Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 12

Α. Δροσόπουλος

23-11-2022

Outline

Topic

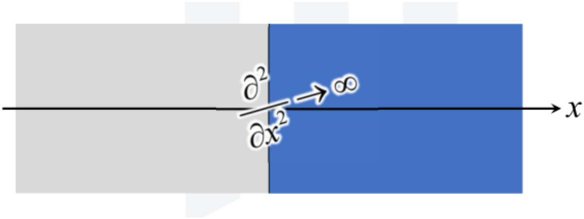
1. Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Οριακές συνθήκες

Συχνά λύνουμε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα με διαφορικές εξισώσεις.

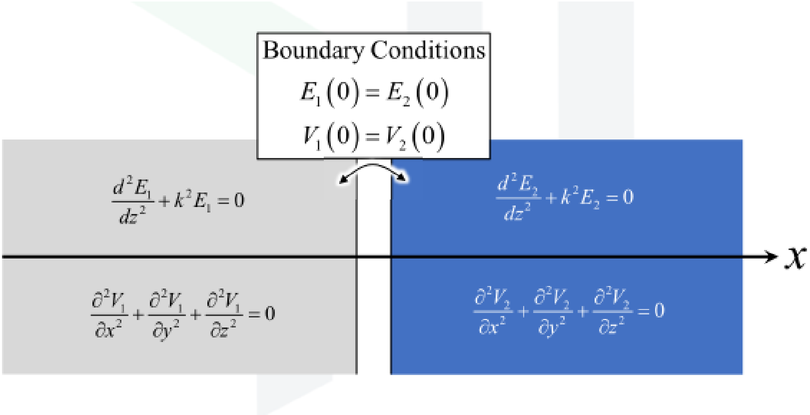
$$\frac{d^2E}{dz^2} + k^2E = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Μόνο που οι παράγωγοι απειρίζονται σε ασυνέχειες.



Οριακές συνθήκες (συνέχεια 1)

Άρα λύνουμε τις εξισώσεις σε κάθε περιοχή χωριστά και τις συνδέουμε στις διαχωριστικές επιφάνειες με τις οριακές συνθήκες.



Οριακές συνθήκες (συνέχεια 2)

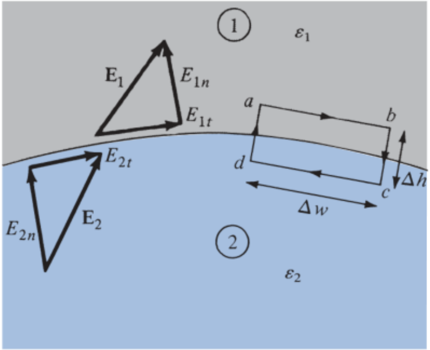
Και επειδή ολοκληρωτικές εξισώσεις δεν χρειάζονται οριακές συνθήκες αρκεί να μην περιέχουν παραγώγους, χρησιμοποιούμε

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \text{και} \qquad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc}$$

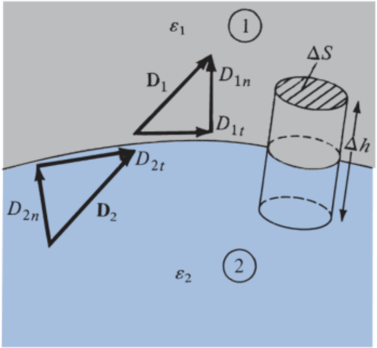
όπου Q_{enc} είναι το ελεύθερο φορτίο που εσωκλείεται από την επιφάνεια S. Βολεύει επίσης να «σπάσουμε» τα πεδία σε εφαπτόμενη και κάθετη συνιστώσα στη διαχωριστική επιφάνεια.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$$

Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό



(a)



(b)

Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό (συνέχεια 1)

Από το (a)

$$0 = E_{1t}\Delta w - E_{1n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2t}\Delta w + E_{2n}\frac{\Delta h}{2} + E_{1n}\frac{\Delta h}{2}$$

$$0 = (E_{1t} - E_{2t})\Delta w \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

Η εφαπτόμενη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι συνεχής και εφόσον $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$ έχουμε

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

η εφαπτόμενη συνιστώσα της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής είναι ασυνεχής.

Από το (b)

$$\Delta Q = \rho_S\Delta S = D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S \Rightarrow$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

και για $\rho_S = 0$ (μηδενικό ελεύθερο επιφανειακό φορτίο) η κάθετη συνιστώσα της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής είναι συνεχής:

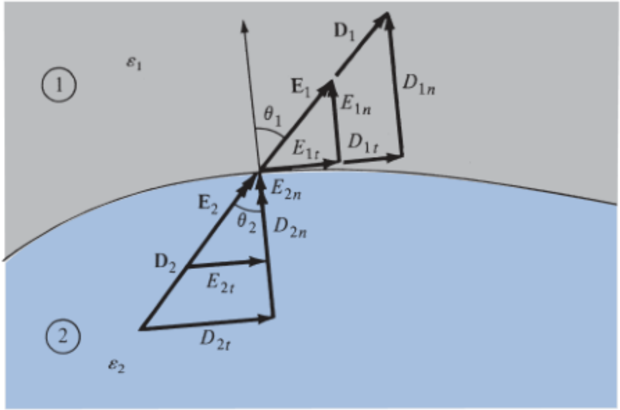
$$D_{1n} = D_{2n}$$

και η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ασυνεχής:

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό (συνέχεια 2)

Διάθλαση ηλεκτρικού πεδίου



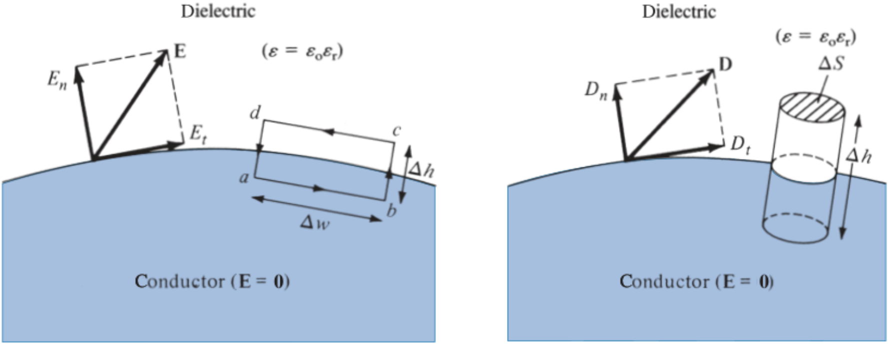
Διηλεκτρικό - διηλεκτρικό (συνέχεια 3)

$$E_1 \sin\theta_1 = E_{1t} = E_{2t} = E_2 \sin\theta_2$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = D_{1n} = D_{2n} = \epsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Αγωγός - διηλεκτρικό



(a) (b)

Αγωγός - διηλεκτρικό (συνέχεια 1)

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} + E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - E_t \cdot \Delta w - E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - 0 \cdot \frac{\Delta h}{2}$$

και καθώς $\Delta h \to 0$ έχουμε $E_t = 0$

$$\Delta Q = D_n \cdot \Delta S - 0 \cdot \Delta S \Rightarrow$$
$$D_n = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_S$$

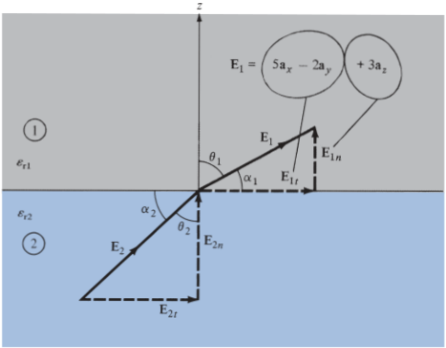
Συμπεράσματα:

- Μέσα στον αγωγό: $\rho_v = 0,\ \mathbf{E} = 0,\ \nabla V = 0.$
- Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει εξωτερικά του αγωγού και είναι κάθετο στην επιφάνεια του. Ηλεκτρική ασπίδα (κλωβός Faraday).

Παράδειγμα

Δυο ομογενή, εκτεταμένα, ισοτροπικά διηλεκτρικά έχουν κοινή επαφή το επίπεδο $z = 0$. Για $z > 0$, $\epsilon_{r1} = 4$ και για $z < 0$, $\epsilon_{r2} = 3$. Στο χώρο $z \geq 0$ έχουμε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_1 = (5, -2, 3)\ \mathrm{kV/m}$. Υπολογίστε:

- $\mathbf{E}_2$ για $z \leq 0$.
- Τις γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ με την διεπαφή.
- Την πυκνότητα ενέργειας σε $\mathrm{J/m^3}$ στα δυο διηλεκτρικά.
- Την ενέργεια σε κύβο ακμής $2\ \mathrm{m}$ με κέντρο στο $(3, 4, -5)$.



Παράδειγμα (λύση 1)

Κάθετες συνιστώσες: $\mathbf{E}_{1n} = (\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}} = (0,0,3)$ $\quad \mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}$

Επίσης, για παράλληλες συνιστώσες: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t \Rightarrow$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = (5,-2,0) \qquad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = (5,-2,0)$$

και για το $\mathbf{E}_2$

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \Rightarrow \mathbf{E}_{2n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\mathbf{E}_{1n} = \frac{4}{3}(3\hat{\mathbf{z}}) = 4\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} = (5,-2,4)\ \mathrm{kV/m}$$

Από το σχήμα, οι γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ με την διεπαφή:

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = 1.7951 \Rightarrow \theta_1 = 60.9^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ - \theta_1 = 29.1^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = 1.3463 \Rightarrow \theta_2 = 53.4^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ - \theta_2 = 36.6^\circ$$

Παράδειγμα (λύση 2)

Οι πυκνότητες ενέργειας:

$$w_{E1} = \frac{1}{2}\epsilon_1|\mathbf{E}_1|^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{10^{-9}}{36\pi}(25+4+9) \times 10^6 = 6.72 \times 10^{-4}\ \mathrm{J/m^3}$$

$$w_{E2} = \frac{1}{2}\epsilon_2|\mathbf{E}_2|^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{10^{-9}}{36\pi}(25+4+16) \times 10^6 = 5.97 \times 10^{-4}\ \mathrm{J/m^3}$$

Ο κύβος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή 2. Οπότε:

$$W_E = w_{E2} \times 2^3 = 4.775 \times 10^{-3}\ \mathrm{J} = 4.775\ \mathrm{mJ}$$

Ηλεκτροστατικά προβλήματα με οριακές συνθήκες

Ο προσδιορισμός του ηλεκτρικού πεδίου στα προηγούμενα γινόταν είτε με το νόμο Coulomb είτε με το νόμο Gauss εφόσον ήταν γνωστή η κατανομή του φορτίου. Εναλλακτικά, μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η σχέση $\mathbf{E} = -\nabla V$ εάν το δυναμικό πεδίο ήταν γνωστό στην περιοχή ενδιαφέροντος. Στην πράξη όμως και η κατανομή φορτίου και το δυναμικό πεδίο είναι άγνωστα.

Αυτό που συνήθως γνωρίζουμε είναι απλώς φορτίο και δυναμικό σε κάποια σύνορα, διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ υλικών και θέλουμε $\mathbf{E}$ και V για ολόκληρη την περιοχή. Σε αυτά τα προβλήματα χρησιμοποιούμε εξισώσεις Laplace ή Poisson ή μέθοδο ειδώλων (method of images) και τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα οριακών συνθηκών (boundary value problems).

Τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε μεταξύ άλλων στην εύρεση αντίστασης και χωρητικότητας για διάφορα ηλεκτρικά αντικείμενα / στοιχεία.

Εξισώσεις Poisson και Laplace

Για γραμμικά, ισότροπα υλικά ισχύει ο νόμος Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v$$

και για ηλεκτροστατικά πεδία

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, για ανομοιογενή υλικά:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

ενώ για ομογενή:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Οι παραπάνω δυο εξισώσεις αποτελούν την εξίσωση Poisson. Στην ειδική περίπτωση όπου $\rho_v = 0$ (περιοχή χωρίς ελεύθερα φορτία) έχουμε

$$\nabla^2 V = 0$$

την εξίσωση Laplace.

Εξισώσεις Poisson και Laplace (συνέχεια 1)

Εξίσωση Laplace στα τρια συστήματα συντεταγμένων

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0}$$

Χρησιμοποιείται και σε άλλα πεδία.

Θεώρημα μοναδικότητας (uniqueness theorem)

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων και το ερώτημα γεννάται αν δίνουν διαφορετικές λύσεις. Ή αλλιώς, εάν έχουμε μια λύση της εξίσωσης Laplace για συγκεκριμένες οριακές συνθήκες, υπάρχει κάποια άλλη; Διαφορετική; Η λύση που έχουμε είναι μοναδική; Απάντηση: Ναι. Η απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή.

Έστω δυο λύσεις V_1, V_2 της εξίσωσης Laplace που ικανοποιούν τις ίδιες οριακές συνθήκες. Άρα:

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0, \quad V_1 = V_2 \text{ στο σύνορο}$$

Για τη διαφορά τους $V_d = V_1 - V_2$ έχουμε:

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0, \quad V_d = 0 \text{ στο σύνορο}$$

Έστω $\mathbf{A} = V_d \nabla V_d$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

και τη σχέση $\nabla^2 V_d = 0$ έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

Θεώρημα μοναδικότητας (συνέχεια 1)

και με το θεώρημα απόκλισης:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο v και αποτελεί το σύνορο/όριο στο πρόβλημά μας, έχουμε:

$$\int_v \nabla V_d \cdot \nabla V_d \, dv = \oint_S V_d \nabla V_d \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_v |\nabla V_d|^2 \, dv = 0$$

που σημαίνει $|\nabla V_d| = 0$ παντού στο χώρο v και άρα V_d σταθερό παντού στο χώρο v συμπεριλαμβανομένου του συνόρου. Και επειδή $V_1 = V_2$ στο σύνορο, είναι ίσα και παντού στο χώρο v. Τελικά η λύση είναι μία και μοναδική.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η μοναδικότητα λύσης και για την εξίσωση Poisson.

Αναγκαία στοιχεία για λύση προβλήματος οριακών συνθηκών

- Η κατάλληλη διαφορική εξίσωση (Laplace ή Poisson).
- Οι συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.
- Η περιοχή λύσης.

Αν λείπει κάτι από τα παραπάνω δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη λύση.

Γενική διαδικασία

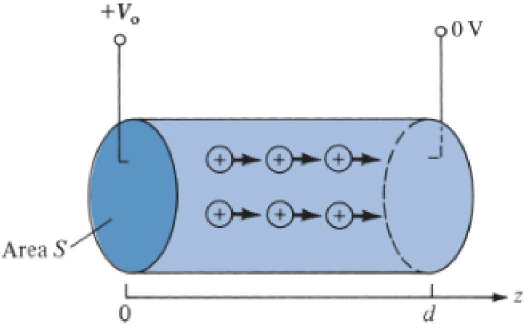
Η γενική διαδικασία για επίλυση προβλήματος οριακών συνθηκών είναι:

1. Επίλυση εξίσωσης Laplace ($\rho_v = 0$) ή Poisson ($\rho_v \neq 0$) είτε με απευθείας ολοκλήρωση αν η V είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής είτε με χωρισμό μεταβλητών αν η V είναι συνάρτηση περισσοτέρων της μιας μεταβλητής. Η λύση αυτή είναι γενική, με κάποιες άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης.
2. Από τις οριακές συνθήκες προσδιορίζονται αυτές οι σταθερές και η λύση γίνεται μοναδική.
3. Έχοντας το V, βρίσκουμε $\mathbf{E} = -\nabla V$, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$.
4. Μπορούμε να συνεχίσουμε στην εύρεση του φορτίου Q ενός αγωγού με $Q = \int_S \rho_S dS$, όπου $\rho_S = D_n$ η κάθετη συνιστώσα του $\mathbf{D}$ στον αγωγό. Η χωρητικότητα ενός ζεύγους αγωγών είναι τότε $C = Q/V$. Μπορούμε επίσης να βρούμε την αντίσταση $R = V/I$ όπου $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

Εφαρμογή 1

Η ηλεκτροδυναμική άντληση (Electrohydrodynamic pumping, EHD pumping) είναι μέθοδος μη μηχανικής άντλησης όπου διηλεκτρικό υγρό σε έντονο ηλεκτρικό πεδίο αλληλεπιδρά με φορτισμένα σωματίδια και κινείται. Η ροή του υγρού μπορεί να απάγει θερμότητα από στοιχεία που λειτουργούν σε συνθήκες υψηλής ισχύος και να επιτυγχάνει ψύξη.

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 1)



Έστω το παραπάνω μοντέλο EHD αντλίας. Η περιοχή μεταξύ των ηλεκτροδίων περιέχει μια ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ρ_0 που παράγεται στο αριστερό ηλεκτρόδιο και συλλέγεται στο δεξί. Υπολογίστε την πίεση της αντλίας εάν $\rho_0 = 25\ \mathrm{mC/m^3}$ και $V_0 = 22\ \mathrm{kV}$.

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 1)

Εφόσον $\rho_v \neq 0$ χρησιμοποιούμε εξίσωση Poisson με $\rho_v = \rho_0$:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\epsilon}$$

Η συμμετρία του προβλήματος και οι οριακές συνθήκες $V(z=0) = V_0$ και $V(z=d) = 0$ δείχνουν ότι η εξάρτησή μας είναι μόνο στην συντεταγμένη z. Οπότε

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon} \Rightarrow \cdots \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + Az + B$$

όπου A και B σταθερές ολοκλήρωσης. Εφαρμογή οριακών συνθηκών δίνει:

$$\text{για } z = 0, V = V_0 \qquad V_0 = B$$

$$\text{για } z = d, V = 0 \qquad 0 = -\frac{\rho_0 d^2}{2\epsilon} + Ad + V_0 \Rightarrow A = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}$$

$$\text{και} \quad V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + \left(\frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}\right) z + V_0$$

Εφαρμογή 1 (συνέχεια 2)

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\rho_0 z}{\epsilon} - \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} + \frac{V_0}{d}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

και η δύναμη:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{E} dq = \int_v \rho_0 \mathbf{E} dv = \rho_0 \int dS \int_{z=0}^{d} \mathbf{E} dz = \rho_0 S \left[\frac{V_0 z}{d} + \frac{\rho_0}{2\epsilon}(z^2 - zd)\right]\Bigg|_0^d \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F} = \rho_0 S V_0\, \hat{\mathbf{z}}$$

Η πίεση είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας:

$$P = \frac{F}{S} = \rho_0 V_0 = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^3 = 550\ \mathrm{N/m^2}$$

Σε ατμόσφαιρες, είναι 0.00543 atm.