

# Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διάλεξη 08

A. Δροσόπουλος

29-11-2021

- 1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά
- 2 Μαγνητικά κυκλώματα
- 3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου
- 4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

- 1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά
- 2 Μαγνητικά κυκλώματα
- 3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου
- 4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

Υπάρχουν τρεις τρόποι που καταλαβαίνουμε δυνάμεις από μαγνητικά πεδία.

- 1 Σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται σε πεδίο **B**.
- 2 Σε στοιχειώδη ρεύματα που βρίσκονται σε εξωτερικό πεδίο **B**.
- 3 Μεταξύ δυο ρευμάτων.

# Δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτία

Από νόμο Coulomb γνωρίζουμε ότι η δύναμη σε ηλεκτρικό φορτίο  $q$  (κινούμενο ή μη) που βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  είναι

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

Αντιθέτως, ένα μαγνητικό πεδίο εξασκεί δύναμη μόνο σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία. Πειραματικά, για κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο  $q$  με ταχύτητα  $\mathbf{u}$  μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$ , έχουμε

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

- Η  $\mathbf{F}_e$  είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα και μπορεί να εκτελέσει έργο στο φορτίο και να αλλάξει την κινητική του ενέργεια.
- Αντιθέτως, η  $\mathbf{F}_m$  εξαρτάται από την ταχύτητα του φορτίου και είναι κάθετη σε αυτή. Επομένως, δεν μπορεί να εκτελέσει έργο στο φορτίο και δεν αλλάζει την κινητική του ενέργεια.
- Εν γένει  $F_m \ll F_e$  εκτός αν η ταχύτητα είναι υψηλή.

# Δυνάμεις σε ηλεκτρικά φορτία (συνέχεια 1)

Επομένως, για κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο σε χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο η ολική δύναμη στο φορτίο είναι

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

γνωστή σαν εξίσωση Lorentz. Σύνδεση με τη κλασσική μηχανική και το νόμο Newton

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

επιτρέπει την κινηματική μελέτη φορτισμένων σωματιδίων. Τονίζεται πάλι ότι μεταφορά ενέργειας γίνεται μόνο μέσω του ηλεκτρικού πεδίου.

# Δυνάμεις σε ρεύματα

$$Id\ell = \frac{dq}{dt}d\ell = dq\mathbf{u}$$

για στοιχειώδες ρεύμα που οφείλεται σε στοιχειώδες φορτίο κινούμενο με μέση ταχύτητα  $\mathbf{u}$ . Οπότε

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{u} \times \mathbf{B} = Id\ell \times \mathbf{B}$$

η δύναμη εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$  σε στοιχειώδες ρεύμα  $Id\ell$ . Εάν το ρεύμα κινείται σε κάποιο κλειστό βρόχο κυκλώματος (κλειστή διαδρομή  $L$ ) η ολική δύναμη είναι

$$\mathbf{F} = \oint_L Id\ell \times \mathbf{B}$$

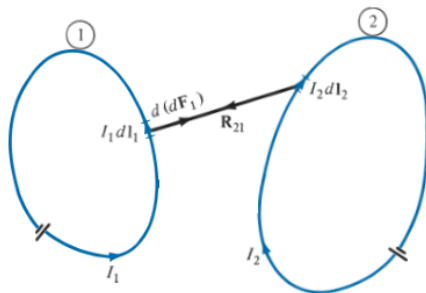
Γενικεύοντας για ρεύματα επιφάνειας και χώρου

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K}dS \times \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = \int_v \mathbf{J}dv \times \mathbf{B}$$

Το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  ορίζεται σαν τη δύναμη ανά μονάδα στοιχειώδους ρεύματος, ή, σαν το διάνυσμα που ικανοποιεί την  $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ .

# Δυνάμεις μεταξύ ρευμάτων

Εξετάζουμε τη δύναμη μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων  $I_1 d\ell_1$  και  $I_2 d\ell_2$ . Η δύναμη στο 1 από το πεδίο του 2 είναι



$$d(d\mathbf{F}_1) = I_1 d\ell_1 \times d\mathbf{B}_2 \quad d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2 d\ell_2 \times \hat{\mathbf{R}}_{21}}{4\pi R_{21}^2} \quad d(d\mathbf{F}_1) = \frac{\mu_0 I_1 d\ell_1 \times (I_2 d\ell_2 \times \hat{\mathbf{R}}_{21})}{4\pi R_{21}^2}$$



## Δυνάμεις μεταξύ ρευμάτων (συνέχεια 1)

Η τελευταία σχέση εκφράζει τη δύναμη μεταξύ δυο στοιχειωδών ρευμάτων και είναι ανάλογος του νόμου Coulomb για δύναμη μεταξύ δυο στασίμων φορτίων. Για την ολική δύναμη στον βρόχο 1 που οφείλεται στο ρεύμα του βρόχου 2 έχουμε

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\ell_1 \times (d\ell_2 \times \hat{\mathbf{R}}_{21})}{R_{21}^2}$$

Ισχύει  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$  άρα ικανοποιείται και ο τρίτος νόμος του Newton (δράση ίση με αντίδραση). Σημειώνεται ότι αυτή είναι η σχέση που πειραματικά ευρέθηκε από Oersted και Ampere. Οι Biot και Savart εδώ βασίστηκαν για να βγάλουν το δικό τους νόμο.

# Μαγνητική ροπή

Από τη στιγμή που έχουμε βρόχο ρεύματος και εξασκούνται δυνάμεις στα διάφορα σημεία του βρόχου, αυτές οι δυνάμεις είναι ικανές να στρέψουν το βρόχο, άρα έχουμε την εμφάνιση ροπής. Ορίζουμε τη ροπή γύρω από έναν άξονα στροφής

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

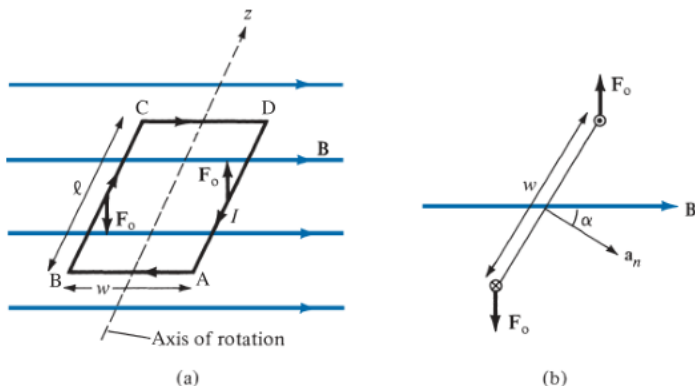
όπου  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα από τον άξονα στροφής (όπου μετράμε τη ροπή) στο σημείο εφαρμογής της δύναμης. Μονάδα ροπής το  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

Θεωρούμε ορθογώνιο ρευματοφόρο βρόχο (πλαίσιο) μήκους  $\ell$  και πλάτους  $w$  σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$ . Οι πλευρές AB και CD είναι παράλληλες στο πεδίο άρα δεν εμφανίζονται δυνάμεις σε αυτές. Δυνάμεις εμφανίζονται στις κάθετες πλευρές και έχουμε

$$\mathbf{F} = I \int_B^C d\ell \times \mathbf{B} + I \int_D^A d\ell \times \mathbf{B} = I \int_0^\ell dz \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} + I \int_\ell^0 dz \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_o - \mathbf{F}_o = 0$$

όπου  $|\mathbf{F}_o| = IB\ell$ . Η ολική δύναμη είναι μηδέν αλλά οι πλευρικές δρούν σαν ζεύγος και στρέφουν το πλαίσιο.

# Μαγνητική ροπή (συνέχεια 1)



**Σχήμα:** (a) Ορθογώνιος βρόχος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο (b) κάτοψη

## Μαγνητική ροπή (συνέχεια 2)

Έστω ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{a}}_n$  στο επίπεδο του βρόχου σχηματίζει γωνία  $\alpha$  με το  $\mathbf{B}$  όπως φαίνεται στην κάτωψη. Έχουμε

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{F}_o|w \sin \alpha = BIlw \sin \alpha = BIS \sin \alpha$$

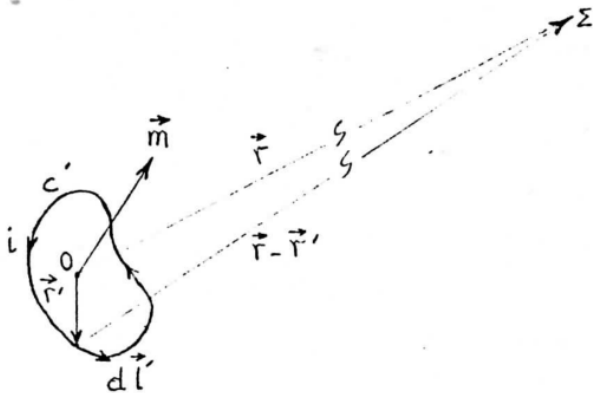
Ορίζουμε την μαγνητική διπολική ροπή  $\mathbf{m} = IS\hat{\mathbf{a}}_n$  του βρόχου, σαν το γινόμενο ρεύματος και εμβαδού του βρόχου, με  $\hat{\mathbf{a}}_n$  μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του βρόχου και κατεύθυνση που ορίζεται από τον κανόνα δεξιού χεριού (αντίχειρας  $\hat{\mathbf{a}}_n$  και δάκτυλα κατεύθυνση ρεύματος). Η μαγνητική ροπή γίνεται τότε:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Παρά το ότι η σχέση βγήκε για ορθογώνιο βρόχο, ισχύει για οποιοδήποτε σχήματος επίπεδο βρόχο με μόνη προϋπόθεση την ομογένεια του μαγνητικού πεδίου. Η ροπή που δημιουργείται προσπαθεί να ελαττώσει την γωνία  $\alpha$  και να φέρει  $\mathbf{m}$  και  $\mathbf{B}$  στην ίδια κατεύθυνση. Στη θέση ισορροπίας και η ροπή και η συνολική δύναμη στο βρόχο είναι μηδέν.

# Μαγνητικό δίπολο

Ένα μαγνητικό δίπολο είναι ένας ραβδόμορφος μαγνήτης ή ένας μικρός ρευματοφόρος βρόχος. Η δεύτερη περίπτωση μάλιστα είναι ένα καλό παράδειγμα εύρεσης πεδίου  $\mathbf{B}$  από το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$ .



# Μαγνητικό δίπολο (συνέχεια 1)

Το διανυσματικό δυναμικό στο  $\Sigma$  (σχήμα) είναι

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\ell'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Έχουμε

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα ([binomial theorem](#))

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \dots$$

με  $x \rightarrow -x$  και  $n \rightarrow -1/2$  για να αναπτύξουμε σε σειρά τη σχέση

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-x)^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

## Μαγνητικό δίπολο (συνέχεια 2)

Οπότε και λαμβάνοντας υπόψη ότι μακριά από το βρόχο  $r \gg r'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_{C'} d\ell' \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{S'} d\mathbf{S}' \times \nabla' \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε θεώρημα Stokes και τόνος στο ανάδελτα σημαίνει παραγωγή του  $\mathbf{r}'$ . Η  $S'$  είναι η επιφάνεια που περατώνεται στον βρόχο  $C'$ . Με τον ορισμό της μαγνητικής διπολικής ροπής  $\mathbf{m}$  καταλήγουμε:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int_{S'} d\mathbf{S}' \times \mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



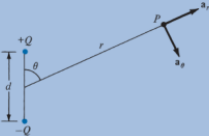
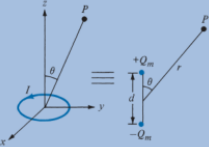
Για το  $\mathbf{B}$  έχουμε

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

Με  $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

# Μαγνητικό δίπολο (συνέχεια 3)

Electric	Magnetic
$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  <p data-bbox="436 505 598 523">Monopole (point charge)</p>	<p data-bbox="779 256 869 274">Does not exist</p>  <p data-bbox="783 505 931 523">Monopole (point charge)</p>
$V = \frac{Q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$  <p data-bbox="436 933 605 951">Dipole (two-point charge)</p>	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m \sin \theta \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2}$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$  <p data-bbox="734 933 1002 951">Dipole (small current loop or bar magnet)</p>

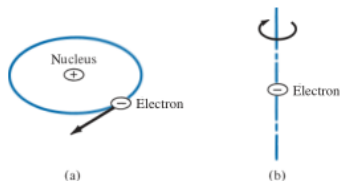


Μαγνητικές ιδιότητες υλικών οφείλονται

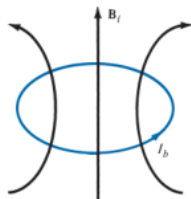
- 1 Περιφορά ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα σε άτομα.
- 2 Spin ηλεκτρονίων.
- 3 Spin πυρήνα.

Τα παραπάνω μοντελοποιούνται σαν στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα με μαγνητική ροπή ενός ισοδύναμου ρευματοφόρου βρόχου. Κατ' επέκταση κάθε άτομο ή μόριο θα έχει μια συνισταμένη μαγνητική ροπή από όλες αυτές τις αιτίες.

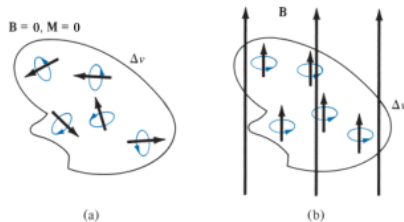
Απουσία εξωτερικού πεδίου, για πολλά υλικά, όλες αυτές οι ροπές είτε είναι μηδέν είτε με τυχαίο προσανατολισμό δίνουν συνισταμένη μηδέν. Υπάρχουν όμως και υλικά όπου αυτές οι ροπές εμφανίζουν αυτόματο προσανατολισμό με μη μηδενική συνισταμένη. Αυτά αποτελούν τους μόνιμους μαγνήτες.



**FIGURE 8.10** (a) Electron orbiting around the nucleus. (b) Electron spin.



**FIGURE 8.11** Circular current loop equivalent to electronic motion of Figure 8.10.



**FIGURE 8.12** Magnetic dipole moment in a volume  $\Delta v$ : (a) before  $B$  is applied, (b) after  $B$  is applied.

# Μαγνήτιση (συνέχεια 1)

Η ισοδύναμη μαγνητική ροπή ενός στοιχειώδους ατομικού ρευματοφόρου βρόχου είναι

$$\mathbf{m} = I_b S \hat{\mathbf{a}}_n$$

όπου  $S$  το εμβαδόν του βρόχου και  $I_b$  το δεσμευμένο στο άτομο ρεύμα.

Ονομάζουμε μαγνήτιση  $\mathbf{M}$  σε A/m τη συνισταμένη μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου. Για  $N$  άτομα σε όγκο  $\Delta v$  με κάθε άτομο να έχει μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}_k$

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta v}$$

Εάν  $\mathbf{M} \neq 0$  λέμε ότι το υλικό είναι μαγνητισμένο. Βγαίνει ότι

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$$

η δεσμευμένη πυκνότητα ρεύματος σε A/m<sup>2</sup> ανά μονάδα όγκου. Οπότε

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\text{και επειδή } \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

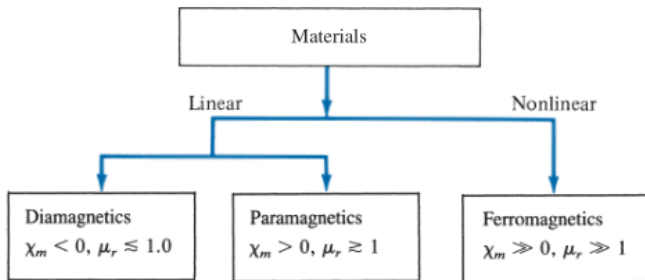
για γραμμικά υλικά με  $\chi_m$  τη μαγνητική επιδεκτικότητα σε H/m. Στη γενική περίπτωση  $\mu$  είναι ταυιστής 2ας τάξης.

# Είδη μαγνητικών υλικών

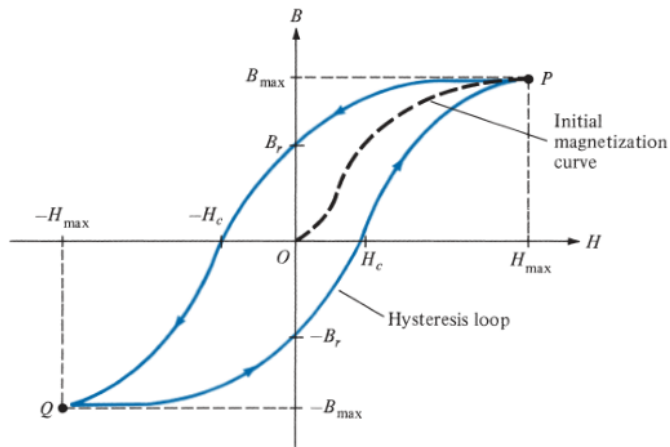
Χρησιμοποιούμε την  $\chi_m$  ή  $\mu_r$  για να κατηγοριοποιήσουμε υλικά ως προς τις μαγνητικές τους ιδιότητες.

- Μη μαγνητικά, εάν  $\chi_m = 0$  ή  $\mu_r = 1$ .
- Διαμαγνητικά, εάν  $\chi_m$  έχει μικρή αρνητική τιμή ή  $\mu_r \leq 1$ . Τροχιές ηλεκτρονίων και spin αλληλοεξουδετερώνονται. Ασθενή αντίδραση σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.
- Παραμαγνητικά, εάν  $\chi_m$  έχει μικρή θετική τιμή ή  $\mu_r \geq 1$ . Υπάρχει ασθενής μαγνήτιση που εξαρτάται από τη θερμοκρασία.
- Σιδηρομαγνητικά, εάν  $\chi_m$  έχει μεγάλη θετική τιμή ή  $\mu_r \gg 1$ . Έντονη μαγνήτιση, ισχυρή αντίδραση σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, παραμένουσα μαγνήτιση, μη γραμμικά και υπάρχει εξάρτηση από θερμοκρασία (θερμοκρασία Curie).

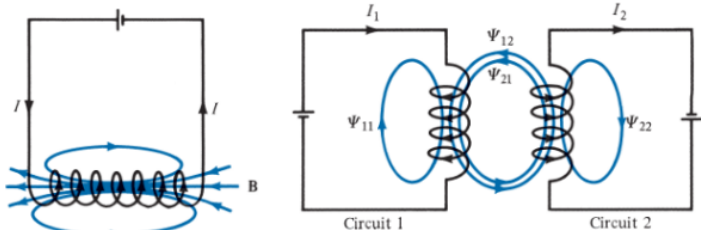
# Είδη μαγνητικών υλικών (συνέχεια 1)



# Είδη μαγνητικών υλικών (συνέχεια 2)



# Επαγωγή



Σε ένα κύκλωμα (τονίζουμε επαγωγικά χαρακτηριστικά - πηνίο), διέρχεται ρεύμα  $I$ . Δημιουργεί μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  και αυτό με τη σειρά του προκαλεί μαγνητική ροή μέσα από τις σπείρες του πηνίου  $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ . Ορίζουμε τη σύζευξη ροής  $\Psi = N\Phi$ . Για γραμμικά υλικά  $\Psi = LI$  όπου  $L$  η αυτεπαγωγή του πηνίου. Πιο καθαρά

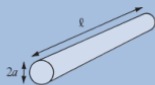
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$$

σε μονάδες Henry H (ίδια μονάδα με  $\text{Wb}/\text{A}$ ). Γενίκευση στην αμοιβαία επαγωγή με μετασχηματιστές.

# Επαγωγή (συνέχεια 1)

1. Wire

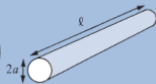
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$$



2. Hollow cylinder

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \ln \frac{2\ell}{a} - 1 \right)$$

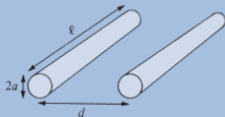
$\ell \gg a$



3. Parallel wires

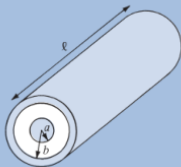
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

$\ell \gg d, d \gg a$



4. Coaxial conductor

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



5. Circular loop

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \ln \frac{4\ell}{d} - 2.45 \right)$$

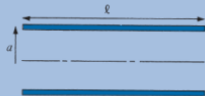
$\ell = 2\pi\rho_0, \rho_0 \gg d$



6. Solenoid

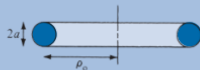
$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

$\ell \gg a$



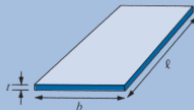
7. Torus (of circular cross section)

$$L = \mu_0 N^2 [\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - a^2}]$$



8. Sheet

$$L = \mu_0 2\ell \left( \ln \frac{2\ell}{b+t} + 0.5 \right)$$





- 1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά
- 2 Μαγνητικά κυκλώματα**
- 3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου
- 4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

# Μαγνητικά κυκλώματα

Μέθοδος επίλυσης προβλημάτων με μαγνητικά πεδία που βασίζεται στη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Συσκευές όπως τοροειδή, μετασχηματιστές, μηχανές, γεννήτριες και ρελέ μπορούν να θεωρηθούν σαν μαγνητικά κυκλώματα ([magnetic circuits](#)). Ορίζουμε μεγέθη

Μαγνητεγερτική δύναμη σε αμπεροστροφές,  $A \cdot t$  :

$$ME\Delta = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\ell$$

Μαγνητική αντίσταση σε αμπεροστροφές ανά Wb,  $A/Wb$  ή  $H^{-1}$ :

$$R_m = \frac{\ell}{\mu S}$$

Τύπος Hopkinson (Hopkinson's or Rowland's law) αντίστοιχος νόμου Ohm

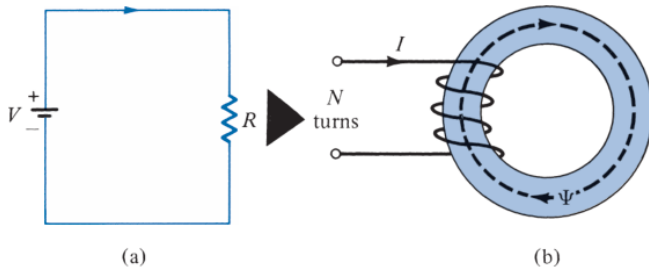
$$\Phi = \frac{ME\Delta}{R_m}$$

# Μαγνητικά κυκλώματα (συνέχεια 1)

Electric	Magnetic
Conductivity $\sigma$	Permeability $\mu$
Field intensity $E$	Field intensity $H$
Current $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Magnetic flux $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Current density $\mathbf{J} = \frac{I}{S} = \sigma \mathbf{E}$	Flux density $\mathbf{B} = \frac{\Psi}{S} = \mu \mathbf{H}$
Electromotive force (emf) $V$	Magnetomotive force (mmf) $\mathcal{F}$
Resistance $R$	Reluctance $\mathcal{R}$
Conductance $G = \frac{1}{R}$	Permeance $\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$
Ohm's law $R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$ or $V = E\ell = IR$	Ohm's law $\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\Psi} = \frac{\ell}{\mu S}$ or $\mathcal{F} = H\ell = \Psi \mathcal{R} = NI$
Kirchhoff's laws: $\sum I = 0$	Kirchhoff's laws: $\sum \Psi = 0$
$\sum V - \sum RI = 0$	$\sum \mathcal{F} - \sum \mathcal{R} \Psi = 0$

**Σχήμα:** Αναλογία μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων

# Μαγνητικά κυκλώματα (συνέχεια 2)



**Σχήμα:** Αναλογία μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών κυκλωμάτων

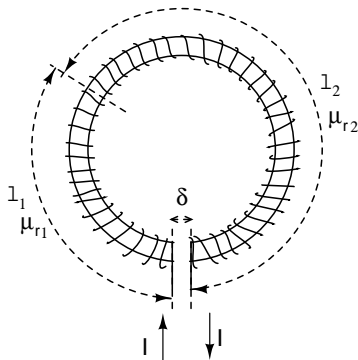
# Μαγνητικά κυκλώματα - Περιορισμοί

- Ηλεκτρικά ρεύματα αντιπροσωπεύουν ροή ηλεκτρικών φορτίων και μεταφέρουν ενέργεια/ισχύ μέρος της οποίας καταναλώνεται σε ωμικές αντιστάσεις. Τα μαγνητικά πεδία δεν αντιπροσωπεύουν κάποια ροή και δεν καταναλώνεται ισχύ σε μαγνητικές αντιστάσεις.
- Η ηλεκτρική αγωγιμότητα δεν εξαρτάται από το ρεύμα ενώ η μαγνητική διαπερατότητα εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο.
- Το ηλεκτρικό ρεύμα περιορίζεται στο ηλεκτρικό κύκλωμα με ελάχιστη διαρροή. Δεν συμβαίνει το ίδιο και με τη μαγνητική ροή και συχνά υπάρχει μεγάλη διαρροή (σκέδαση) που πρέπει να ληφθεί υπόψη και δύσκολα εκτιμάται.
- Και πιο σημαντικά, τα μαγνητικά κυκλώματα είναι μη γραμμικά και η μαγνητική αντίσταση εξαρτάται από το πεδίο (κορεσμός) και την ιστορία μαγνήτισης (υστέρηση). Η εναπομένουσα μαγνήτιση μάλιστα μπορεί να δημιουργεί μαγνητική ροή χωρίς ΜΕΔ.

Παρόλους τους περιορισμούς είναι μια χρήσιμη τεχνική για προσεγγιστική ανάλυση πρακτικών συσκευών.

# Άσκηση 1

Στο δαχτυλίδι του σχήματος το πηνίο έχει 200 σπείρες, το τμήμα 1 έχει μέσο μήκος  $\ell_1 = 30$  cm και  $\mu_{r1} = 1000$ , το τμήμα 2 έχει μέσο μήκος  $\ell_2 = 70$  cm και  $\mu_{r2} = 3000$  και το διάκενο έχει μήκος  $\delta = 0.2$  cm. Η διατομή του πηνίου είναι  $15$  cm<sup>2</sup>. Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αν η μαγνητική ροή είναι  $\Phi = 200 \times 10^{-4}$  Wb.



# Άσκηση 1 (συνέχεια 1)

Η κάθε επί μέρους μαγνητική αντίσταση είναι:

$$R_{m1} = \frac{\ell_1}{\mu S} = \frac{\ell_1}{\mu_{r1}\mu_0 S} = \frac{0.3}{1000 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 1.591 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m2} = \frac{\ell_2}{\mu_{r2}\mu_0 S} = \frac{0.7}{3000 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 1.238 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{0.002}{4\pi 10^{-7} \cdot 15 \cdot 10^{-4}} = 1.061 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Η ολική μαγνητική αντίσταση είναι:

$$R_{m,\text{ολ}} = R_{m1} + R_{m2} + R_{m\delta} = 1.344 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Από τον τύπο Hopkinson, έχουμε:

$$\Phi = \frac{IN}{R_{m,\text{ολ}}} \Rightarrow I = \frac{\Phi \cdot R_{m,\text{ολ}}}{N} = \frac{200 \cdot 10^{-4} \cdot 1.344 \times 10^6}{200} = 134.4 \text{ A}$$

## Άσκηση 2

Πηνίο με 2000 σπείρες έχει μήκος 45 cm και διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1.2 A. Να υπολογιστούν:

- Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του.
- Η μαγνητική ροή στο εσωτερικό του αν η διάμετρός του είναι  $d = 120$  mm.

---

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι:

$$H = \frac{IN}{\ell} = \frac{1.2 \cdot 2000}{0.45} = 5.333 \times 10^3 \text{ A/m}$$

Η μαγνητική ροή στο εσωτερικό του πηνίου είναι:

$$\Phi = B \cdot S = \mu_0 H \cdot S$$

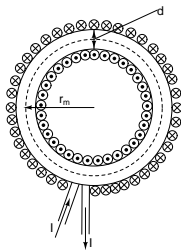
όπου η διατομή  $S = \pi d^2 / 4$ . Οπότε:

$$\Phi = 4\pi 10^{-7} \cdot 5.333 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{\pi(0.120)^2}{4} \right) = 7.579 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$



## Άσκηση 3

Ένα κυκλικό πηνίο (τοροειδές) με 780 σπείρες έχει διάμετρο σύρματος 35 mm και η ακτίνα της μέσης περιμέτρου είναι 32 cm. Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος που πρέπει να διαρρέει το πηνίο ώστε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του να είναι 40000 A/m.



Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου που διαρρέεται από ρεύμα είναι:

$$H = \frac{IN}{\ell} \Rightarrow I = \frac{H \cdot \ell}{N} = \frac{H \cdot 2\pi r_m}{N} = \frac{40000 \cdot 2\pi \cdot 0.32}{780} = 103.11 \text{ A}$$

# Άσκηση 4

Ένα πηνίο με 1500 σπείρες είναι τυλιγμένο σε ξύλινο δακτυλίδι με μέση περίμετρο 30 cm και διατομή 4 cm<sup>2</sup>. Το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης 0.4 A. Να υπολογιστούν:

- Η μαγνητική ροή στο δακτυλίδι.
- Η μαγνητική επαγωγή στο δακτυλίδι.

---

Εφόσον το υλικό είναι ξύλο (μη μαγνητικό) έχουμε  $\mu_r = 1$ . Οπότε:

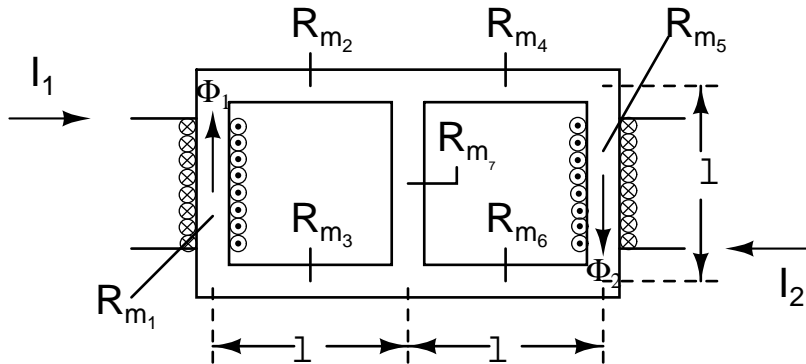
$$R_m = \frac{\ell}{\mu_r \mu_0 S} = \frac{0.30}{1 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 5.968 \times 10^8 \text{ H}^{-1}$$

$$\Phi = \frac{I \cdot N}{R_m} = \frac{0.4 \cdot 1500}{5.968 \times 10^8} = 1.005 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\Phi = B \cdot S \Rightarrow B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.005 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}} = 2.512 \times 10^{-3} \text{ T}$$

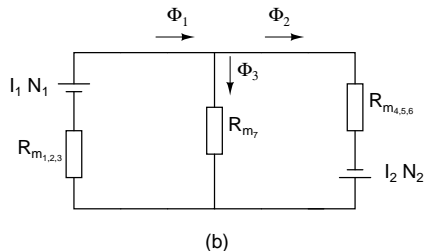
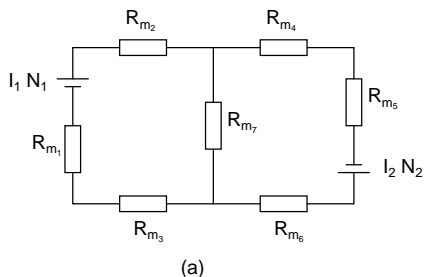
## Άσκηση 4

Δίδεται το παρακάτω μαγνητικό κύκλωμα όπου  $I_1 = 5$  A,  $N_1 = 100$  σπείρες,  $I_2 = 10$  A,  $N_2 = 200$  σπείρες,  $S = 10$  cm<sup>2</sup>,  $\ell = 20$  cm,  $\mu = 1000$  H/m. Να υπολογιστεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στους κλάδους του.



# Άσκηση 4 (συνέχεια 1)

Φτιάχνουμε το αντίστοιχο ηλεκτρικό κύκλωμα του παραπάνω μαγνητικού αφού προσδιορίσουμε τη φορά της μαγνητικής ροής στο εσωτερικό των δύο πηνίων. Υπολογίζουμε κατόπιν τις μαγνητικές αντιστάσεις για το κάθε τμήμα του μαγνητικού υλικού, οι οποίες, εφόσον κάθε κλάδος έχει ίδιο μήκος, ίδια διατομή και αποτελείται από το ίδιο υλικό, είναι όλες ίδιες.



Έτσι έχουμε:

## Άσκηση 4 (συνέχεια 2)

$$R_{m_1} = \dots = R_{m_7} = R_m = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{0.2}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0.2 \text{ H}^{-1}$$

Το κύκλωμα (a) απλοποιείται στο (b) όπου έχουμε  $R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3} = R_{m_{1,2,3}}$  και  $R_{m_4} + R_{m_5} + R_{m_6} = R_{m_{4,5,6}}$  (αντιστάσεις εν σειρά). Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε κανόνες Kirchhoff και να βρούμε τα κλαδικά  $\Phi$ .

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ R_{m_{1,2,3}} \Phi_1 + R_{m_7} \Phi_3 = I_1 N_1 \\ R_{m_{4,5,6}} \Phi_2 - R_{m_7} \Phi_3 = I_2 N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ 0.6\Phi_1 + 0.2\Phi_3 = 500 \\ 0.6\Phi_2 - 0.2\Phi_3 = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = 1333.3 \text{ Wb} \quad \Phi_2 = 2833.3 \text{ Wb} \quad \Phi_3 = -1500 \text{ Wb}$$

Αρνητική  $\Phi_3$  σημαίνει απλώς ότι η πραγματική φορά της είναι αντίθετη από αυτή που έχουμε σημειώσει στο κύκλωμα.

## Άσκηση 4 (συνέχεια 3)

```
>> A=[1 -1 -1; 0.6 0 0.2; 0 0.6 -0.2]
```

```
A =
```

```
 1.0000  -1.0000  -1.0000  
 0.6000         0   0.2000  
         0   0.6000  -0.2000
```

```
>> b=[0; 500; 2000]
```

```
b =
```

```
 0  
 500  
 2000
```

```
>> F = inv(A)*b
```

```
F =
```

```
 1333.3  
 2833.3  
-1500.0
```

## Άσκηση 4 (συνέχεια 4)

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε κάθε κλάδο του κυκλώματος είναι:

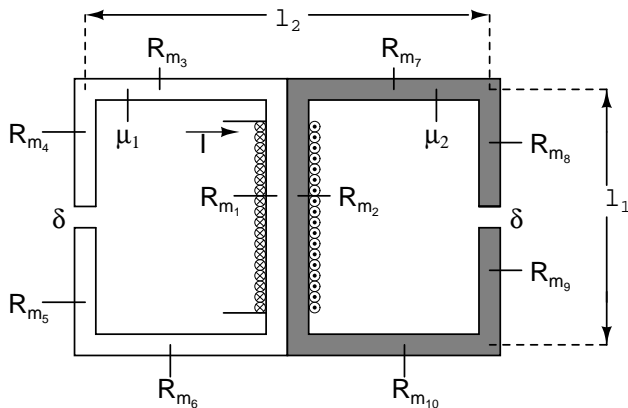
$$H_1 = \frac{B_1}{\mu} = \frac{\Phi_1}{\mu S} = \frac{1333.3}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1333.3 \text{ A/m}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu} = \frac{\Phi_2}{\mu S} = \frac{2833.3}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 2833.3 \text{ A/m}$$

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu} = \frac{\Phi_3}{\mu S} = -\frac{1500}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -1500 \text{ A/m}$$

# Άσκηση 5

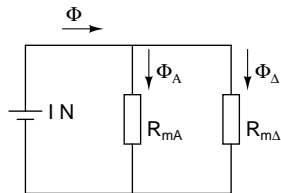
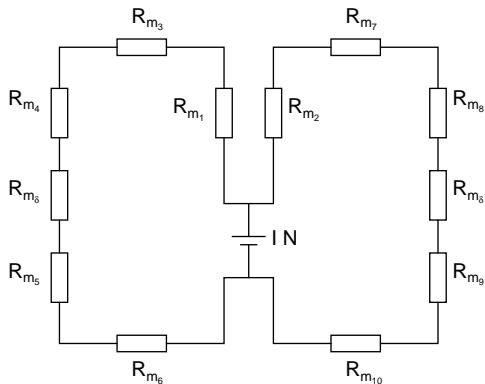
Δίδεται το παρακάτω μαγνητικό κύκλωμα που αποτελείται από δύο διαφορετικά σιδηρομαγνητικά υλικά με  $\mu_1 = 1.29 \times 10^{-3} \text{ H/m}$ ,  $\mu_2 = 8.82 \times 10^{-4} \text{ H/m}$ ,  $\ell_1 = 7 \text{ cm}$ ,  $\ell_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $\delta = 0.1 \text{ cm}$ ,  $S = 3 \text{ cm}^2$ ,  $N = 100$  σπείρες και  $I = 5 \text{ A}$ . Να υπολογιστούν οι εντάσεις του μαγνητικού πεδίου στα δύο διάκενα του μαγνητικού κυκλώματος και να συγκριθούν.





# Άσκηση 5 (συνέχεια 1)

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό κύκλωμα είναι:



## Άσκηση 5 (συνέχεια 2)

$$R_{m_3} = R_{m_6} = \frac{\ell_2/2}{\mu_1 S} = \frac{0.1/2}{1.29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.292 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_4} = R_{m_5} = \frac{(\ell_1 - \delta)/2}{\mu_1 S} = \frac{(0.07 - 0.001)/2}{1.29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 8.915 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{0.001}{4\pi 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 2.653 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_1} = \frac{\ell_1}{\mu_1 S} = \frac{0.07}{1.29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.809 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_7} = R_{m_{10}} = \frac{\ell_2/2}{\mu_2 S} = \frac{0.1/2}{8.82 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.890 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_8} = R_{m_9} = \frac{(\ell_1 - \delta)/2}{\mu_2 S} = \frac{(0.07 - 0.001)/2}{8.82 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1.304 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m_2} = \frac{\ell_1}{\mu_2 S} = \frac{0.07}{8.82 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 2.645 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Συνδυάζουμε εν σειρά όλες τις αντιστάσεις αριστερού και δεξιού τμήματος

$$R_{mA} = R_{m_1} + R_{m_3} + R_{m_4} + R_{m\delta} + R_{m_5} + R_{m_6} = 3.2706 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m\Delta} = R_{m_2} + R_{m_7} + R_{m_8} + R_{m\delta} + R_{m_9} + R_{m_{10}} = 3.5563 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

## Άσκηση 5 (συνέχεια 3)

Κλαδικές ροές:

$$\Phi_A = \frac{I \cdot N}{R_{mA}} = 1.529 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{\Delta} = \frac{I \cdot N}{R_{m\Delta}} = 1.406 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Μαγνητική επαγωγή στους δυο κλάδους:

$$B_A = \frac{\Phi_A}{S} = \frac{1.529 \times 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0.510 \text{ T}$$

$$B_{\Delta} = \frac{\Phi_{\Delta}}{S} = \frac{1.406 \times 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0.469 \text{ T}$$

Ένταση του μαγνητικού πεδίου στα διάκενα:

$$H_{\delta A} = \frac{B_A}{\mu_0} = 4.058 \times 10^5 \text{ A/m}$$

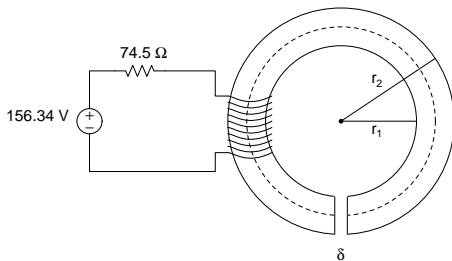
$$H_{\delta \Delta} = \frac{B_{\Delta}}{\mu_0} = 3.732 \times 10^5 \text{ A/m}$$

Όπως βλέπουμε, το αριστερό διάκενο έχει μεγαλύτερη τιμή, πράγμα που το αναμέναμε μιας και  $\mu_1 > \mu_2$ .

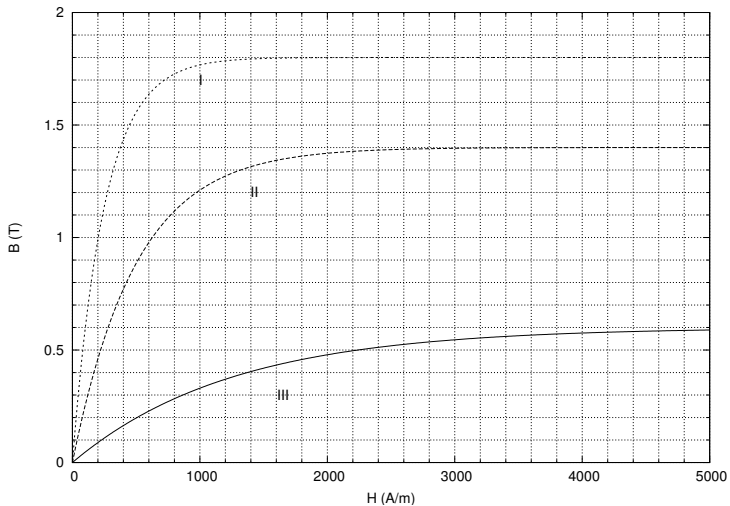
## Άσκηση 6

Το ηλεκτρικό κύκλωμα αριστερά τροφοδοτεί με ρεύμα το μαγνητικό δακτύλιο δεξιά ο οποίος έχει κυκλική διατομή. Το σύρμα του πηνίου έχει ηλεκτρική αντίσταση  $R_{\pi} = 42 \Omega$  και το διάκενο έχει μήκος  $\delta = 8 \text{ mm}$ . Να υπολογιστούν:

- Το ρεύμα  $I$  που διαρρέει το πηνίο και η μαγνητεγερτική δύναμη ΜΕΔ του πηνίου όταν ο αριθμός σπειρών είναι  $N = 1000$ .
- Η μαγνητική ροή που κυκλοφορεί στον πυρήνα του δακτυλίου όταν η εσωτερική και εξωτερική του ακτίνα είναι  $r_1 = 22 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 25 \text{ cm}$  αντίστοιχα, το υλικό από το οποίο αποτελείται ο πυρήνας του δακτυλίου είναι το υλικό II και η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο διάκενο είναι 26 φορές μεγαλύτερη από ότι στον πυρήνα.



# Άσκηση 6 (συνέχεια 1)



## Άσκηση 6 (συνέχεια 2)

Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι  $I_{\pi} = 156.34 / (42 + 74.5) = 1.342$  A και η ΜΕΔ = 1342 A. Για την μαγνητική ροή θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο Ampere:

$$H \cdot (\ell - \delta) + 26 \cdot H \cdot \delta = I_{\pi} \cdot N \Rightarrow H = 800.45 \text{ A/m}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\ell$  είναι το μήκος της μέσης μαγνητικής γραμμής μέσα από το δακτύλιο, δηλ.  $\ell = 2\pi(r_1 + r_2)/2 = 1.4765$  m.

Από το διάγραμμα B-H και για το υλικό II έχουμε κατά προσέγγιση την αντιστοιχία  $B = 1.25$  T. Επομένως, η μαγνητική ροή είναι

$$\Phi = B \cdot S = 1.25 \cdot 0.000707 = 0.884 \text{ mWb}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η διάμετρος της διατομής του δακτυλίου είναι  $d = r_2 - r_1 = 3$  cm και η ίδια η διατομή  $S = \pi d^2 / 4 = 0.000707$  m<sup>2</sup>.

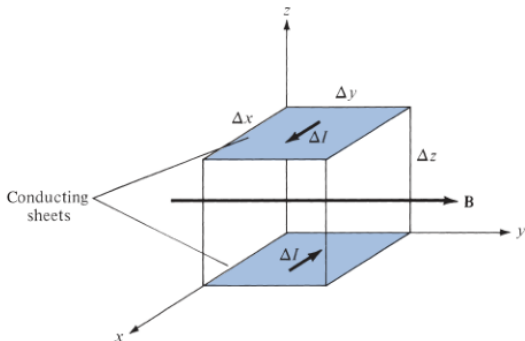
- 1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά
- 2 Μαγνητικά κυκλώματα
- 3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου**
- 4 Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

# Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου

Για το ηλεκτροστατικό πεδίο (Διάλεξη 3) είχαμε μιλήσει για δυναμική ενέργεια και πυκνότητα ενέργειας πεδίου.

$$w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad W_E = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για το μαγνητοστατικό. Θεωρούμε το στοιχειώδη όγκο του σχήματος:





# Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου (συνέχεια 1)

Από ηλεκτρικά κυκλώματα για επαγωγέα

$$p = iv = Li \frac{di}{dt} \Rightarrow W = \int p dt = \int Li di = \frac{1}{2} Li^2$$

Από το στοιχειώδη όγκο του επαγωγέα του σχήματος

$$\Delta L = \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{\mu H \Delta x \Delta z}{\Delta I}$$

όπου  $\Delta I = H \Delta y$ . Η στοιχειώδη μαγνητική ενέργεια είναι

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \Delta L (\Delta I)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu H \Delta x \Delta z}{\Delta I} (\Delta I)^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \Delta v$$

Άρα, η πυκνότητα ενέργειας μαγνητοστατικού πεδίου

$$w_m = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta v} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{B^2}{2\mu}$$

και η ίδια η ενέργεια

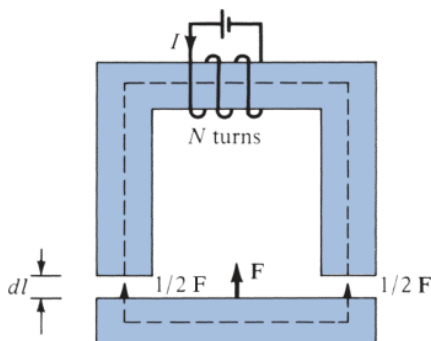
$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$$

- 1 Μαγνητικές δυνάμεις και υλικά
- 2 Μαγνητικά κυκλώματα
- 3 Ενέργεια μαγνητοστατικού πεδίου
- 4 **Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά**

# Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά

Δυνάμεις από μαγνητικό πεδίο σε μαγνητικά υλικά.

Ηλεκτρομηχανικά συστήματα, π.χ., ηλεκτρομαγνήτες, ρελέ, περιστρεφόμενες μηχανές, μαγνητική αιώρηση (magnetic levitation). Έστω ο ηλεκτρομαγνήτης του σχήματος:



## Δυνάμεις σε μαγνητικά υλικά (συνέχεια 1)

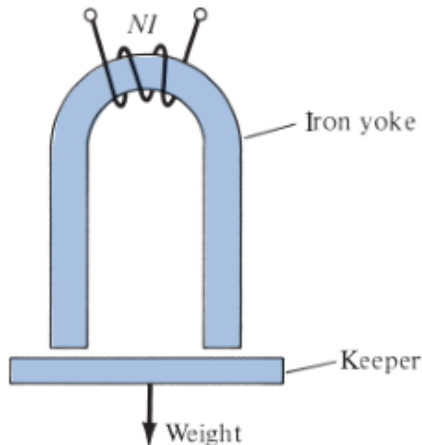
Για σταθερό  $\mu$  και αμελητέα σκέδαση  $B_{1n} = B_{2n}$ . Η δύναμη μεταξύ των δυο τμημάτων σιδηρομαγνητικού υλικού μπορεί να βρεθεί από την μεταβολή της ολικής ενέργειας όταν η μετατόπιση είναι  $d\ell$ . Το έργο που απαιτείται για αυτή τη μετατόπιση είναι ίσο με την ενέργεια στο διάκενο

$$-F d\ell = dW_m = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) S d\ell \Rightarrow F = -\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

όπου  $S$  η διατομή των γειτονικών επαφών στο διάκενο, ο παράγοντας 2 έχει να κάνει με τα δυο διάκενα και το μείον με το ότι η δύναμη προσπαθεί να μειώσει το διάκενο (ελκυστική).

## Άσκηση 7

Ηλεκτρομαγνήτης U σχήματος είναι σχεδιασμένος να ανυψώνει φορτίο 400 kg. Ο πυρήνας έχει  $\mu_r = 3000$ , διατομή επαφής  $40 \text{ cm}^2$ , μέσο μήκος 50 cm και τα διάκενα αέρος είναι μήκους 0.1 mm το καθένα. Θεωρώντας τη μαγνητική αντίσταση του σπλισμού αμελητέα υπολογίστε τον αριθμό σπειρών στο πηνίο για ρεύμα  $I = 1 \text{ A}$ .



## Άσκηση 7 (συνέχεια 1)

Η δύναμη του ηλεκτρομαγνήτη αντισταθμίζει τη δύναμη της βαρύτητας:

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0} = mg \Rightarrow B = \sqrt{\frac{mg\mu_0}{S}} = \sqrt{\frac{400 \times 9.81 \times 4\pi \times 10^{-7}}{40 \times 10^{-4}}} = 1.11 \text{ T}$$

$$\text{ΜΕΔ} = NI = \Phi(R_m + R_\delta)$$

$$R_m = \frac{\ell}{\mu_r \mu_0 S} = 3.316 \times 10^4 \text{ H}^{-1} \quad R_\delta = \frac{2\delta}{\mu_0 S} = 3.979 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$N = \frac{\Phi(R_m + R_\delta)}{I} = \frac{BS(R_m + R_\delta)}{I} = 323.97 \approx 324$$

# Μαγνητική αιώρηση (magnetic levitation)

Μαγνητική αιώρηση ([magnetic levitation](#)). Εφαρμογή αιώρησης αντικειμένων με ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

- Βασίζεται κυρίως στην ιδιότητα των διαμαγνητικών υλικών να απωθούνται από μαγνητικά πεδία. Υπεραγώγιμα υλικά εμφανίζουν έντονα αυτή την ιδιότητα.
- Κύρια εφαρμογή τα μαγνητικά τραίνα ([maglev](#)).

Δυο είδη maglev:

- Ηλεκτρομαγνητική αιώρηση (electromagnetic levitation - EML) που χρησιμοποιεί την ελκυστική δύναμη μεταξύ ηλεκτρομαγνήτη στο αιωρούμενο σώμα και κύκλωμα εδάφους.
- Ηλεκτροδυναμική αιώρηση (electrodynamic levitation - EDL) που χρησιμοποιεί την απωστική δύναμη μεταξύ υπεραγώγιμων μαγνητών στο σώμα και επαγωγικών ρευμάτων σε κυκλώματα εδάφους.

# Μαγνητική αιώρηση (συνέχεια 1)

Οποιοδήποτε σύστημα maglev αποτελείται από τρία τμήματα:

- 1 Μαγνητικής ανάρτησης (magnetic suspension). Σταθερή ανάρτηση/αιώρηση σώματος στο δικό του μαγνητικό πεδίο.
- 2 Μηχανή προώθησης (propulsion motor). Παράγει δύναμη ώθησης για κίνηση σε προκαθορισμένη διαδρομή με σταθερή ταχύτητα.
- 3 Σύστημα ισχύος που προσφέρει αδιάλειπτη ισχύ,

Ταχύτητα: Συμβατικά τρέινα μέχρι 300 km/h. Maglev μέχρι 500 km/h.

Ελάχιστα κινούμενα τμήματα. Λειτουργία αδιάφορη καιρικών συνθηκών. Δεν χρειάζονται εναέριες γραμμές μεταφοράς.



SQUIDS superconducting quantum interface devices

Οι πιο ευαίσθητοι αισθητήρες μαγνητικής ροής μέχρι πεδία  $5 \times 10^{-18}$  T.

Εφαρμογές σε γεωμαγνητισμό (ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων), βιομαγνητισμό, μαγνητικά μικροσκόπια, nuclear magnetic resonance (NMR), low magnetic field magnetic resonance imaging (MRI).

Βασικές αρχές:

- 1 Κβαντισμός μαγνητικής ροής ( $h/2e = 2.0678$  fWb).
- 2 **Josephson tunneling**. Φαινόμενο εμφάνισης ρεύματος χωρίς εφαρμογή τάσης σε επαφή μεταξύ δυο υπεραγώγιμων υλικών ασθενώς συζευγμένων (weak link) με λεπτό μονωτικό στρώμα (superconductor-insulator-superconductor junction)

Δυο είδη SQUIDS, DC (δυο επαφές) και RF (μια επαφή). Μεταβολές μαγνητικής ροής αντιστοιχούν σε εμφάνιση μικρής εναλλασσόμενης τάσης.