -4\epsilon_{r2}, 6\epsilon_{r2}) \Rightarrow$$

$$E_{2x} = \frac{3}{2.4\epsilon_0} = \frac{1.25}{\epsilon_0} \qquad D_{2y} = -4 \cdot 2.4 = -9.6 \qquad D_{2z} = 6 \cdot 2.4 = 14.4$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0}(1.25, -4, 6)\ \mathrm{V/m} \qquad \cos\theta_1 = \frac{\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{D}_1|} \qquad \cos\theta_2 = \frac{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{E}_2|}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> D1=[3 -4 6]
D1 =
   3  -4   6
>> theta1 = acos(dot(D1,[1 0 0])/norm(D1))*180/pi
theta1 = 67.411
>> E2=[1.25 -4 6]
E2 =
   1.2500  -4.0000   6.0000
>> theta2 = acos(dot(E2,[1 0 0])/norm(E2))*180/pi
theta2 = 80.166
>> tan(theta2*pi/180)/tan(theta1*pi/180)
ans =  2.4000
```

Βλέπουμε και την επιβεβαίωση

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = 2.4$$

Άσκηση

Η περιοχή 1, $x < 0$, είναι αέρας και η περιοχή 2, $x > 0$, είναι διηλεκτρικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά 3.6. Δοθέντος $\mathbf{E}_1 = (3, 5, -3)\ \mathrm{V/m}$ να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{E}_2$ με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$.

Η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{E}_1$ με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$, $\hat{\mathbf{x}}$ είναι

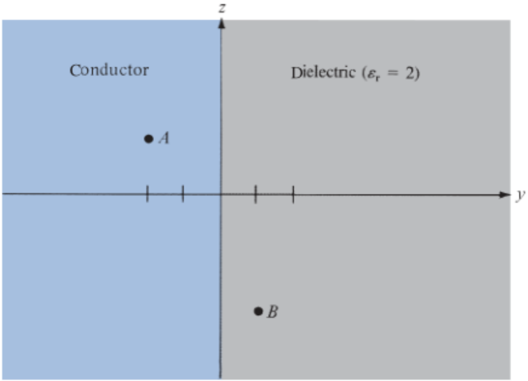
$$\cos\theta_1 = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{E}_1|} \Rightarrow \theta_1 = 62.774^\circ$$

Η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{E}_2$ με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$, $\hat{\mathbf{x}}$ είναι

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \Rightarrow \tan\theta_2 = 3.6\tan\theta_1 \Rightarrow \theta_2 = 81.867^\circ$$

Άσκηση

Η περιοχή $y < 0$ αποτελείται από ιδανικό αγωγό ενώ η περιοχή $y > 0$ από διηλεκτρικό με $\epsilon_r = 2$. Εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στον αγωγό είναι $2\ \mathrm{nC/m^2}$ προσδιορίστε τα $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ στα σημεία $A(3, -2, 2)$, $B(-4, 1, 5)$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το σημείο A είναι μέσα στον αγωγό εφόσον $y = -2 < 0$ στο A. Επομένως $\mathbf{E} = 0 = \mathbf{D}$.

Το σημείο B είναι μέσα στο διηλεκτρικό εφόσον $y = 1 > 0$ στο B. Επομένως

$$D_n = \rho_S = 2\ \mathrm{nC/m^2} \qquad \mathbf{D} = 2\ \hat{\mathbf{y}}\ \mathrm{nC/m^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 112.9\ \hat{\mathbf{y}}\ \mathrm{V/m}$$

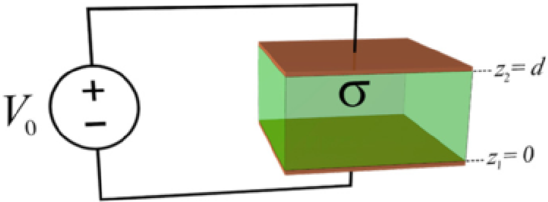
Topic

Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 1 – Choose coordinate system.

Cartesian

Step 2 – Assume V_0



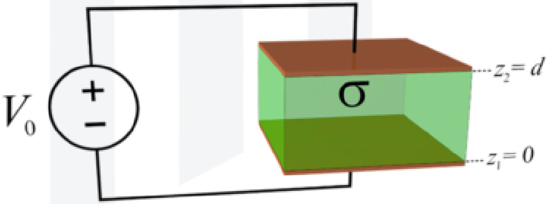
Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 3 – Solve Laplace's equation

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0 \qquad V(0) = 0 \text{ and } V(d) = V_0$$

$$V(z) = \frac{V_0 z}{d} \qquad 0 \le z \le d$$



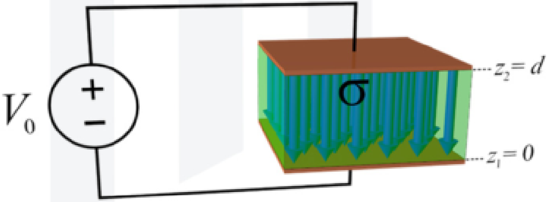
Παράδειγμα αντιστάτη 1

Step 4 – Calculate $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\hat{a}_z$$

$$\vec{E} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{V_0 z}{d}\right)\hat{a}_z \qquad 0 \le z \le d$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d}\hat{a}_z \qquad 0 \le z \le d$$



Παράδειγμα αντιστάτη 1

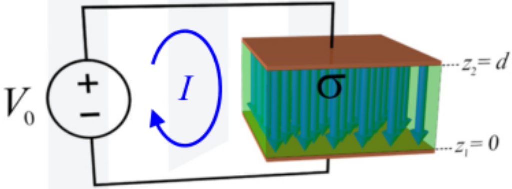
Step 5 – Calculate Current I

$$I = \iint_S \sigma \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_S \sigma \left(-\frac{V_0}{d} \hat{a}_z \right) \bullet d\vec{s}$$

$$I = -\sigma \frac{V_0}{d} \underbrace{\iint_S \hat{a}_z \bullet d\vec{s}}_{S} = -\frac{\sigma V_0}{d} S$$

The sign can be ignored since the direction of the current is known.

$$I = \frac{\sigma V_0}{d} S$$

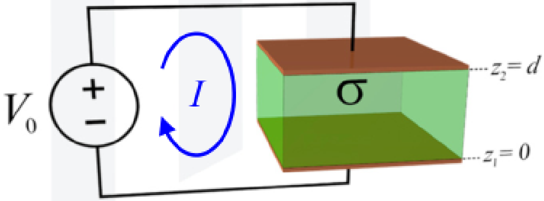


Παράδειγμα αντιστάτη 1

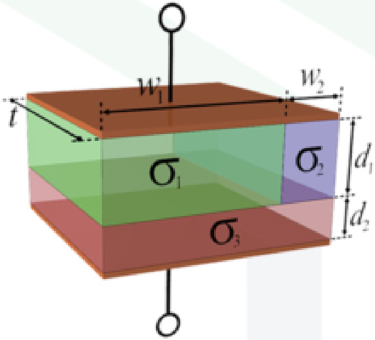
Step 6 – Calculate R using $R = V_0/I$.

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{V_0}{\frac{\sigma V_0}{d} S} = \frac{d}{\sigma S}$$

$$\boxed{R = \frac{d}{\sigma S}}$$

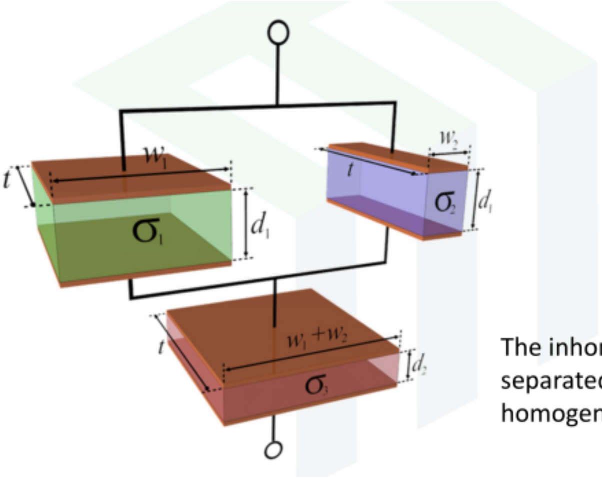


Παράδειγμα αντιστάτη 2



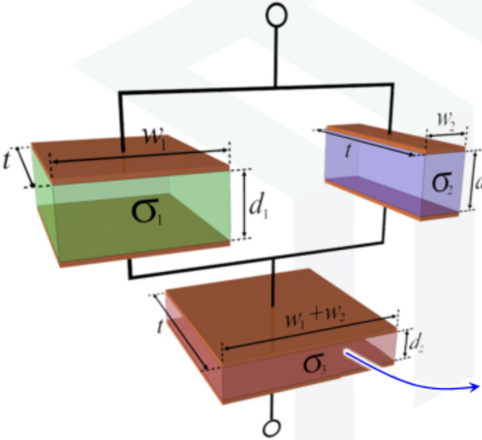
Suppose there exists an inhomogeneous resistor.

Παράδειγμα αντιστάτη 2



The inhomogeneous resistor is separated into a combination of homogeneous resistors.

Παράδειγμα αντιστάτη 2



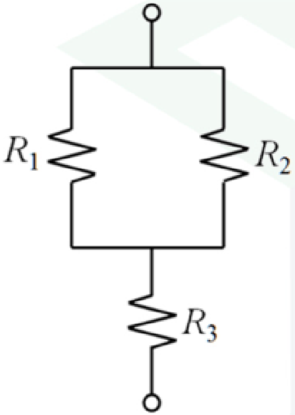
Calculate each homogeneous resistor independently.

$$R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S_1} = \frac{d_1}{\sigma_1 t w_1}$$

$$R_2 = \frac{d_1}{\sigma_2 S_2} = \frac{d_1}{\sigma_2 t w_2}$$

$$R_3 = \frac{d_2}{\sigma_3 S_3} = \frac{d_2}{\sigma_3 t \left(w_1 + w_2\right)}$$

Παράδειγμα αντιστάτη 2



We view the resistor as a series/parallel combination of resistors.

The equivalent resistance is

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 + R_3$$

$$= \left(\frac{d_1}{\sigma_1 t w_1} \middle\| \frac{d_1}{\sigma_2 t w_2} \right) + \frac{d_2}{\sigma_3 t (w_1 + w_2)}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{1}{t}\left[\frac{d_1 \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2}{\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2} + \frac{d_2}{\sigma_3 (w_1 + w_2)} \right]}$$