Ηλεκτρομανητισμός - Πρόοδος 2

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

2022-01-20

1 Θέμα (3 μον.)

Σε μονοδιάστατο στοιχείο η πυκνότητα φορτίου δίνεται από $\rho = \rho_0 (x/a)^2$. Εάν $\mathbf{E} = 0$ στο $x = 0$ και $V = 0$ στο $x = a$, υπολογίστε V και $\mathbf{E}$.

Λύση

Από εξίσωση Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ έχουμε:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 a^2}\,x^2 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 a^2}\,\frac{x^3}{3} + K_1 \Rightarrow V(x) = -\frac{\rho_0}{12\epsilon_0 a^2}\,x^4 + K_1 x + K_2$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left[\frac{\rho_0}{3\epsilon_0 a^2}\,x^3 - K_1\right]\hat{\mathbf{x}}$$

Από $\mathbf{E}(0) = 0$ έχουμε $K_1 = 0$. Από $V(a) = 0$ έχουμε:

$$0 = -\frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} + K_2 \Rightarrow K_2 = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

Οπότε:

$$V(x) = -\frac{\rho_0}{12\epsilon_0 a^2}\,x^4 + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} = -\frac{\rho_0}{12\epsilon_0 a^2}\left[x^4 - a^4\right] \qquad \mathbf{E} = \left[\frac{\rho_0}{3\epsilon_0 a^2}\,x^3\right]\hat{\mathbf{x}}$$

2 Θέμα (2 μον.)

Να δειχθεί ότι $\nabla \cdot [r^n \mathbf{r}] = (n+3) r^n$.

Λύση

$$\nabla \cdot [r^n \mathbf{r}] = \nabla \cdot [r^{n+1}\hat{\mathbf{r}}] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 r^{n+1}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+3}\right) = \frac{1}{r^2}(n+3)r^{n+2} = (n+3)r^n$$

3 Θέμα (2 μον.)

Να βρεθεί η Laplacian $\nabla^2 V$ για το βαθμωτό πεδίο $V = r^3(1 + \cos\theta)$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο σημείο $(5, \pi/7, \pi/15)$.

Λύση

Από τυπολόγιο Διάλεξη 2, σελ 61, για σφαιρικές συντεταγμένες καταλήγουμε:

$$\nabla^2 V = 10\, r \cos\theta + 12\, r$$

Στο σημείο $(5, \pi/7, \pi/15)$ έχουμε

$$50\cos(\pi/7) + 60 = 105.048$$

4 Θέμα (3 μον.)

Σε μη μαγνητικό μέσο έχουμε $\mathbf{E} = 12\cos(\omega t - \beta x)\,\hat{\mathbf{z}}$ V/m όπου $f = 5.4$ MHz και $\beta = 0.75$ rad/m. Να βρεθούν:

1. ϵ_r, η.
2. Η μέση ισχύς που μεταφέρεται από το κύμα.
3. Η ολική ισχύς που διαπερνά 65 cm^2 της επιφάνειας $5x + 2y = 20$.

Δίδονται: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Λύση

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2 = 43.976$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = 56.81\ \Omega$$

Για τη μέση ισχύ έχουμε

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\omega t - \beta x)\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}\,dt = \frac{E_0^2}{\eta}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \beta x)\,dt\,\hat{\mathbf{x}} = \frac{E_0^2}{2\eta}\,\hat{\mathbf{x}} = 1.267\,\hat{\mathbf{x}}\ \text{W/m}^2$$

Αν έχουμε μια επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

οπότε, για την επιφάνεια $f(x, y, z) = 5x + 2y - 20$ έχουμε

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{5\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{29}}$$

Άρα η ολική ισχύς που διαπερνά 65 cm^2 αυτής της επιφάνειας είναι:

$$P = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_m \cdot S\hat{\mathbf{a}}_n = (1.267\,\hat{\mathbf{x}})(65 \times 10^{-4})\left(\frac{5\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{29}}\right) = 7.649\ \text{mW}$$