Ασκήσεις 02

Ηλεκτρομαγνητισμός

Α. Δροσόπουλος

18 Ιανουαρίου 2022

1 Ασκήσεις Λυμένες

1.1 Άσκηση

Δίδεται διανυσματικό πεδίο $\mathbf{H} = (10/r^2)\ \hat{\mathbf{r}}$. Ποια είναι η κυκλοφορία του;

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

Οπότε, σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(H_\phi \sin\theta\Big) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(rH_\phi\Big)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rH_\theta\Big) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$$

Που σημαίνει κυκλοφορία

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$

1.2 Άσκηση

Εξετάστε αν το πεδίο $\mathbf{B} = (3x^2z + y^2)\ \hat{\mathbf{x}} + 2xy\ \hat{\mathbf{y}} + x^3\ \hat{\mathbf{z}}$ είναι συντηρητικό.

Λύση

Πρέπει $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Έχουμε, σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} =$$

$$0\hat{\mathbf{x}} + (3x^2 - 3x^2)\hat{\mathbf{y}} + (2y - 2y)\hat{\mathbf{z}} = 0$$

Άρα, είναι συντηρητικό.

1.3 Άσκηση

Δέσμη ηλεκτρονίων σχηματίζει ρεύμα πυκνότητας

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_0\left(1 - \dfrac{\rho^2}{a^2}\right)\ \hat{\mathbf{z}} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

Προσδιορίστε a) το ολικό ρεύμα και b) το $|\mathbf{H}|$ για όλα τα ρ.

Λύση

Το ολικό ρεύμα που περνά από κύκλο ακτίνας a στο επίπεδο $z = 0$ με κέντρο $(0, 0, 0)$:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \, \hat{\mathbf{z}} \cdot (\rho d\phi d\rho \, \hat{\mathbf{z}}) = J_0 2\pi \int_0^a \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \rho d\rho =$$

$$= J_0 \pi \int_{\rho=0}^{a} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) d(\rho^2) = J_0 \pi \left(a^2 - \frac{a^4}{2a^2}\right) = \frac{J_0 \pi a^2}{2}$$

Με το νόμο ρεύματος Ampere

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I$$

Επιλέγουμε διαδρομή Ampere κύκλο ακτίνας ρ στο επίπεδο $z = 0$ με κέντρο $(0, 0, 0)$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\rho < a$ και $\rho > a$. Με τον κανόνα δεξιού χεριού θα έχουμε $\mathbf{H} = H_\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Οπότε, για $\rho < a$

$$\oint_L H_\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \rho d\phi \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = H_\phi \rho 2\pi = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J_0 \pi \int_{\rho=0}^{\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) d(\rho^2) = J_0 \pi \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{2a^2}\right) \Rightarrow$$

$$H_\phi = \frac{J_0 \pi \rho^2}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right) = \frac{J_0 \rho}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right) = \frac{J_0 \rho}{4} \left(2 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

Και για $\rho > a$

$$H_\phi \rho 2\pi = \frac{J_0 \pi a^2}{2} \Rightarrow H_\phi = \frac{J_0 \pi a^2}{4\pi\rho} = \frac{J_0 a^2}{4\rho}$$

1.4 Άσκηση

Έχουμε $\mathbf{B} = \dfrac{20}{\rho} \sin^2 \phi \, \hat{\mathbf{z}} \, \mathrm{Wb/m^2}$. Προσδιορίστε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από το επίπεδο $z = 0, 1 < \rho < 2\,\mathrm{m}, 0 < \phi < \pi/4$.

Λύση

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{20}{\rho} \sin^2 \phi \, \hat{\mathbf{z}} \cdot \rho d\phi d\rho \, \hat{\mathbf{z}} = 20 \int_{\rho=1}^{2} d\rho \int_{\phi=0}^{\pi/4} \sin^2 \phi d\phi = 20 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = 2.854 \text{ Wb}$$

1.5 Άσκηση

Θεωρείστε τα παρακάτω πεδία.

$$\mathbf{F}_1 = y^2 z \, \hat{\mathbf{x}} + 2(x+1)yz \, \hat{\mathbf{y}} - (x+1)z^2 \, \hat{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{F}_2 = \frac{(z+1)}{\rho} \cos\phi \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\sin\phi}{\rho} \, \hat{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{F}_3 = \frac{1}{r^2}(2\cos\theta \, \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Ποιο από αυτά αντιπροσωπεύει ηλεκτροστατικό ή μαγνητοστατικό πεδίο στο κενό;

Λύση

Οι εξισώσεις Maxwell για στατικά πεδία στο κενό είναι:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v/\epsilon_0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Επομένως εξετάζουμε απόκλιση και στροβιλισμό. Από το τυπολόγιο, διάλεξη 2, σελ 49, έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{F}_1 = -2(x+1)y \, \hat{\mathbf{x}} + (y^2 + z^2) \, \hat{\mathbf{y}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = 0 + 2(x+1)z - 2(x+1)z = 0$$

Ταιριάζει για μαγνητοστατικό πεδίο. Μηδενική απόκλιση, μη μηδενικός στροβιλισμός.

$$\nabla \times \mathbf{F}_2 = \frac{\cos\phi}{\rho^2} \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\cos\phi}{\rho} + \frac{\sin\phi}{\rho^2}\right) \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{(z+1)\sin\phi}{\rho^2} \, \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_2 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ταιριάζει για μαγνητοστατικό πεδίο. Μηδενική απόκλιση, μη μηδενικός στροβιλισμός.

$$\nabla \times \mathbf{F}_3 = \frac{\sin\theta}{r^3}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_3 = 0 + \frac{2\cos(\theta)}{r^3} + 0 = \frac{2\cos(\theta)}{r^3}$$

Δεν φαίνεται να είναι στατικό πεδίο. Μη μηδενική απόκλιση, μη μηδενικός στροβιλισμός.

1.6 Άσκηση

Στο κενό, έχουμε $\mathbf{A} = 10\sin(\pi y)\,\hat{\mathbf{x}} + \Big(4 + \cos(\pi x)\Big)\,\hat{\mathbf{z}}$ Wb/m. Ποια είναι τα **H** και **J**;

Λύση

$$\mathbf{A} = 10\sin(\pi y)\,\hat{\mathbf{x}} + \Big(4 + \cos(\pi x)\Big)\,\hat{\mathbf{z}}\ \text{Wb/m} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\,\hat{\mathbf{z}}\right] = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\,\hat{\mathbf{z}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{\mu_0}\Big(\sin(\pi x)\,\hat{\mathbf{y}} - 10\cos(\pi y)\,\hat{\mathbf{z}}\Big)\ \text{A/m}$$
$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} =$$
$$= \frac{\pi^2}{\mu_0}\Big(10\sin(\pi y)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos(\pi x)\,\hat{\mathbf{z}}\Big)\ \text{A/m}^2$$

1.7 Άσκηση

Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό μιας κατανομής ρεύματος στο κενό είναι $\mathbf{A} = 15e^{-\rho}\sin\phi\,\hat{\mathbf{z}}$ Wb/m. Βρείτε το $|\mathbf{H}|$ στο $(3, \pi/4, -10)$. Υπολογίστε τη ροή μέσω της επιφάνειας $\rho = 5, 0 \le \phi \le \pi/2, 0 \le z \le 10$.

Λύση

$$\mathbf{A} = 15e^{-\rho}\sin\phi\,\hat{\mathbf{z}}\ \text{Wb/m} = A_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

Από διάλεξη 2, σελ 61, κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{15e^{-\rho}\cos\phi}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + 15e^{-\rho}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Για το κενό στο $(3, \pi/4, -10)$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \Rightarrow |\mathbf{H}| = 6.11 \times 10^5\ \text{A/m}$$

```
octave:2> mu0 = 4*pi*1e-7;
octave:3> rho=3; phi=pi/4; z=-10;
octave:4> B = [15*exp(-rho)*cos(phi)/rho 15*exp(-rho)]
B =
   0.1760   0.7468
octave:5> H=norm(B)/mu0
H = 6.1057e+05
```

Για τη ροή μέσω της επιφάνειας $\rho = 5, 0 \le \phi \le \pi/2, 0 \le z \le 10$

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}\cdot(\rho d\phi dz)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \int_S \frac{15e^{-\rho}\cos\phi}{\rho}\rho d\phi dz = 15e^{-\rho}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\cos\phi d\phi\int_0^{10} dz = 150e^{-5} = 1.011\ \text{Wb}$$

1.8 Άσκηση

Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό σε κάποια απόσταση από ένα μικρό κυκλικό βρόχο δίδεται από

$$\mathbf{A} = \frac{A_0}{r^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\ \mathrm{Wb/m}$$

όπου A_0 σταθερά. Προσδιορίστε τη πυκνότητα μαγνητικής ροής **B**.

Λύση

$$\mathbf{A} = \frac{A_0}{r^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Από διάλεξη 2, σελ 49, σφαιρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{A_0}{r^2}\sin^2\theta\right) = \frac{A_0}{r^2}2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_0}{r}\sin\theta\right) = -\frac{A_0\sin\theta}{r^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{A_0}{r^2}2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{A_0\sin\theta}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{A_0}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\ \mathrm{Wb/m^2}$$

2 Ασκήσεις προς λύση

2.1 Άσκηση

Ένα αγώγιμο επίπεδο άπειρης έκτασης στη θέση $z=0$ έχει δυναμικό μηδέν και ένα άλλο στη θέση $z=d, V_0$. Με επίλυση της εξίσωσης Laplace να υπολογιστεί το $V(z)$ στο διάστημα $0<z<d$. Επίσης να υπολογιστεί το **E** και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε επιφάνεια.

$$\text{Απ.}\quad \frac{V_0}{d}\,z,\ -\frac{V_0}{d}\,\hat{\mathbf{z}},\ \sigma(z=0) = -\frac{V_0\epsilon_0}{d}$$

2.2 Άσκηση

Αν $\mathbf{r} = (x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης με $r = |\mathbf{r}|$ δείξτε ότι

- $\nabla(\ln r) = \mathbf{r}/r^2$
- $\nabla^2(\ln r) = 1/r^2$

2.3 Άσκηση

Να βρεθεί η Laplacian $\nabla^2 V$ για κάθε ένα από τα παρακάτω βαθμωτά πεδία:

- $V_1 = x^3 + y^3 + z^3$
- $V_2 = \rho z^2\sin 2\phi$
- $V_3 = r^2(1+\cos\theta\sin\phi)$

$$\text{Απ.}\quad 6(x+y+z),\quad 2\rho\sin(2\phi) - 3z^2\sin(2\phi)/\rho,\quad 6+4\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\phi/\sin^2\theta$$

2.4 Άσκηση

Να βρεθεί η Laplacian των παρακάτω βαθμωτών πεδίων και να υπολογιστεί η τιμή της στο συγκεκριμένο σημείο.

$$U = x^3 y^2 e^{xz},\ (1,-1,1) \qquad V = \rho^2 z(\cos\phi + \sin\phi),\ (5,\pi/6,-2) \qquad W = e^{-r}\sin\theta\cos\phi,\ (1,\pi/3,\pi/6)$$

Απ.

$$\nabla^2 U = \Big[x^3 y^2 z^2 + 6x^2 y^2 z + 2x^3 + (x^5 + 6x)y^2\Big] e^{xz},\ 43.493$$

$$\nabla^2 V = 3z(\cos\phi + \sin\phi),\ -8.1962$$

$$\nabla^2 W = e^{-r}\left(1 - \frac{2}{r} - \frac{2}{r^2}\right)\cos\phi\sin\theta,\ -0.8277$$

2.5 Άσκηση

Να δειχθεί ότι $\nabla \cdot [r^n \mathbf{r}] = (n+3)r^n$.

2.6 Άσκηση

Σε μονοδιάστατο στοιχείο η πυκνότητα φορτίου δίνεται από $\rho_v = \rho_0 x/a$. Εάν $\mathbf{E} = 0$ στο $x = 0$ και $V = 0$ στο $x = a$, υπολογίστε V και $\mathbf{E}$.

$$\text{Απ.}\quad \frac{\rho_0}{6\epsilon a}(a^3 - x^3),\ \frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon a}\,\hat{\mathbf{x}}$$