Ηλεκτρομαγνητισμός
Διάλεξη 10

Α. Δροσόπουλος

10-01-2022

Outline

Topic

Εισαγωγικά

Μεταφορά ενέργειας (και πληροφορίας) μέσω ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με μορφή κυμάτων.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα δημοσίευση: sefton.

Σημαντικές παράμετροι: συχνότητα f ή ω και ιδιότητες μέσου

Ανάλογα με τις ιδιότητες διακρίνουμε εν γένει:

1. Κενό (free space) όπου $\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$.
2. Διηλεκτρικά χωρίς διαρροές (lossless dielectrics) όπου $\sigma \approx 0$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$ και $\sigma \ll \omega\epsilon$.
3. Διηλεκτρικά με διαρροές (lossy dielectrics) όπου $\sigma \neq 0$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$.
4. Αγωγοί (good conductors) όπου $\sigma \approx \infty$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0 \mu_r$ και $\sigma \gg \omega\epsilon$.

Η πιο γενική περίπτωση είναι η τρίτη.

Κύματα

- Διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και στο χρόνο.
- Σε μια διάσταση (π.χ. άξονας z) μια απλοποιημένη μορφή της κυματικής εξίσωσης (wave equation)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

- Γενική λύση

$$E = E^{+} + E^{-} = f(z - ut) + g(z + ut)$$

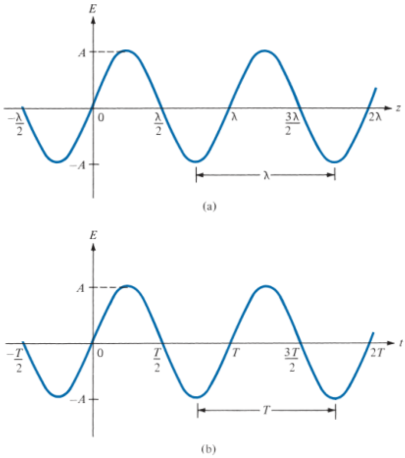
- Για αρμονική εξάρτηση στο χρόνο

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \beta^2 E = 0 \qquad \text{όπου} \qquad \beta = \omega / u$$

- Λύσεις τότε

$$E = Ae^{j(\omega t - \beta z)} + Be^{j(\omega t + \beta z)}$$

Κύματα (συνέχεια 1)



Σχήμα: Για $E = A\sin(\omega t - \beta z)$.

Κύματα (συνέχεια 2)

Τα γνωστά:

- $\lambda = uT$
- $u = \lambda f$
- $\omega = 2\pi f$
- $\beta = \omega / u$
- $T = 1/f = 2\pi/\omega$
- $\beta = 2\pi/\lambda = \omega/u$

Για $E = A\sin(\omega t - \beta z)$ παρακολουθούμε τη φάση $\omega t - \beta z$.

$$\omega t - \beta z = \text{σταθερά} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = u$$

Κίνηση με ταχύτητα u στην $+z$ κατεύθυνση.

Άσκηση 1

Ηλεκτρικό πεδίο στο κενό δίδεται από $\mathbf{E} = 50\cos(10^8 t + \beta x)\,\hat{\mathbf{y}}$ V/m.

- Να βρεθεί η κατεύθυνση μετάδοσης.
- Να υπολογιστεί η β και ο χρόνος μετάδοσης για διάστημα $\lambda/2$
- Σκιτσάρετε το κύμα για $t = 0, T/4, T/2$

Λύση

Από το πρόσημο στη φάση $\omega t + \beta x$ η κατεύθυνση μετάδοσης είναι $-\hat{\mathbf{x}}$.

Στο κενό, $u = c$ και $\beta = \omega/c = 10^8/(3\times 10^8) = 1/3 = 0.333$ rad/m.

Σε περίοδο T το κύμα ταξιδεύει διάστημα λ με ταχύτητα c. Άρα ο χρόνος για να ταξιδέψει διάστημα $\lambda/2$

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10^8} = 31.42 \text{ ns}$$

Εναλλακτικά

$$\frac{\lambda}{2} = ct_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\lambda}{2c} = \frac{2\pi}{\beta\, 2c} = 31.42 \text{ ns}$$

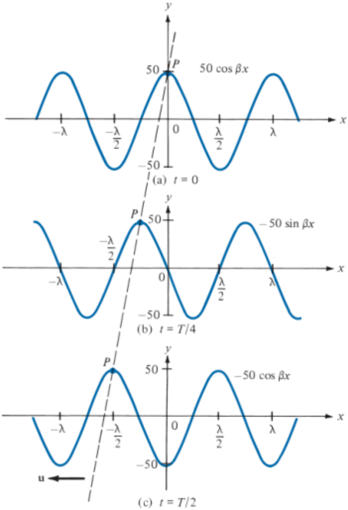
Άσκηση 1 (συνέχεια 1)

Για $t = 0$, $E_y = 50\cos(\beta x)$

Για $t = T/4$, $E_y = 50\cos\left(\omega \cdot 2\pi/(4\omega) + \beta x\right) = 50\cos(\pi/2 + \beta x)$

Για $t = T/2$, $E_y = 50\cos\left(\omega \cdot 2\pi/(2\omega) + \beta x\right) = 50\cos(\pi + \beta x) = -50\cos(\beta x)$

Άσκηση 1 (συνέχεια 2)



Μετάδοση σε διηλεκτρικά με διαρροή

Διηλεκτρικό με διαρροή είναι το μέσον όπου ένα ΗΜ κύμα χάνει ενέργεια καθώς μεταδίδεται. Οι αρμονικές εξισώσεις Maxwell είναι

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H})$$

Από τη ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

έχουμε

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \Rightarrow$$

$$\nabla^2\mathbf{E} - \gamma^2\mathbf{E} = 0$$

όπου $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ η σταθερά μετάδοσης του μέσου (μονάδα γ, m^{-1}).

Μετάδοση (συνέχεια 1)

Για $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]} \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]}$$

Για $\mathbf{E} = E_x(z)\,\hat{\mathbf{x}}$ και μετάδοση στον $+\hat{\mathbf{z}}$ καταλήγουμε

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2\right] E_x(z) = 0$$

με λύση

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_0^- e^{\gamma z} = E_0^+ e^{-\gamma z}$$

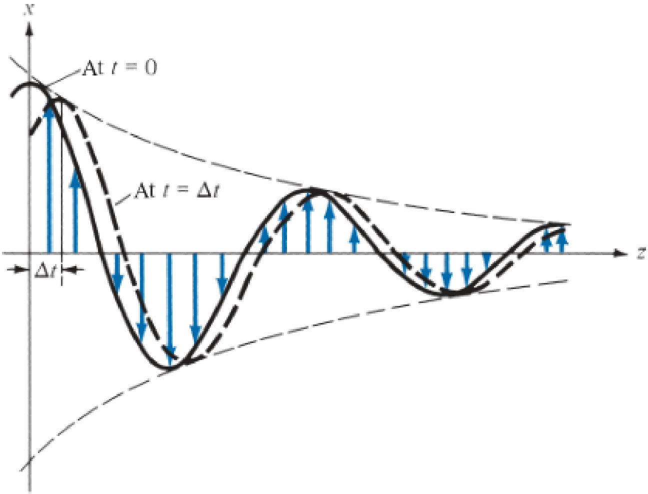
εφόσον $E_0^- = 0$. (Δίδεται μετάδοση στον $+\hat{\mathbf{z}}$). Οπότε

$$\mathbf{E} = E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Παρόμοια σχέση ισχύει και για το $\mathbf{H}$. Το σημαντικό σημείο είναι η χαρακτηριστική εμπέδηση του μέσου

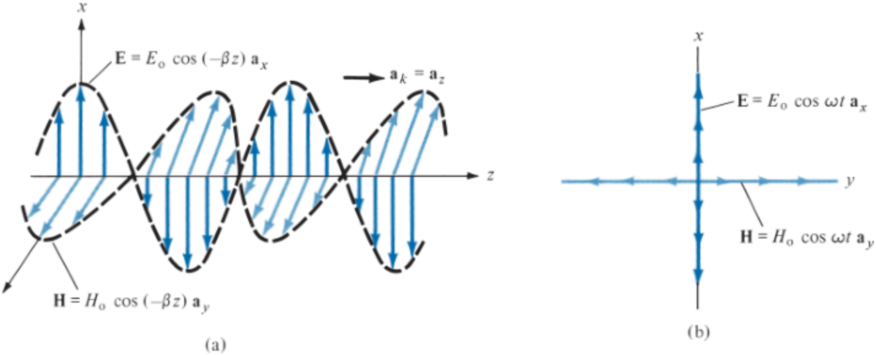
$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

Μετάδοση (συνέχεια 2)



Μετάδοση στο κενό

$$\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377\ \Omega$$



ΗΜ κύματα σε αγωγούς

Καλός αγωγός $\sigma \gg \omega\epsilon$ οπότε

$$\sigma \approx \infty, \quad \epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}, \quad u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ$$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\, \hat{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{H} = \frac{E_0}{\sqrt{\omega\mu/\sigma}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - 45^\circ)\, \hat{\mathbf{y}}$$

Skin depth, penetration depth (επιδερμίδα) το διάστημα $\delta = 1/\alpha$ όπου $E_0 e^{-\alpha\delta} = E_0/e$. Για τους αγωγούς (EM spectrum)

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

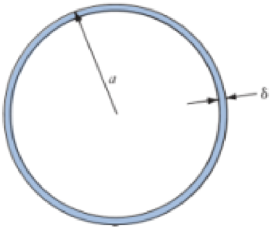
που σημαίνει σε υψηλές συχνότητες τα φορτία του ρεύματος συγκεντρώνονται στην επιφάνεια (επιδερμικό φαινόμενο) και αυξάνεται η ηλεκτρική αντίσταση.

ΗΜ κύματα σε αγωγούς (συνέχεια 1)

TABLE 10.2 Skin Depth in Copper*

Frequency (Hz)	10	60	100	500	10^4	10^8	10^{10}
Skin depth (mm)	20.8	8.6	6.6	2.99	0.66	6.6×10^{-3}	6.6×10^{-4}

*For copper, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\mu = \mu_o$, $\delta = 66.1/\sqrt{f}$ (in mm).



ΗΜ κύματα σε αγωγούς (συνέχεια 2)

Από

$$R_{dc} = \frac{\ell}{\sigma S}$$

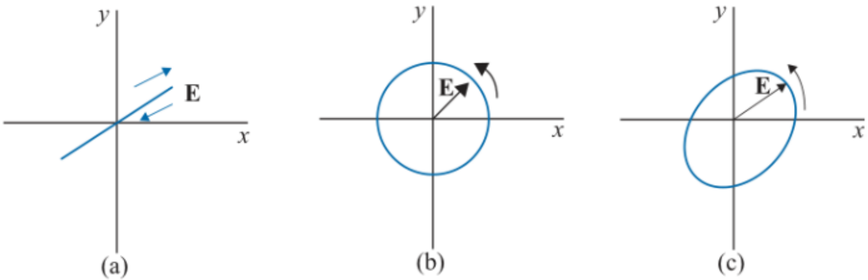
σε

$$R_{ac} = \frac{1}{\sigma\delta}\frac{\ell}{w} \qquad \text{όπου} \qquad S \approx \delta w$$

Κύριος όγκος ρεύματος μη γραμμικά κατανεμημένος σε 5δ, πρακτικά ίσος με ομοιόμορφη κατανομή σε πάχος δ.

Πόλωση ΗΜ κυμάτων

Η τροχιά της μύτης του $\mathbf{E}$ σε κάποιο σημείο του χώρου σε επίπεδο κάθετο στην κατεύθυνση μετάδοσης σαν συνάρτηση του χρόνου.



Π.χ. AM Vpol, FM Cpol

Ισχύς και διάνυσμα Poynting

Μεταφορά ενέργειας με ΗΜ κύματα

Από νόμο Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Από την ταυτότητα $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ για $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ και $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ έχουμε

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Από νόμο Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}\mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \Rightarrow$$

Ισχύς και διάνυσμα Poynting (συνέχεια 1)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\sigma E^2 - \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\int_v \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \right) dv - \int_v \sigma E^2 dv$$

και με το θεώρημα απόκλισης έχουμε το θεώρημα Poynting

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \right) dv - \int_v \sigma E^2 dv$$

όπου η ολική καθαρή ισχύς που εξέρχεται από έναν χώρο v ισούται με τον ρυθμό μείωσης της ενέργειας αποθηκευμένης στο ΗΜ πεδίο σε αυτόν τον χώρο μείον τις ωμικές απώλειες πάλι σε αυτόν τον χώρο.

Το διάνυσμα Poynting $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ σε $\mathrm{W/m^2}$ είναι η στιγμιαία πυκνότητα ισχύος του ΗΜ πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου και η κατεύθυνσή του είναι η κατεύθυνση μετάδοσης του ΗΜ κύματος.

Ισχύς και διάνυσμα Poynting (συνέχεια 2)

Διάνυσμα Poynting $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$

Μέσο διάνυσμα Poynting

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)dt$$

Με φάσορες, το μέσο διάνυσμα Poynting είναι

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Re e\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}$$

Η ολική μέση ισχύς που διέρχεται από μια επιφάνεια S είναι

$$P_m = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S}$$

Άσκηση 2

Σε μη μαγνητικό μέσο έχουμε $\mathbf{E} = 4\sin(2\pi \times 10^7 t - 0.8x)\,\hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{V/m}$. Να βρεθούν:

1. ϵ_r, η.
2. Η μέση ισχύς που μεταφέρεται από το κύμα.
3. Η ολική ισχύς που διαπερνά $100\ \mathrm{cm}^2$ της επιφάνειας $2x + y = 5$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\alpha = 0$. Αυτό σημαίνει μηδενικές απώλειες άρα και $\sigma = 0$. Έχουμε (σελ 12)

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2 = 14.59$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = 98.7\ \Omega$$

Για τη μέση ισχύ έχουμε

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E_0^2}{\eta}\sin^2(\omega t - \beta x)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια 1)

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}\, dt = \frac{E_0^2}{\eta}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - \beta x)\, dt\, \hat{\mathbf{x}} = \frac{E_0^2}{2\eta}\,\hat{\mathbf{x}} = 81\,\hat{\mathbf{x}}\ \mathrm{mW/m^2}$$

Αν έχουμε μια επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

οπότε, για την επιφάνεια $f(x, y, z) = 2x + y - 5$ έχουμε

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{5}}$$

Άρα η ολική ισχύς που διαπερνά $100\ \mathrm{cm}^2$ αυτής της επιφάνειας είναι:

$$P_m = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_m \cdot S\hat{\mathbf{a}}_n = (81\times 10^{-3}\,\hat{\mathbf{x}})(100\times 10^{-4})\left(\frac{2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{5}}\right) = 7.24\times 10^{-4}\ \mathrm{W}$$