

# Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διάλεξη 13

A. Δροσόπουλος

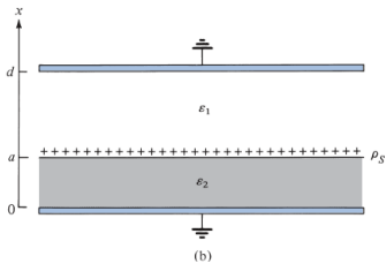
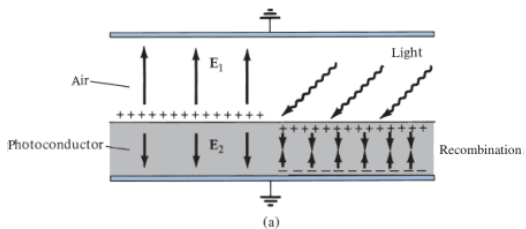
25-11-2022

## 1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

## 1 Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Το κοινό, ξηρογραφικό, φωτοτυπικό μηχάνημα είναι ηλεκτροστατική εφαρμογή. Η φωτοαγώγιμος επιφάνεια αρχικά φορτίζεται ομοιόμορφα. Η σελίδα που είναι για φωτοτυπία φωτίζεται κατάλληλα και το φως εστιάζεται στο επάνω μέρος της φωτοαγώγιμης επιφάνειας. Τα φορτία από το κάτω μέρος συνδυάζονται με αυτά στο επάνω για εξουδετέρωση. Η εικόνα της φωτοτυπίας σχηματίζεται στο λεπτό στρώμα φορτισμένου γραφίτη που απλώνεται στη φωτοαγώγιμη επιφάνεια. Το ηλεκτρικό πεδίο προσελκύει το φορτισμένο γραφίτη στο χαρτί, αυτό θερμαίνεται και λειώνει εκεί σχηματίζοντας τη φωτοτυπία. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στις δυο επιφάνειες του φωτοαγωγού;

# Εφαρμογή 2 (συνέχεια 1)



## Εφαρμογή 2 (συνέχεια 2)

Το ολικό φορτίο είναι μηδέν άρα χρησιμοποιούμε την εξίσωση Laplace. Το δυναμικό επίσης εξαρτάται μόνο από το  $x$  και έχουμε:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Με διπλή ολοκλήρωση:  $V = Ax + B$ . Ξεχωρίζουμε τις δυο περιοχές πάνω και κάτω από την  $x = a$  και έχουμε:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 x + B_1, & x > a \\ V_2 &= A_2 x + B_2, & x < a \end{aligned}$$

Οι οριακές συνθήκες στα γειωμένα ηλεκτρόδια είναι:

$$\begin{aligned} V_1(x = d) &= 0 \\ V_2(x = 0) &= 0 \end{aligned}$$

Στη φωτοαγώγιμη επιφάνεια:

$$\begin{aligned} V_1(x = a) &= V_2(x = a) \\ D_{1n} - D_{2n} &= \rho_S \end{aligned}$$

## Εφαρμογή 2 (συνέχεια 3)

Επομένως:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A_1 d + B_1 \\ 0 &= 0 + B_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_1 &= -A_1 d \\ B_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 a + B_1 &= A_2 a \\ D_{1n} - D_{2n} &= \rho_S \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1(a-d) - A_2 a &= 0 \\ -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 &= \rho_S \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla V$  με

$$\rho_S = D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = -\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} + \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx} = -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2$$

Λύνοντας ως προς  $A_1, A_2$  έχουμε

$$A_1 = \frac{a \rho_S}{(a-d)\epsilon_2 - a\epsilon_1} \quad A_2 = \frac{(a-d)\rho_S}{(a-d)\epsilon_2 - a\epsilon_1}$$

και

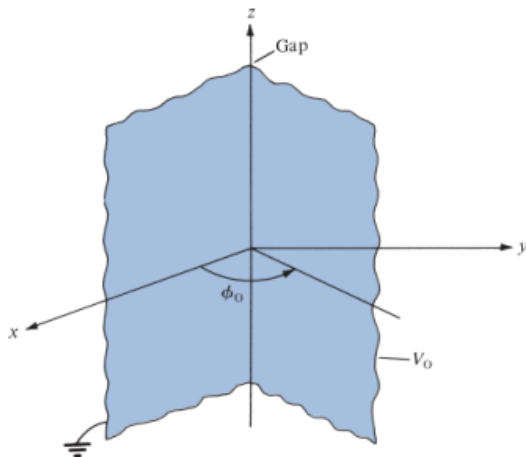
$$\mathbf{E}_1 = -\frac{dV_1}{dx} \hat{\mathbf{x}} = -A_1 \hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_1 \left[ 1 + \frac{\epsilon_2 d}{\epsilon_1 a} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right]} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{dV_2}{dx} \hat{\mathbf{x}} = -A_2 \hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_S \left( 1 - \frac{d}{a} \right)}{\epsilon_1 \left[ 1 + \frac{\epsilon_2 d}{\epsilon_1 a} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right]} \hat{\mathbf{x}}$$



# Παράδειγμα 1

Αγώγιμα ημι-επίπεδα  $\phi = 0$  και  $\phi = \pi/6$  διαχωρίζονται με ένα πολύ λεπτό μονωτικό διάκενο (άξονας  $z$ ). Εάν  $V(\phi = 0) = 0$  και  $V(\phi = \pi/6) = 100$  V υπολογίστε  $V$  και  $\mathbf{E}$  στην περιοχή μεταξύ των επιπέδων.



# Παράδειγμα 1 (συνέχεια 1)

Εφόσον το  $V$  εξαρτάται μόνο από την  $\phi$  χρησιμοποιούμε εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

εφόσον  $\rho = 0$  εξαιρείται λόγω του διακένου. Ολοκλήρωση δυο φορές δίνει:

$$V = A\phi + B$$

Με οριακές συνθήκες

$$\text{για } \phi = 0, V = 0, \quad 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$\text{για } \phi = \phi_0, V = V_0, \quad V_0 = A\phi_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\phi_0}$$

$$\text{Οπότε } V = \frac{V_0}{\phi_0} \phi$$

## Παράδειγμα 1 (συνέχεια 2)

και

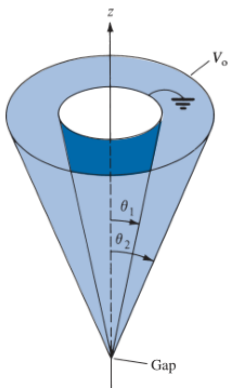
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{V_0}{\rho\phi_0} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Αντικαθιστώντας  $V_0 = 100 \text{ V}$  και  $\phi_0 = \pi/6$

$$V = \frac{600}{\pi} \phi \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = -\frac{600}{\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

## Παράδειγμα 2

Δυο αγώγιμες κωνικές επιφάνειες ( $\theta = \pi/10$  και  $\theta = \pi/6$ ) έχουν ένα μικροσκοπικό διάκενο στην κορυφή τους ( $r = 0$ ) και δεν είναι σε επαφή. Αν  $V(\theta = \pi/10) = 0$  και  $V(\theta = \pi/6) = 50$  V, βρείτε  $V$  και  $\mathbf{E}$  στο χώρο μεταξύ τους.



## Παράδειγμα 2 (συνέχεια 1)

Το  $V$  εξαρτάται μόνο από τη γωνία  $\theta$  επομένως η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0$$

εφόσον  $r = 0$  και  $\theta = 0, \pi$  εξαιρούνται. Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin \theta}$$

Η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει

$$\begin{aligned} V &= A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = A \int \frac{d\theta}{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)} = A \int \frac{(1/2) \sec^2(\theta/2) d\theta}{\tan(\theta/2)} = \\ &= A \int \frac{d[\tan(\theta/2)]}{\tan(\theta/2)} = A \ln[\tan(\theta/2)] + B \end{aligned}$$

## Παράδειγμα 2 (συνέχεια 2)

Οριακές συνθήκες τώρα:

$$V(\theta = \theta_1) = 0 \Rightarrow A \ln[\tan(\theta_1/2)] + B = 0 \Rightarrow B = -A \ln[\tan(\theta_1/2)] \Rightarrow$$

$$V = A \ln \left[ \frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]$$

$$V(\theta = \theta_2) = V_0 \Rightarrow A \ln \left[ \frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right] = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln \left[ \frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]}$$

$$\text{και} \quad V = \frac{V_0 \ln \left[ \frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]}$$

## Παράδειγμα 2 (συνέχεια 3)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{A}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)} \right]} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

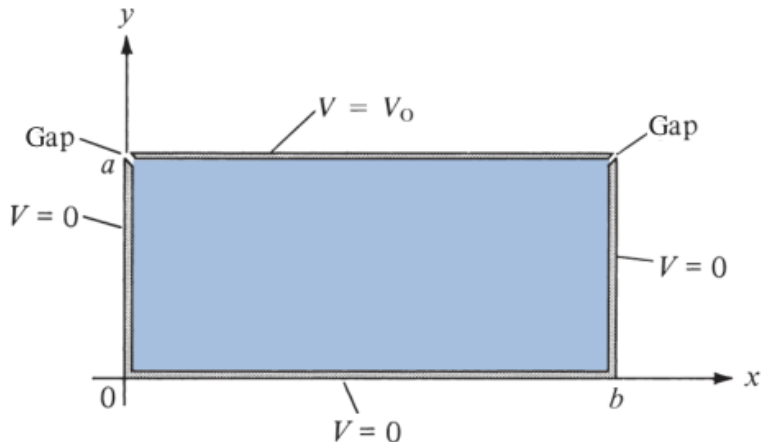
Για  $\theta_1 = \pi/10$ ,  $\theta_2 = \pi/6$ ,  $V_0 = 50$  V έχουμε

$$V = 95.1 \ln \left[ \frac{\tan(\theta/2)}{0.158} \right] \text{ V}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{95.1}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \text{ V/m}$$

## Παράδειγμα 3

Σε ορθογώνια μεταλλική κατασκευή απείρου μήκους με διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα προσδιορίστε το δυναμικό στο εσωτερικό του. Υπολογίστε την τιμή του δυναμικού στο σημείο  $(a/2, 3a/4)$  όταν  $V_0 = 100 \text{ V}$  και  $b = 2a$ .





## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)

Το δυναμικό εδώ εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις  $x$  και  $y$  και είναι συνάρτηση  $V(x, y)$ . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση Laplace είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

με οριακές συνθήκες:

$$V(x = 0, 0 \leq y < a) = 0$$

$$V(x = b, 0 \leq y < a) = 0$$

$$V(0 \leq x \leq b, y = 0) = 0$$

$$V(0 < x < b, y = a) = V_0$$

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

Λύνουμε τη εξίσωση Laplace με μέθοδο διαχωριζομένων μεταβλητών (separation of variables), δηλ αναζητούμε λύση της μορφής:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

όπου  $\lambda$  σταθερά διαχωρισμού. Επομένως:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

Οι οριακές συνθήκες γίνονται τώρα:

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \Rightarrow X(b) = 0$$

$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$V(x, a) = X(x)Y(a) = V_0 \quad (\text{μη διαχωρίσιμες})$$

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 3)

Περίπτωση 1:

Παράμετρος  $\lambda = 0$ :

$$X'' = 0 \Rightarrow X = Ax + B$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow Ab + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

Οπότε:

$$X(x) = 0 \Rightarrow V = 0$$

που δεν έχει νόημα οπότε  $\lambda \neq 0$ .

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 4)

Περίπτωση 2:

Παράμετρος  $\lambda < 0$ , έστω  $\lambda = -\alpha^2$ .

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \quad \text{ή} \quad (D^2 - \alpha^2)X = 0 \quad \text{όπου} \quad D = \frac{d}{dx}$$

$$DX = \pm \alpha X$$

Για το + πρόσημο έχουμε

$$\frac{dX}{dx} = \alpha X \Rightarrow \frac{dX}{X} = \alpha dx \Rightarrow X = A_1 e^{\alpha x}$$

Ομοίως και για το - πρόσημο

$$X = A_2 e^{-\alpha x}$$

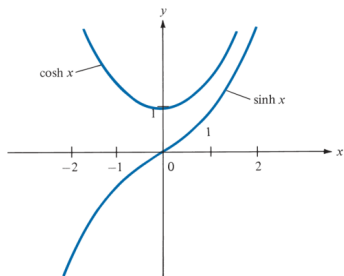
με τελική λύση

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$$

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 5)

Συνηθίζεται εδώ να μετασχηματίζουμε τις εκθετικές εξισώσεις σε εξισώσεις με υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα.

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} \quad \sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$



$$e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \sinh \alpha x \quad e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \sinh \alpha x$$

$$X(x) = (A_1 + A_2) \cosh \alpha x + (A_1 - A_2) \sinh \alpha x = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \sinh \alpha x$$

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 6)

Με τις οριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B_2 \sinh \alpha b$$

και επειδή  $\sinh \alpha b \neq 0$  πρέπει  $B_2 = 0$ .

Ούτε αυτή η λύση έχει νόημα οπότε  $\lambda$  δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 7)

### Περίπτωση 3:

Παράμετρος  $\lambda > 0$ , έστω  $\lambda = \beta^2$ .

$$X'' + \beta^2 X = 0 \quad \text{ή} \quad (D^2 + \beta^2)X = 0 \Rightarrow DX = \pm j\beta X$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως πριν

$$X(x) = c_1 e^{j\beta x} + c_2 e^{-j\beta x}$$

και από τον τύπο του Euler  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  έχουμε  
 $e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$  και  $e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x$ , οπότε

$$X(x) = (c_1 + c_2) \cos \beta x + j(c_1 - c_2) \sin \beta x = d_1 \cos \beta x + d_2 \sin \beta x$$

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 8)

και με τις οριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = d_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + d_2 \sin \beta b$$

Έχουμε  $d_2 \neq 0$  (αλλιώς έχουμε πάλι εξίσωση που δεν βγάζει νόημα). Τότε

$$\sin \beta b = 0 \Rightarrow \beta b = n\pi \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Αποκλείσαμε  $n = 0$  καθώς και  $n = -1, -2, -3, \dots$  μιας και η τιμή της  $\lambda$  δεν αλλάζει. Επομένως η λύση είναι

$$X_n(x) = d_n \sin \frac{n\pi x}{b}$$

Πάμε τώρα για λύση της  $Y(y)$ . Έχουμε

$$Y'' - \beta^2 Y = 0 \Rightarrow Y = h_1 \cosh \beta y + h_2 \sinh \beta y$$

και από τις οριακές συνθήκες

$$Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = h_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow h_1 = 0$$

$$Y_n(y) = h_n \sinh \frac{n\pi y}{b}$$



## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 9)

και η λύση για το δυναμικό είναι:

$$V_n(x, y) = d_n h_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

Με το θεώρημα υπέρθεσης εφόσον τα  $V_1, V_2, \dots$  είναι λύσεις της Laplace τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση. Η γενική λοιπόν λύση είναι:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

με  $c_n$  σταθερές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Με την οριακή συνθήκη στο επάνω μέρος της κατασκευής έχουμε

$$V(x, a) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b}$$

που είναι ανάπτυγμα σειράς Fourier του  $V_0$ .

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 10)

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέρη της εξίσωσης με  $\sin(m\pi x/b)$  και ολοκληρώνοντας για  $0 < x < b$  έχουμε

$$\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi x}{b} dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi x}{b} dx$$

Με την ορθογωνιότητα της ημιτονικής συνάρτησης

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \end{cases}$$

έχουμε (μόνο τα  $m = n$  είναι μη μηδενικά)

$$\begin{aligned} \int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi x}{b} dx &= c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi x}{b} dx \Rightarrow \\ -V_0 \frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{b} \Big|_0^b &= c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{b}\right) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 11)

$$\frac{V_0 b}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \Rightarrow$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

και η τελική λύση:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

Συνήθως αρκεί η άθροιση των πρώτων λίγων όρων.

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 12)

Για  $x = a/2$  και  $y = 3a/4$  με  $b = 2a$  έχουμε:

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sinh\left(\frac{3n\pi}{8}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

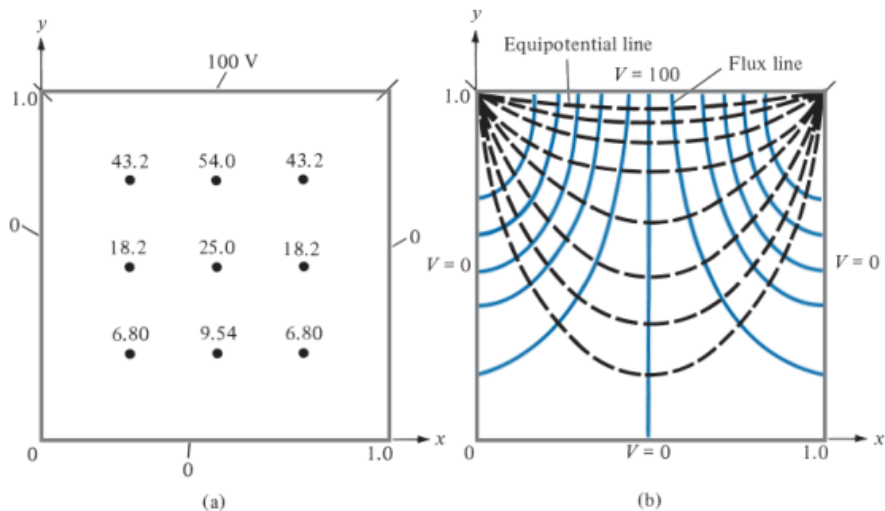
```
V0=100; c = 4*V0/pi; csum = 0;
for n=1:2:30
    sumv = sin(n*pi/4)*sinh(3*n*pi/8)/(n*sinh(n*pi/2));
    csum += sumv;
    printf(" %4d %12.8f %10.6f \n",n,sumv,csum)
end
printf(" V = %g Volt \n",c*csum)
```

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 13)

1	0.45172814	0.451728
3	0.07250830	0.524236
5	-0.01985073	0.504386
7	-0.00646484	0.497921
9	0.00229255	0.500213
11	0.00085521	0.501069
13	-0.00032994	0.500739
15	-0.00013037	0.500608
17	0.00005245	0.500661
19	0.00002140	0.500682
21	-0.00000883	0.500673
23	-0.00000367	0.500670
25	0.00000154	0.500671
27	0.00000065	0.500672
29	-0.00000028	0.500672

V = 63.7475 Volt

## Παράδειγμα 3 (συνέχεια 14)



Σχήμα: Για  $a = b = 1 \text{ m}$ ,  $V_0 = 100 \text{ V}$

Στα προηγούμενα έχουμε βρει την αντίσταση αγωγού μήκους  $\ell$  και ομοιόμορφης διατομής  $S$  που βρίσκεται υπό τάση:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S} = \rho \frac{\ell}{S}$$

Εάν η διατομή δεν είναι ομοιόμορφη η παραπάνω σχέση δεν ισχύει. Έχουμε τότε:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

που είναι πρόβλημα οριακών συνθηκών.

# Αντίσταση (συνέχεια 1)

Η διαδικασία που ακολουθούμε τότε είναι:

- 1 Επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων.
- 2 Υπόθεση ότι  $V_0$  η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο τερματικών του αγωγού.
- 3 Επίλυση εξίσωσης Laplace  $\nabla^2 V = 0$  για εύρεση του δυναμικού  $V$ .  
Υπολογισμός  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , και  $I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ .
- 4 Υπολογισμός  $R = V_0/I$ .

Εναλλακτικά, μπορούμε να υποθέσουμε ρεύμα  $I_0$ , να υπολογίσουμε το  $V$  και κατόπιν την αντίσταση  $R = V/I_0$ .



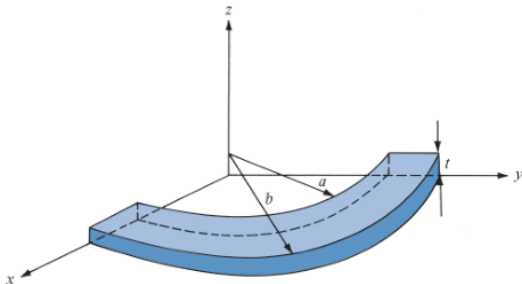
## Παράδειγμα 4

Μεταλλική ράβδος αγωγιμότητας  $\sigma$  κάμπτεται σχηματίζοντας τόξο  $90^\circ$  με εσωτερική ακτίνα  $a$ , εξωτερική  $b$  και πάχος  $t$  όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι η αντίσταση μεταξύ των επιφανειών  $\rho = a$  και  $\rho = b$  είναι:

$$R_1 = \frac{2 \ln(b/a)}{\sigma \pi t}$$

και η αντίσταση μεταξύ των επιφανειών  $z = 0$  και  $z = t$  είναι:

$$R_2 = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$



## Παράδειγμα 4 (συνέχεια 1)

Πρώτο ερώτημα:

Έστω τάση  $V_0$  μεταξύ των κυρτών επιφανειών  $\rho = a$  και  $\rho = b$  έτσι ώστε  $V(\rho = a) = 0$  και  $V(\rho = b) = V_0$ .  $V = V(\rho)$  και η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{dV}{d\rho} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V = A \ln \rho + B$$

Από τις οριακές συνθήκες

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A \ln a + B \Rightarrow B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A \ln b + B = A \ln b - A \ln a = A \ln \frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

και έχουμε:

$$V = A \ln \rho - A \ln a = A \ln(\rho/a) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a)$$

## Παράδειγμα 4 (συνέχεια 2)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{A}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^t \frac{V_0 \sigma}{\rho \ln(b/a)} dz \rho d\phi = \frac{\pi}{2} \frac{t V_0 \sigma}{\rho \ln(b/a)}$$

και

$$R_1 = \frac{V_0}{I} = \frac{2 \ln(b/a)}{\sigma \pi t}$$

## Παράδειγμα 4 (συνέχεια 3)

Δεύτερο ερώτημα:

Έστω τάση  $V_0$  μεταξύ των επιπέδων επιφανειών  $z = 0$  και  $z = t$  έτσι ώστε  $V(z = a) = 0$  και  $V(z = t) = V_0$ .  $V = V(z)$  και η εξίσωση Laplace είναι:

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V = Az + B$$

Από τις οριακές συνθήκες:

$$V(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$V(t) = V_0 \Rightarrow V_0 = At \Rightarrow A = V_0/t$$

Οπότε:  $V = \frac{V_0}{t}z$       $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{V_0}{t} \hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma V_0}{t} \hat{\mathbf{z}} \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho \hat{\mathbf{z}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=a}^b \frac{V_0 \sigma}{t} \rho d\phi d\rho = \frac{V_0 \sigma}{t} \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_a^b = \frac{V_0 \sigma \pi (b^2 - a^2)}{4t}$$

και

$$R_2 = \frac{V_0}{I} = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

## Παράδειγμα 4 (συνέχεια 4)

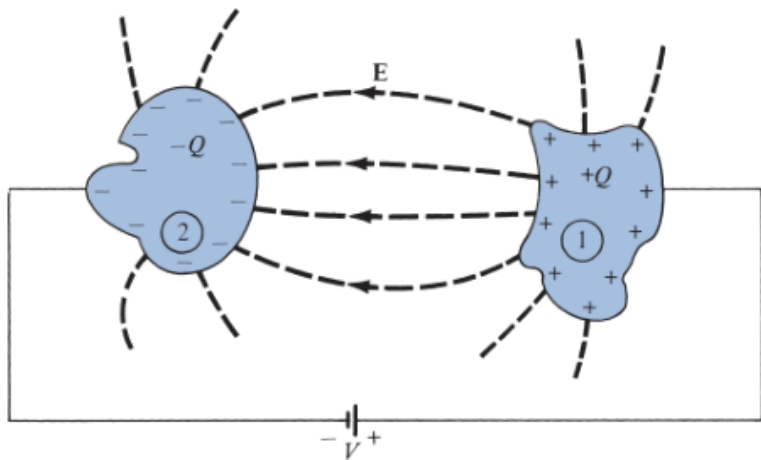
Εναλλακτικά, επειδή η διατομή είναι ίδια μεταξύ των δυο επιφανειών

$$R_2 = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{t}{\sigma(\pi/4)(b^2 - a^2)} = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

Όταν ένας απομονωμένος αγωγός φορτίζεται με φορτίο  $Q$  το δυναμικό του  $V$  αυξάνεται. Ο λόγος των δυο ονομάζεται χωρητικότητα του αγωγού γιατί δείχνει το ποσό του φορτίου που μπορεί να «χωρέσει» στον αγωγό για συγκεκριμένο δυναμικό. Ο ορισμός γενικεύεται σε συστήματα που αποτελούνται από πολλούς αγωγούς.

Η πιο διαδεδομένη περίπτωση είναι για σύστημα ζεύγους αγωγών με ίσο και αντίθετο φορτίο. Τέτοιο σύστημα ονομάζεται πυκνωτής και οι δυο αγωγοί είναι οι σπλισμοί του πυκνωτή με ενδιάμεσα κενό/αέρα ή κάποιο διηλεκτρικό. Οι δυο σπλισμοί έχουν διαφορετικό δυναμικό και οι γραμμές ηλεκτρικής ροής ξεκινούν κάθετα στην επιφάνεια από αυτόν με το θετικό φορτίο (αγωγός 1) και καταλήγουν στον άλλο με το αρνητικό φορτίο (αγωγός 2).

# Χωρητικότητα (συνέχεια 1)



# Χωρητικότητα (συνέχεια 2)

Η διαφορά δυναμικού (τάση) μεταξύ των οπλισμών είναι:

$$V = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου  $\mathbf{E}$  το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών. Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι τότε:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

όπου το ενδιαφέρον μας είναι στο μέτρο της τάσης  $V$  και έχουμε αγνοήσει το αρνητικό πρόσημο. Η μονάδα της χωρητικότητας είναι το Farad (F) με συνήθεις τιμές στα  $\mu\text{F}$  ή  $\text{pF}$ .

Όπως και για την αντίσταση μπορούμε:

- 1 Να υποθέσουμε το  $Q$ . Να προσδιορίσουμε το  $V$  συναρτήσει του  $Q$  (νόμος Coulomb ή Gauss) και να βρούμε τη  $C$ .
- 2 Να υποθέσουμε το  $V$ . Να προσδιορίσουμε το  $Q$  συναρτήσει του  $V$  (εξίσωση Laplace) και να βρούμε τη  $C$ .

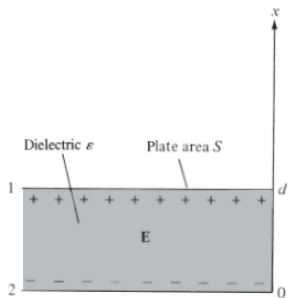


# Πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς

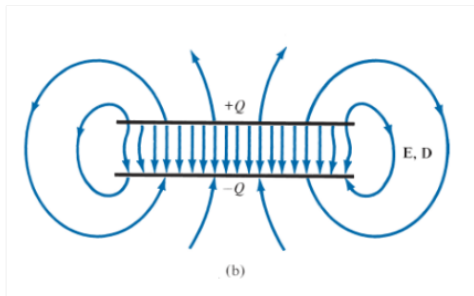
Έστω πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω κάθε οπλισμός έχει επιφάνεια  $S$  και απόσταση μεταξύ τους  $d$ . Έστω ότι οι οπλισμοί έχουν φορτίο  $+Q$  και  $-Q$  αντίστοιχα που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο ώστε

$$\rho_S = \frac{Q}{S}$$

Θέλουμε την τάση και το πεδίο μεταξύ οπλισμών καθώς και τη χωρητικότητα του πυκνωτή.



(a)



(b)

# Πυκνωτής (συνέχεια 1)

Ιδανικά, η απόσταση  $d$  είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις των οπλισμών και μπορούμε να αγνοήσουμε τη σκέδαση στα άκρα και να θεωρήσουμε το πεδίο μεταξύ οπλισμών ότι είναι ομογενές.

Από την ηλεκτρική ροή και το πεδίο παραλλήλου ζεύγους αγώγιμων επιφανειών απείρων διαστάσεων (Διάλεξη 3, σελ 23)

$$\mathbf{D} = -\rho_S \hat{\mathbf{x}} \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon} (-\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{Q}{\epsilon S} \hat{\mathbf{x}}$$

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d \left( -\frac{Q}{\epsilon S} \hat{\mathbf{x}} \right) \cdot dx \hat{\mathbf{x}} = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

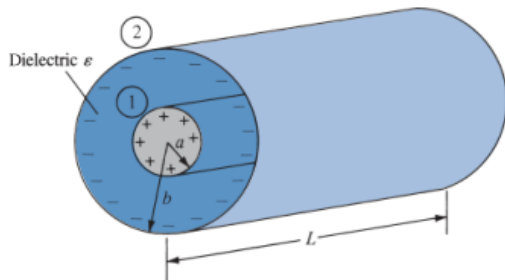
Η παραπάνω σχέση δίνει έναν πρακτικό τρόπο να μετρήσουμε την  $\epsilon_r$  κάποιου διηλεκτρικού. Μετράμε την χωρητικότητα  $C_0$  με αέρα και  $C$  με διηλεκτρικό και έχουμε  $\epsilon_r = C/C_0$ .

Ομοίως, η ηλεκτρική ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί στον πυκνωτή είναι:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon \frac{Q^2}{\epsilon^2 S^2} dv = \frac{\epsilon Q^2 S d}{2 \epsilon^2 S^2} = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{d}{\epsilon S} \right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

# Ομοαξονικός πυκνωτής

Ομοαξονικό καλώδιο ή ομοαξονικός κυλινδρικός πυκνωτής.



Θεωρούμε μήκος  $L$ , ακτίνα κεντρικού αγωγού είναι  $a$  και ακτίνα εξωτερικού μεταλλικού περιβλήματος  $b$ . Ο χώρος μεταξύ αγωγών περιέχει διηλεκτρικό  $\epsilon$ . Οι αγωγοί είναι φορτισμένοι με φορτία  $+Q$  και  $-Q$  αντίστοιχα.

# Ομοαξονικός πυκνωτής (συνέχεια 1)

Θεώρημα Gauss με κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $\rho$  όπου  $a < \rho < b$

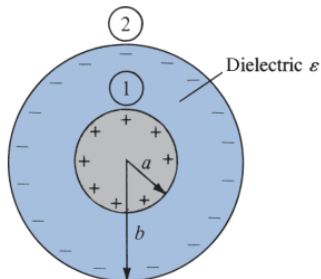
$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E 2\pi\rho L \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$V = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \hat{\boldsymbol{\rho}} \right) \cdot d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

# Σφαιρικός πυκνωτής

Σφαιρικός πυκνωτής είναι ένα σύστημα με δυο ομόκεντρες αγωγίμες σφαιρικές επιφάνειες.



Θεωρούμε ακτίνα εσωτερικής επιφάνειας  $a$ , εξωτερικής  $b$ . Χώρος μεταξύ επιφανειών διηλεκτρικό  $\epsilon$ . Οι επιφάνειες είναι φορτισμένες με φορτία  $+Q$  και  $-Q$  αντίστοιχα.

# Σφαιρικός πυκνωτής (συνέχεια 1)

Θεώρημα Gauss με σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $r$  όπου  $a < r < b$

$$Q = \epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E 4\pi r^2 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot dr \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

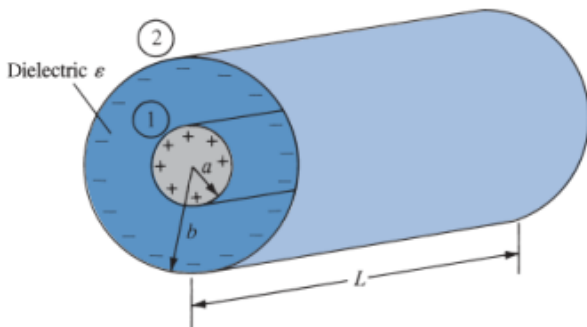
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Με  $b \rightarrow \infty$ ,  $C = 4\pi\epsilon a$  έχουμε την χωρητικότητα μεμονωμένης σφαίρας που είναι κατά προσέγγιση ίδια και για άλλα σχήματα με περίπου ίδιες διαστάσεις. Χρήσιμο στον υπολογισμό παρασιτικής χωρητικότητας στοιχείων.

## Παράδειγμα 5

Ένα ομοαξονικό καλώδιο περιέχει μονωτικό υλικό αγωγιμότητας  $\sigma$ . Εάν η ακτίνα του κεντρικού αγωγού είναι  $a$  και του εξωτερικού μεταλλικού περιβλήματος  $b$  δείξτε ότι η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους είναι:

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$



## Παράδειγμα 5 (συνέχεια 1)

Θεωρούμε  $V(a) = 0$  και  $V(b) = V_0$  και η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{dV}{d\rho} = A \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

$$V = A \ln \rho + B$$

Από τις οριακές συνθήκες

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A \ln a + B \Rightarrow B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A \ln b + B = A \ln b - A \ln a = A \ln \frac{b}{a} \Rightarrow A = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

και έχουμε:

$$V = A \ln \rho - A \ln a = A \ln(\rho/a) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a)$$



## Παράδειγμα 5 (συνέχεια 2)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{A}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{V_0 \sigma}{\rho \ln(b/a)} dz \rho d\phi = \frac{2\pi L \sigma V_0}{\ln(b/a)}$$

Η αντίσταση ανά μονάδα μήκους είναι

$$R = \frac{V_0}{I \cdot L} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

και η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους είναι

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$