Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 09

Α. Δροσόπουλος

09-11-2022

Outline

Topic

1. **Διαφορικός λογισμός και Ασκήσεις**

2. Δίπολο

Τυπολόγιο

Εσωτερικά γινόμενα

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta_{AB}$
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$
$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = (\nabla\cdot\mathbf{A})f + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

Εξωτερικά γινόμενα

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta_{AB}\ \hat{\mathbf{n}}$
$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$
$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$
$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$
$\nabla\times(f\mathbf{A}) = (\nabla\times\mathbf{A})f + (\nabla f)\times\mathbf{A}$

Τριπλά γινόμενα

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$
$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$
$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Διάφορα Θεωρήματα

Stoke's $\displaystyle\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$

Απόκλισης $\displaystyle\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{A})\ dV$

Καρτεσιανές: (x,y,z)
Βαθμωτό πεδίο: $f(x,y,z)$
Διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x,y,z) &= A_x(x,y,z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x,y,z)\hat{\mathbf{y}}\\ &+ A_z(x,y,z)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Διαφορικά:

$d\mathbf{l} = dx\ \hat{\mathbf{x}} + dy\ \hat{\mathbf{y}} + dz\ \hat{\mathbf{z}}$
$d\mathbf{S} = dydz\ \hat{\mathbf{x}} + dxdz\ \hat{\mathbf{y}} + dxdy\ \hat{\mathbf{z}}$
$dV = dxdydz$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\ \nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 A_x\ \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\ \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\ \hat{\mathbf{z}}\\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\ \nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}}\\ &+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Κυλινδρικές: (ρ,ϕ,z)
Βαθμωτό πεδίο: $f(\rho,\phi,z)$
Διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\rho,\phi,z) &= A_\rho(\rho,\phi,z)\,\hat{\boldsymbol{\varrho}} + A_\phi(\rho,\phi,z)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ &+ A_z(\rho,\phi,z)\,\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Διαφορικά:

$d\mathbf{l} = d\rho\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + \rho d\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\ \hat{\mathbf{z}}$
$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + d\rho dz\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \rho d\rho d\phi\ \hat{\mathbf{z}}$
$dV = \rho d\rho d\phi dz$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varrho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varrho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\ \nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 A_\rho\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + \nabla^2 A_\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla^2 A_z\ \hat{\mathbf{z}}\\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\ \nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\varrho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ &+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Σφαιρικές: (r,θ,ϕ)
Βαθμωτό πεδίο: $f(r,\theta,\phi)$
Διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(r,\theta,\phi) &= A_r(r,\theta,\phi)\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta(r,\theta,\phi)\,\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\\ &+ A_\phi(r,\theta,\phi)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}$$

Διαφορικά:

$d\mathbf{l} = dr\ \hat{\mathbf{r}} + rd\theta\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + r\sin\theta d\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\ \hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta dr d\phi\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + r dr d\theta\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\\ \nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 A_r\ \hat{\mathbf{r}} + \nabla^2 A_\theta\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \nabla^2 A_\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\\ \nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\vartheta}}\\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}$$

Άσκηση 2.11

Δείξτε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{και} \quad \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

όπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

Άσκηση 2.11 - Λύση

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}-\frac{1}{2}\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=-\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x'}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y'}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z'}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(-2)(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2)(y-y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(-2)(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}}=\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

Άσκηση 2.12

Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου σημειακού φορτίου.

Ηλεκτροστατικό πεδίο από σημειακό φορτίο Q:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

όπου $\mathbf{r}$ η θέση που υπολογίζουμε το πεδίο και $\mathbf{r}' = 0$ (επιλογή για δική μας ευκολία) η θέση που είναι στερεωμένο το Q. Η απόκλιση του πεδίου είναι $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Προφανώς βολεύουν σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right] = 0 \quad \text{για} \quad r \neq 0$$

Αν πάρουμε το όριο για $r \to 0$ τότε $\nabla \cdot \mathbf{E} \to \infty$. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσω μιας σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το φορτίο είναι

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

σε συμφωνία με το νόμο του Gauss.

Άσκηση 2.12 (2)

Σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

κάτι πεπερασμενο. Το κλειδί είναι το $r = 0$. Ο νόμος Gauss σε διαφορική μορφή είναι $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ όπου ρ η πυκνότητα του φορτίου. Θέλουμε λοιπόν κάτι που να απειρίζεται στο μηδέν αλλά όταν ολοκληρώνουμε σε μια απειροστή περιοχή γύρω του να έχουμε κάτι πεπερασμένο. Αυτός είναι και ο ορισμός της συνάρτησης δ του Dirac. Επομένως η απόκλιση για όλα τα r συμπεριλαμβανομένου και του $r = 0$ είναι:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

και για φορτίο στη θέση $\mathbf{r}'$ γενικεύεται:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Άσκηση 2.13

Το ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου είναι

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

όπου λ σταθερά. Δείξτε ότι το $\mathbf{E}$ είναι σωληνοειδές και συντηρητικό.

Σωληνοειδές όταν $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Συντηρητικό όταν $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Το $\mathbf{E}$ είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες με $\mathbf{E} = E_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}}$ όπου $E_\rho = \lambda/(2\pi\epsilon\rho)$. Επομένως:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right) - \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right)\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\right)\hat{\mathbf{z}} = 0$$

Άσκηση 2.14

Το πεδίο ηλεκτρικού διπόλου δίδεται από

$$\mathbf{E} = k\frac{(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})}{r^3}$$

όπου k σταθερά. Δείξτε ότι το $\mathbf{E}$ είναι συντηρητικό.

Πρέπει $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Οπότε, σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(E_\phi \sin\theta\Big) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(rE_\phi\Big)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rE_\theta\Big) - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k\sin\theta}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2k\cos\theta}{r^3}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{r}\left[-\frac{2k\sin\theta}{r^3} + \frac{2k\sin\theta}{r^3}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$$

Άσκηση 2.15

Δώστε την αναλυτική έκφραση του $\mathbf{E}$ στις περιπτώσεις: $V_1 = x^3 + 2x^2y + 3y^2z$ και $V_2 = (x-2)(y-4)+8$. Προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η ένταση του πεδίου είναι μηδέν.

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(x^3 + 2x^2y + 3y^2z\right) = -(3x^2+4xy)\,\hat{\mathbf{x}} - (2x^2+6yz)\,\hat{\mathbf{y}} - 3y^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

Για $\mathbf{E}_1 = 0$ πρέπει οι τρεις συνιστώσες να μηδενίζονται και αυτό γίνεται για $x = 0$, $y = 0$, z οτιδήποτε, δηλ. άξονας z.

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\Big((x-2)(y-4)+8\Big) = -(y-4)\,\hat{\mathbf{x}} - (x-2)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Για $\mathbf{E}_2 = 0$ πρέπει οι τρεις συνιστώσες να μηδενίζονται και αυτό γίνεται για $x = 2$, $y = 4$, z οτιδήποτε, δηλ. τομή επιπέδων $x = 2$, $y = 4$, γραμμή παράλληλη στον άξονα z.

Άσκηση 2.16

Ποια από τα παρακάτω ηλεκτρικά πεδία είναι ηλεκτροστατικά; Ποια ικανοποιούν την εξίσωση Laplace; Οι ποσότητες c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές.

$$\mathbf{E}_1 = (c_1 x, c_2 x, c_3 z) \quad \mathbf{E}_2 = (c_1 yz, c_2 zx, c_3 xy) \quad \mathbf{E}_3 = (c_1 x, c_2 y, c_3 z) \quad \mathbf{E}_4 = (c_1 xy, c_2 yz, c_3 zx)$$

Για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο ισχύει $\mathbf{E} = -\nabla V$ και ισχύει $\nabla \times (\nabla V) = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$. Η τελευταία σχέση μάλιστα βγαίνει κατευθείαν από τον νόμο Faraday (εξίσωση Maxwell): $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, επειδή στα ηλεκτροστατικά πεδία δεν έχουμε μεταβολές στο χρόνο και επομένως $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$.

Για $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Οπότε:

Άσκηση 2.16 (2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1: &\quad \nabla \times \mathbf{E}_1 = (0, 0, c_2) \neq 0 \\
\mathbf{E}_2: &\quad \nabla \times \mathbf{E}_2 = (c_3 x - c_2 x, c_1 y - c_3 y, c_2 z - c_1 z) \neq 0 \\
\mathbf{E}_3: &\quad \nabla \times \mathbf{E}_3 = (0, 0, 0) = 0 \\
\mathbf{E}_4: &\quad \nabla \times \mathbf{E}_4 = (-c_2 y, -c_3 z, -c_1 x) \neq 0
\end{aligned}$$

Μόνο το $\mathbf{E}_3$ είναι ηλεκτροστατικό.

Η εξίσωση Laplace είναι $\nabla^2 V = 0$. Από $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = 0$ βγαίνει ότι θέλουμε $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1: &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = c_1 \neq 0 \\
\mathbf{E}_2: &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \\
\mathbf{E}_3: &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_3 = c_3 + c_2 + c_1 \neq 0 \\
\mathbf{E}_4: &\quad \nabla \cdot \mathbf{E}_4 = c_2 z + c_3 x + c_1 y \neq 0
\end{aligned}$$

Μόνο το $\mathbf{E}_2$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Άσκηση 2.17

Να βρεθεί η συνάρτηση $q(r)$ για την οποία $\nabla \cdot [q(r)\mathbf{r}] = 0$.

Έχουμε $\nabla \cdot [q(r)\mathbf{r}] = \nabla \cdot [q(r)\ r\ \hat{\mathbf{r}}]$ με την συνάρτηση που θέλουμε να υπολογίσουμε την απόκλιση να είναι συνάρτηση μόνο του r. Επιλέγουμε σφαιρικές συντεταγμένες και έχουμε:

$$\nabla \cdot [q(r)\ r\ \hat{\mathbf{r}}] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2 q(r) r] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^3 q(r)] = \frac{1}{r^2}\left(3r^2 q + r^3 q'\right) = 3q + rq' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{q'}{q} = -\frac{3}{r} \Rightarrow \ln q = -3\ln r = \ln r^{-3} \Rightarrow q(r) = cr^{-3}$$

Άσκηση 2.18

Να υπολογιστούν οι συνιστώσες E_x, E_y και η πυκνότητα του φορτίου ρ ηλεκτρικού πεδίου με δυναμικό $V = cx/y$, όπου c σταθερή ποσότητα.

$$V = c\frac{x}{y} \qquad \nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(c\frac{x}{y}\right) = c\left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0\right)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left(-\frac{c}{y}, \frac{cx}{y^2}, 0\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(-\frac{c}{y}, \frac{cx}{y^2}, 0\right) = -\frac{2\epsilon_0 cx}{y^3}$$

Άσκηση 2.20

Φορτίο κατανέμεται εντός σφαίρας με ακτίνα r_0 και πυκνότητα φορτίου $\rho = a/r$ όπου a σταθερά. Να υπολογιστούν $\mathbf{E}$ και V εντός και εκτός της σφαίρας. Να υπολογιστεί η τιμή του a συναρτήσει του ολικού φορτίου q και της ακτίνας r_0.

$$\text{ολικό φορτίο} \quad q = \int_v \rho dv = \int_{r=0}^{r_0} \frac{a}{r} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{a r_0^2}{2} \times 2 \times 2\pi = 2\pi a r_0^2 \Rightarrow a = \frac{q}{2\pi r_0^2}$$

Εντός σφαίρας όπου $r < r_0$

$$\epsilon_0 \int E dS = \int \rho dv \Rightarrow \epsilon_0 E 4\pi r^2 = 2\pi a r^2 \Rightarrow E = \frac{a}{2\epsilon_0} \quad \text{και} \quad \mathbf{E} = \frac{a}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Στην επιφάνεια της σφαίρας το δυναμικό είναι σαν σημειακού φορτίου:

$$V(r = r_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{2\pi a r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{a r_0}{2\epsilon_0}$$

$$V = -\int E dr = -\frac{a}{2\epsilon_0} r + A \Rightarrow \frac{a r_0}{2\epsilon_0} = -\frac{a}{2\epsilon_0} r_0 + A \Rightarrow A = \frac{a r_0}{\epsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{a}{2\epsilon_0} r + \frac{a r_0}{\epsilon_0} = \frac{a}{\epsilon_0}\left(r_0 - \frac{r}{2}\right)$$

Εκτός σφαίρας όπου $r > r_0$ όλα είναι σαν σημειακού φορτίου:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2\pi a r_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{a r_0^2}{2\epsilon_0 r^2} \qquad \mathbf{E} = \frac{a r_0^2}{2\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{a r_0^2}{2\epsilon_0 r}$$

Άσκηση 2.21

Εξετάστε αν το πεδίο $\mathbf{D} = (3\rho + 1)\sin\phi\,\hat{\mathbf{z}}$ είναι σωληνοειδές.

Πρέπει $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Έχουμε, σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho D_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial[(3\rho + 1)\sin\phi]}{\partial z} = 0$$

Άσκηση 2.22

Αν $V = (5\cos\phi)/r^2$ βρείτε ∇V, $\nabla \cdot \nabla V$, $\nabla \times \nabla V$.

Έχουμε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{10\cos\phi}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{5\sin\phi}{r^3\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = \frac{10\cos\phi}{r^4} - \frac{5\cos\phi}{r^4\sin^2\theta} = \frac{5\cos\phi}{r^4}\left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= -\frac{5\cos\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{10\sin\phi}{r^4\sin\theta} + \frac{10\sin\phi}{r^4\sin\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{5\cos\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{20\sin\phi}{r^4\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

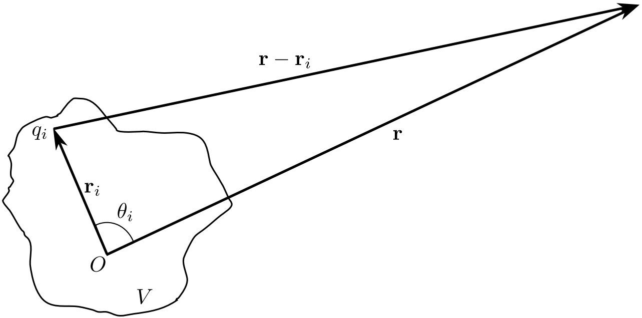
Topic

1. Διαφορικός λογισμός και Ασκήσεις
2. Δίπολο

Ηλεκτρικό δίπολο

Έστω N σημειακά φορτία q_i, στις θέσεις $\mathbf{r}_i$, σε όγκο V. Το δυναμικό σε σημείο $\mathbf{r}$ είναι

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}$$



Σχήμα: Σύστημα σημειακών φορτίων με διανύσματα θέσης πεδίου και πηγών $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_i$ αντίστοιχα.

Ηλεκτρικό δίπολο 2

Έχουμε

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^2 = r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\theta_i = r^2\left[1 - 2\cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Με το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

$$\text{με} \quad n = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x = -2\cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \quad \text{έχουμε}$$

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 + \cos\theta_i\left(\frac{r_i}{r}\right) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta_i - 1)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + \cdots\right.$$

Ηλεκτρικό δίπολο 3

Το δυναμικό γίνεται

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^2 \frac{3\cos^2\theta_i - 1}{2} + \cdots =$$

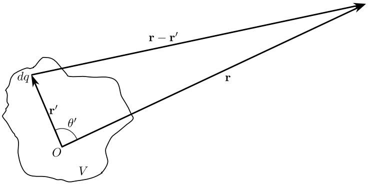
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{n=0}^{N} q_i \left(\frac{r_i}{r}\right)^n P_n(\cos\theta_i)$$

και για συνεχή κατανομή με πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r}')$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_V \rho(\mathbf{r}')dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int_V \rho(\mathbf{r}')r'\cos\theta'\,dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_V \rho(\mathbf{r}')r'^2\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}dV + \cdots =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{r^{(n+1)}}\int (r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}')dV$$

όπου $P_n(\cos\theta)$ τα πολυώνυμα Legendre.



Σχήμα: Συνεχή κατανομή φορτίου με διανύσματα θέσης πεδίου και πηγών $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ αντίστοιχα.

Ηλεκτρικό δίπολο 4

- Υπενθυμίζεται ότι θεωρούμε το πεδίο μακρυά από τις πηγές.
- Τα παραπάνω αναπτύγματα είναι οι πολυπολικές εκφράσεις του δυναμικού. Οι όροι των αναπτυγμάτων ονομάζονται με τη σειρά: μονοπολικός, διπολικός, τετραπολικός και εξαρτώνται από το $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ αντίστοιχα.
- Αριθμητής του πρώτου όρου είναι το ολικό φορτίο Q. Για $Q \neq 0$ είναι ο σημαντικότερος όρος με όλους τους άλλους αμελητέους. Το δυναμικό είναι ίσο με σημειακού φορτίου Q στην αρχή των αξόνων.
- Αριθμητής του δεύτερου όρου είναι η προβολή στο $\mathbf{r}$ της ποσότητας

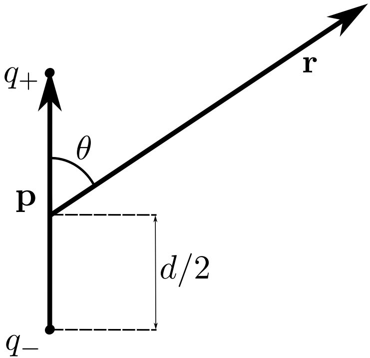
$$\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \qquad \text{ή} \qquad \int_V \rho(\mathbf{r}')r' dV$$

  Η ποσότητα αυτή λέγεται διπολική ροπή του συστήματος φορτίων q_i ή της κατανομής $\rho(\mathbf{r}')$.
- Για $Q = 0$ ο μονοπολικός όρος μηδενίζεται και ο ισχυρότερος είναι ο διπολικός.
- Η απλούστερη περίπτωση για $Q = 0$ είναι σύστημα δυο ίσων και ετεροσήμων φορτίων q_+, q_- σε απόσταση d. Το σύστημα αυτό λέγεται ηλεκτρικό δίπολο.

Ηλεκτρικό δίπολο 5

Από τον διπολικό όρο έχουμε

$$\sum_{i=1}^{2} q_i r_i \cos\theta_i = q\frac{d}{2}\Big[\cos\theta - \cos(\pi-\theta)\Big] = qd\cos\theta = p\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}$$



Σχήμα: Δίπολο και ηλεκτρική ροπή

Ηλεκτρικό δίπολο 6

όπου $\mathbf{p}$ η ηλεκτρική ροπή του διπόλου με μέτρο qd και φορά από το αρνητικό στο θετικό φορτίο. Για μακρινές αποστάσεις από το δίπολο $(r \gg d)$ το πεδίο του θετικού φορτίου εξουδετερώνεται σχεδόν από το πεδίο του αρνητικού (όχι εντελώς) αλλά σε κοντινές αποστάσεις η διαφορά είναι μεγάλη και δεν αρκεί ο διπολικός όρος από μόνος του να αποδώσει το δυναμικό (θυμηθείτε την αρχική προσέγγιση).

Όταν ο διπολικός όρος είναι μηδέν ο σημαντικότερος όρος είναι ο τετραπολικός, κ.ο.κ.

Το δυναμικό διπόλου με κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων είναι

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

και με κέντρο διπόλου στο $\mathbf{r}'$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$$

Ηλεκτρικό δίπολο 7

Το ηλεκτρικό πεδίο για κέντρο διπόλου στην αρχή των αξόνων σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{E} = -\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] = \frac{qd\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{qd\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Παρατηρούμε εδώ ότι το σημειακό ηλεκτρικό φορτίο, μόνο του, αποτελεί *μονόπολο* και το ηλεκτρικό πεδίο του μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με r^2 ενώ το δυναμικό του αντιστρόφως ανάλογα με r. Για το δίπολο οι μεταβολές είναι r^3 και r^2 αντίστοιχα. Οι δομές αυτές επεκτείνονται και σε μεγαλύτερης τάξης πολύπολα με αντίστοιχες μεταβολές σε πεδίο και δυναμικό.

Απεικόνιση ηλεκτρικής ροής

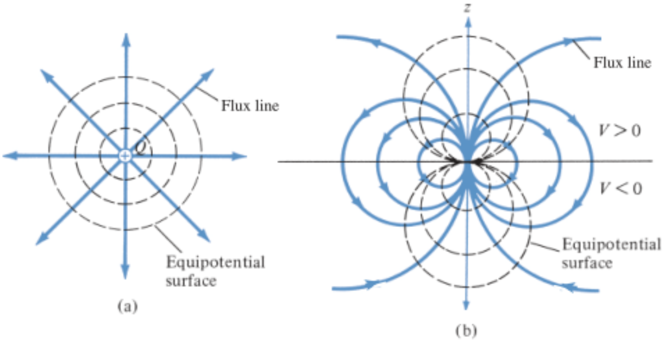
Η ηλεκτρική ροή ή ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές είναι φανταστικές γραμμές στο χώρο με κατεύθυνση σε κάθε σημείο του χώρου την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε εκείνο το σημείο. Με άλλα λόγια είναι οι γραμμές όπου το διάνυσμα της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής $\mathbf{D}$ (και του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ για απλά υλικά) είναι παντού εφαπτόμενο. Την έννοια αυτή την εισήγαγε ο Faraday σαν τρόπο απεικόνισης του ηλεκτρικού πεδίου.

Κάθε επιφάνεια όπου όλα τα σημεία της έχουν ίδιο δυναμικό ονομάζεται *ισοδυναμική επιφάνεια*. Το έργο που καταναλώνεται για μετακίνηση φορτίων σε ισοδυναμική επιφάνεια είναι μηδέν ($U_A - U_B = 0$) επομένως

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

σε αυτές τις επιφάνειες. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές ροής είναι πάντοτε κάθετες σε ισοδυναμικές επιφάνειες.

Απεικόνιση ηλεκτρικής ροής 2



Σχήμα: Παραδείγματα ροής και ισοδυναμικών επιφανειών για σημειακό φορτίο και δίπολο

Η σημασία θα φανεί στη μελέτη ηλεκτρικών αγωγών όπου η εξωτερική τους επιφάνεια είναι ισοδυναμική.

Απεικόνιση ηλεκτρικής ροής 3

Μια άλλη ενδιαφέρουσα τυπική εφαρμογή είναι η απεικόνιση της ανθρώπινης καρδιάς. Η καρδιά κτυπά σαν απόκριση στην ηλεκτρική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της και μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ηλεκτρικό δίπολο με παρόμοιες γραμμές ροής και ισοδυναμικές επιφάνειες. Τέτοιου είδους απεικονίσεις βοηθούν στην ανίχνευση καρδιακών προβλημάτων.

Από διαλέξεις Ηλεκτρομαγνητισμού Walter Lewin

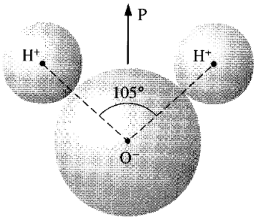
- walt07, dipole probe, grass seeds, bouncing balloon

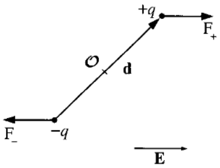
link για τα video του Walter (111 MB).

Ηλεκτρικό δίπολο 8

Δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο υφίσταται ζεύγος δυνάμεων, $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ και $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$ που εφαρμόζει ροπή

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) = \left[\frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E})\right] + \left[-\frac{\mathbf{d}}{2} \times (-q\mathbf{E})\right] = q\mathbf{d} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$





Σχήμα: Μόριο νερού (αριστερά). Ζεύγος δυνάμεων σε δίπολο (δεξιά).