Ηλεκτρομαγνητισμός

Διάλεξη 02

Α. Δροσόπουλος

18-10-2021

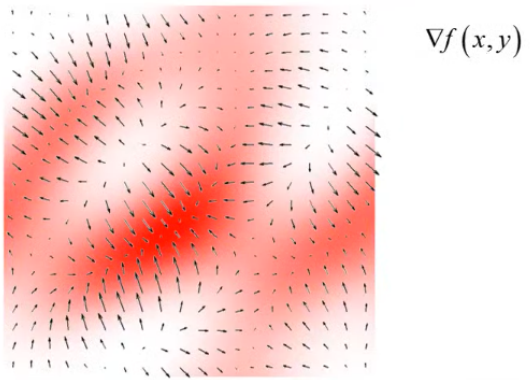
Outline

Topic

1. Μαθηματικό υπόβαθρο (συνέχεια)

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου

Γενίκευση της παραγώγου σε περισσότερες διαστάσεις. Χαρακτηρίζει τον ρυθμό μεταβολής της τιμής ενός βαθμωτού πεδίου στην κατεύθυνση που είναι μέγιστος. Η βάθμωση (grad, gradient) παράγει ένα διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα: Βαθμίδα βαθμωτού πεδίου

Βαθμίδα ή βάθμωση (grad) βαθμωτού πεδίου 2

Σαν γενίκευση της παραγώγου ισχύουν επίσης:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla f^n = n f^{n-1}\nabla f$$

όπου f και g βαθμωτά πεδία στον τρισδιάστατο χώρο και n ακέραιος.

Σημειώνουμε επίσης ότι:

- Το μέτρο της βάθμωσης ∇f ισούται με τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f δείχνει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο χώρο.
- Η βάθμωση ∇f σε κάθε σημείο στο χώρο είναι κάθετη στη σταθερή επιφάνεια $f = c$ που περνά από αυτό το σημείο.
- Η προβολή (ή συνιστώσα) της βάθμωσης ∇f στην κατεύθυνση κάποιου μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a}$ είναι $\nabla f \cdot \mathbf{a}$ και ονομάζεται η παράγωγος κατεύθυνσης του πεδίου f στην κατεύθυνση του $\mathbf{a}$.
- Για $\mathbf{A} = \nabla f$, το f είναι το βαθμωτό δυναμικό του $\mathbf{A}$.

Παράδειγμα

Για το πεδίο $W = x^2y^2 + xyz$, υπολογίστε τη βάθμωση ∇W και την παράγωγο κατεύθυνσης $dW/d\ell$ στην κατεύθυνση $\mathbf{a} = (3, 4, 12)$ στο σημείο $(2, -1, 0)$.

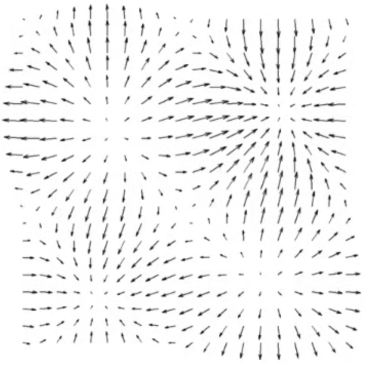
$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial W}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} = (2xy^2 + yz)\,\hat{\mathbf{x}} + (2x^2y + xz)\,\hat{\mathbf{y}} + (xy)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Στο σημείο $(2, -1, 0)$ έχουμε $\nabla W = (4, -8, -2)$ οπότε

$$\frac{dW}{d\ell} = \nabla W \cdot \hat{\mathbf{a}} = (4, -8, -2) \cdot \frac{(3, 4, 12)}{\|(3, 4, 12)\|} = -3.3846$$

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου

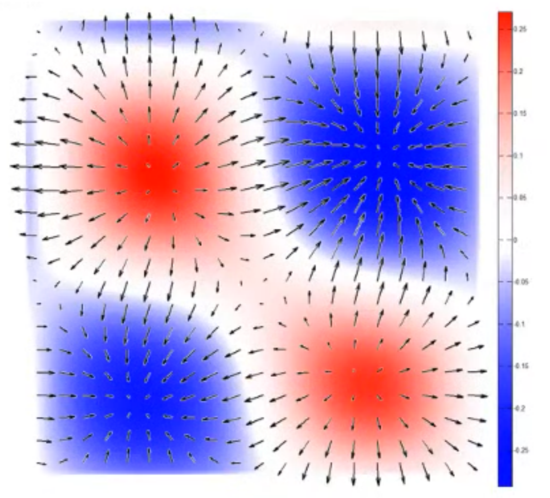
Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου φανερώνει τα σημεία του πεδίου όπου «πηγάζει» ή «εξαφανίζεται». Σύγκλιση ή απόκλιση (πηγές, sources, καταβόθρες, sinks).
Συμβολίζεται με: $\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y)$.



$\vec{A}(x,y)$

Σχήμα: Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 2



$$\nabla \bullet \vec{A}(x,y)$$

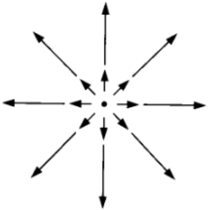
Σχήμα: Με την απόκλιση καταλήγουμε σε βαθμωτό.

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 3

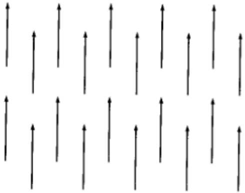
Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}(x, y, z)$ στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \, \hat{\mathbf{x}} + A_y \, \hat{\mathbf{y}} + A_z \, \hat{\mathbf{z}} \right) =$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

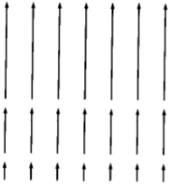
Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 4



(a)



(b)



(c)

Απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου 5

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$

(b) $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}$

(c) $\mathbf{C} = z\,\hat{\mathbf{z}}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial (1)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = \frac{\partial z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

Άσκηση

Υπολογίστε την απόκλιση των παρακάτω πεδίων:

- $\mathbf{A} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{C} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$

Απαντήσεις:

- $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2x + 0 - 2x = 0$
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = y + 2z + 3x$
- $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 + 2x + 2y = 2(x + y)$

Άσκηση

Σχεδιάστε το πεδίο $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}/r^2$ και υπολογίστε την απόκλιση. Σχολιάστε την απάντηση.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] =$$

$$= ()^{-3/2} + x\left(-\frac{3}{2}\right)()^{-5/2}2x + ()^{-3/2} + y\left(-\frac{3}{2}\right)()^{-5/2}2y + ()^{-3/2} + z\left(-\frac{3}{2}\right)()^{-5/2}2z =$$

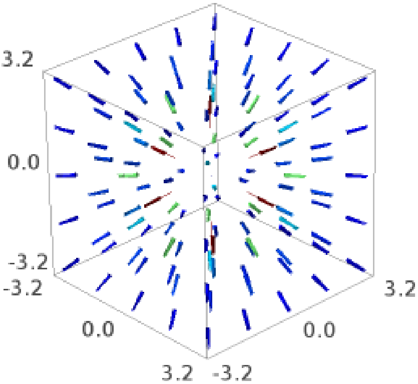
$$= 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2+y^2+z^2) = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0$$

Σχόλιο.

sketch applet

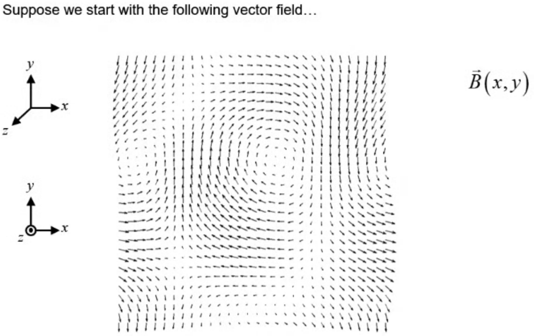
```
sage: x,y,z=var('x y z')
sage: p=plot_vector_field3d((x/(x^2+y^2+z^2)^(3/2),y/(x^2+y^2+z^2)^(3/2),z/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)),(x,-3,3),(y,-3,3),(z
sage: p.show()
Launched html viewer for Graphics3d Object
sage: p.save('fig1r2.png')
```

Άσκηση



Στροβιλισμός (curl) διανυσματικού πεδίου

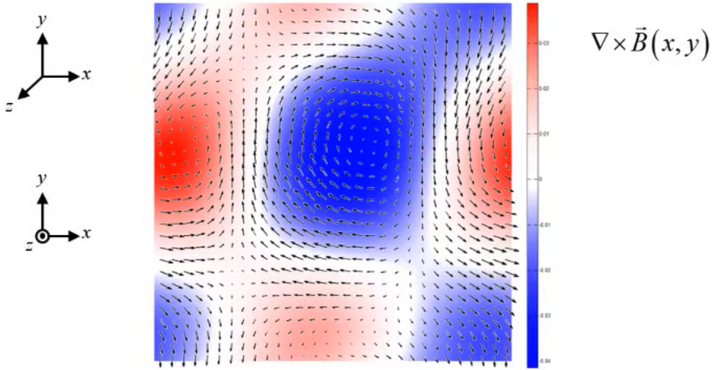
Στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο και χαρακτηρίζει την ιδιότητα του αρχικού πεδίου να περιστρέφεται γύρω από κάποιον άξονα. Λίμνη. Φελλός με οδοντογλυφίδες.



Σχήμα: Ξεκινάμε με ένα διανυσματικό πεδίο.

Στροβιλισμός (curl) διανυσματικού πεδίου 2

The color in the background is the magnitude of the curl. The direction is either into, or out of, the screen. Red indicates $+z$ direction while blue indicates $-z$ direction.



Σχήμα: Καταλήγουμε σε ένα διανυσματικό πεδίο.

Στροβιλισμός (curl) διανυσματικού πεδίου 3

Ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$ στο τρισδιάστατο χώρο εκφράζεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Στροβιλισμός (curl) διανυσματικού πεδίου 4

- Ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου είναι ένα άλλο διανυσματικό πεδίο
- $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
- $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$
- Η απόκλιση του στροβιλισμού διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- Ο στροβιλισμός της βάθμωσης βαθμωτού πεδίου είναι μηδέν, $\nabla \times \nabla f = 0$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το στροβιλισμό των πεδίων:

- $\mathbf{P} = x^2 yz\,\hat{\mathbf{x}} + xz\,\hat{\mathbf{z}}$,
- $\mathbf{A} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{C} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$

$$\nabla \times \mathbf{P} = \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= (0-0)\hat{\mathbf{x}} + (x^2 y - z)\hat{\mathbf{y}} + (0 - x^2 z)\hat{\mathbf{z}} = (x^2 y - z)\hat{\mathbf{y}} - x^2 z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = -6xz\hat{\mathbf{x}} + 2z\hat{\mathbf{y}} + 3z^2\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -2y\hat{\mathbf{x}} - 3z\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \times \mathbf{C} = 0$$

Άσκηση

- Έστω δυο διανυσματικά πεδία $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Ποια είναι η έκφραση $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες;
- Υπολογίστε την έκφραση $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}$ για το μοναδιαίο διάνυσμα θέσης $\hat{\mathbf{r}}$.
- Για τα πεδία $\mathbf{A} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$ και $\mathbf{B} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$ υπολογίστε το $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$.

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} +$$

$$+ \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Άσκηση (συν)

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Η συνιστώσα x

$$[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}]_x = \frac{1}{\sqrt{}} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ x \left[()^{-1/2} - x\frac{1}{2}()^{-3/2} 2x \right] + yx \left[-\frac{1}{2}()^{-3/2} 2y \right] + zx \left[-\frac{1}{2}()^{-3/2} 2z \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \frac{x}{r} - \frac{1}{r^3}(x^3 + xy^2 + xz^2) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{x}{r} - \frac{x}{r} \right) = 0$$

ομοίως και οι άλλες συνιστώσες οπότε:

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = 0$$

Άσκηση (συν)

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xz^2\frac{\partial}{\partial y} - 2xz\frac{\partial}{\partial z}\right)(xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= \left(x^2y + 3x^2z^2\right)\,\hat{\mathbf{x}} + \left(6xz^3 - 4xyz\right)\,\hat{\mathbf{y}} - \left(3x^2z\right)\,\hat{\mathbf{z}} =$$

$$= x^2(y+3z^2)\hat{\mathbf{x}} + 2xz(3z^2-2y)\hat{\mathbf{y}} - 3x^2z\hat{\mathbf{z}}$$

Λαπλασιανή (Laplacian)

Αν πάμε σε δεύτερες παραγώγους του τελεστή ∇ έχουμε πέντε περιπτώσεις:

1. Για βαθμωτό πεδίο T εφαρμογή ∇ μια φορά δίνει το διανυσματικό πεδίο ∇T. Άρα μπορούμε να έχουμε απόκλιση της βάθμωσης
$$\nabla \cdot (\nabla T)$$
2. και στροβιλισμό της βάθμωσης
$$\nabla \times (\nabla T)$$
3. Για διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}$ η απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{v}$ είναι βαθμωτό μέγεθος. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να πάρουμε τη βάθμωση
$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$
4. Για διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}$ ο στροβιλισμός $\nabla \times \mathbf{v}$ είναι διάνυσμα, άρα μπορούμε να έχουμε επιπλέον και απόκλιση
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$
5. και στροβιλισμό
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

Λαπλασιανή (Laplacian) (2)

Στην πρώτη περίπτωση, απόκλιση βάθμωσης, έχουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T = \left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right] \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right] \Rightarrow$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \Delta T$$

Αυτή είναι η Λαπλασιανή για βαθμωτό πεδίο.

Φυσικό νόημα:

- Η βάθμωση είναι διανυσματικό πεδίο και σημαίνει συνήθως ροή κάποιου μεγέθους. Η απόκλιση σε αυτή τη ροή σημαίνει κάποια πηγή ή καταβύθιση του ρέοντος μεγέθους.
- Εναλλακτικά, από επέκταση μονοδιάστατης κατάστασης, η δεύτερη παράγωγος μας μιλά για την καμπυλότητα κάποιας βαθμωτής συνάρτησης (κύρτωση). Άρα, μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ότι μας λέει κατά πόσο η τιμή του αρχικού βαθμωτού πεδίου διαφέρει από τη μέση τιμή γύρω του, ή σαν τη ροή κάποιας ποσότητας (βλ. ενδιαφέρουσα πηγή εδώ).

Λαπλασιανή (Laplacian) (3)

Στην δεύτερη περίπτωση, ο στροβιλισμός της βάθμωσης είναι πάντα 0. Χρήσιμο, αλλά δεν χρειάζεται να δώσουμε κάποιο ιδιαίτερο όνομα.

Η τρίτη περίπτωση, βάθμωση απόκλισης, σπάνια εμφανίζεται στην πράξη, άρα πάλι δεν δίνουμε κάποιο ιδιαίτερο όνομα σε αυτό το μέγεθος.

Η τέταρτη περίπτωση, απόκλιση στροβιλισμού, είναι πάντα 0. Χρήσιμο, αλλά και πάλι δεν χρειάζεται να δώσουμε κάποιο ιδιαίτερο όνομα.

Στην πέμπτη περίπτωση βγαίνει η σχέση:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

από όπου μπορούμε να ορίσουμε τη Λαπλασιανή ενός διανυσματικού πεδίου. Σε καρτεσιανές:

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla^2 v_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 v_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 v_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Ερμηνεύεται σαν τη βάθμωση της απόκλισης μείον το στροβιλισμό του στροβιλισμού του πεδίου σε μια περιοχή.

Εξίσωση Laplace

Ένα βαθμωτό πεδίο V ονομάζεται *αρμονικό* σε μια περιοχή του χώρου εάν η Laplacian μηδενίζεται σε αυτήν την περιοχή.

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{εξίσωση Laplace}$$

Η λύση της εξίσωσης Laplace είναι τότε ημιτονοειδούς μορφής (αρμονική).

Άσκηση

Υπολογίστε τη Λαπλασιανή των παρακάτω πεδίων:

- $T_a = x^2 + 2xy + 3z + 4$
- $T_b = \sin x \sin y \sin z$
- $T_c = e^{-5x} \sin(4y) \cos(3z)$
- $\mathbf{v} = x^2\, \hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\, \hat{\mathbf{y}} - 2xz\, \hat{\mathbf{z}}$

Απαντήσεις:

- $\nabla^2 T_a = 2$
- $\nabla^2 T_b = -3\, \sin(x) \sin(y) \sin(z)$
- $\nabla^2 T_c = 0$
- $\nabla^2 \mathbf{v} = 2\, \hat{\mathbf{x}} + 6\, x\, \hat{\mathbf{y}}$

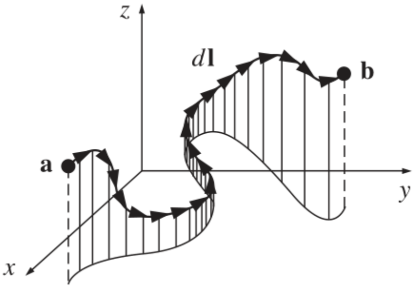
Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v}$ σε μια συγκεκριμένη καμπύλη από το σημείο $\mathbf{a}$ στο σημείο $\mathbf{b}$ της καμπύλης είναι:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

όπου $d\mathbf{l}$ το διάνυσμα της απειροστής μετατόπισης. Αν η καμπύλη είναι κλειστή ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$) τότε:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$



Επικαμπύλια ολοκληρώματα (2)

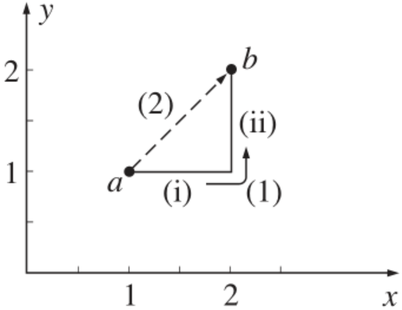
Σε κάθε σημείο της καμπύλης παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{v}$ σε αυτό το σημείο επί την μετατόπιση $d\mathbf{l}$ μέχρι το επόμενο σημείο της καμπύλης.

Παράδειγμα: Έργο που παράγει μια δύναμη.

Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από τη συγκεκριμένη καμπύλη εκτός αν το πεδίο είναι συντηρητικό (conservative) οπότε εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $\mathbf{v} = y^2\ \hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\ \hat{\mathbf{y}}$ από το σημείο $\mathbf{a} = (1,1,0)$ στο σημείο $\mathbf{b} = (2,2,0)$ κατά μήκος των διαδρομών (1) και (2). Ποια η τιμή του ολοκληρώματος στην κλειστή διαδρομή (1)-(2);



Παράδειγμα (2)

Η μετατόπιση είναι $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$. Η διαδρομή (1) αποτελείται από το τμήμα (i) όπου $dy = dz = 0$ και

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}}, \quad y = 1, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = y^2 dx = dx, \quad \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 dx = 1$$

Για το τμήμα (ii) όπου $dx = dz = 0$

$$d\mathbf{l} = dy\,\hat{\mathbf{y}}, \quad x = 2, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 2x(y+1)dy = 4(y+1)dy, \quad \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 4\int_1^2 (y+1)dy = 10$$

άρα συνολικά για τη διαδρομή (1)

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 1 + 10 = 11$$

Παράδειγμα (3)

Για τη διαδρομή (2), $x = y,\ dx = dy,\ dz = 0$

$$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = x^2 dx + 2x(x+1)dx = (3x^2+2x)dx$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2+2x)dx = (x^3+x^2)\Big|_1^2 = 10$$

Για την κλειστή διαδρομή (1)-(2)

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 11 - 10 = 1$$

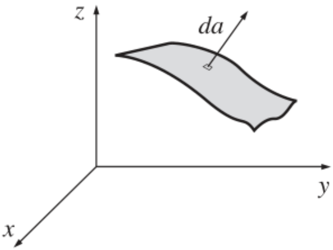
Επιφανειακά ολοκληρώματα

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v}$ σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια S είναι:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$$

όπου $d\mathbf{a}$ το διάνυσμα στοιχειώδους εμβαδού κάθετα στην επιφάνεια. Υπάρχει κάποια απροσδιοριστία στη φορά. Εάν η επιφάνεια είναι κλειστή η φορά είναι θετική από μέσα προς τα έξω. Αλλιώς εξαρτάται από τη φορά διαγραφής της κλειστής καμπύλης που οριοθετεί την επιφάνεια. Συμβατικά ακολουθούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού. Για κλειστές επιφάνειες το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι:

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$$



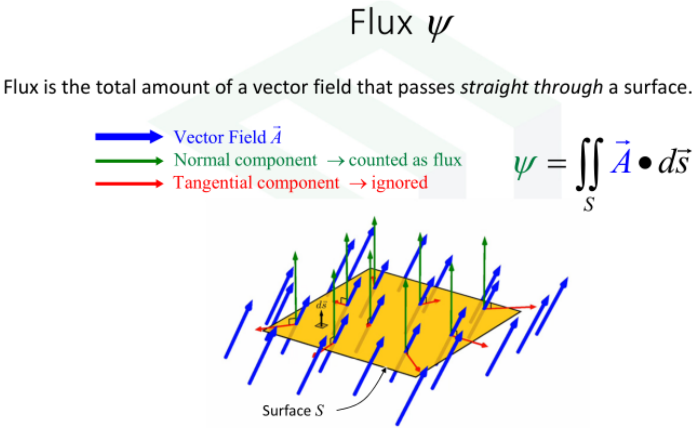
Επιφανειακά ολοκληρώματα (2)

Σε κάθε σημείο της επιφάνειας παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{v}$ με το διάνυσμα στοιχειώδους εμβαδού $d\mathbf{a}$ στο σημείο εκείνο.

Παράδειγμα: Σε ροή ρευστού, αν το $\mathbf{v}$ είναι ανάλογο με την ταχύτητα ροής της μάζας του ρευστού, το επιφανειακό ολοκλήρωμα αναπαριστά τη συνολική μάζα ανά μονάδα χρόνου που διαπερνά την επιφάνεια. (Βλ. επίσης flux).

Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιφάνεια εκτός από μια ορισμένη κατηγορία πεδίων όπου εξαρτάται μόνο από την καμπύλη που οριοθετεί την επιφάνεια.

Ροή (flux)



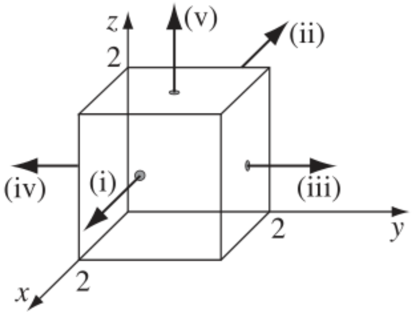
Σχήμα: Ροή: Ολική ποσότητα διανυσματικού πεδίου που διέρχεται κάθετα από μια επιφάνεια

Παράδειγμα

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου

$$\mathbf{v} = 2xz\,\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\,\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\,\hat{\mathbf{z}}$$

στον κύβο του σχήματος όπου εξαιρούμε την κάτω πλευρά.



Παράδειγμα (2)

(i): $x = 2,\ d\mathbf{a} = dydz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 2xzdydz = 4zdydz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 4\int_0^2 dy \int_0^2 zdz = 16$$

(ii): $x = 0,\ d\mathbf{a} = -dydz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -2xzdydz = 0$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 0$$

(iii): $y = 2,\ d\mathbf{a} = dxdz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = (x+2)dxdz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 (x+2)dx \int_0^2 dz = 12$$

Παράδειγμα (3)

(iv): $y = 0,\ d\mathbf{a} = -dxdz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -(x+2)dxdz$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -\int_0^2 (x+2)dx \int_0^2 dz = -12$$

(v): $z = 2,\ d\mathbf{a} = dxdy\,\hat{\mathbf{z}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = y(z^2-3)dxdy = ydxdy$

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 dx \int_0^2 ydy = 4$$

Άρα, συνολική ροή:

$$\int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20$$

Ολοκληρώματα όγκου

Ολοκλήρωμα όγκου βαθμωτού πεδίου T σε μια περιοχή V είναι

$$\int_V T d\tau$$

όπου $d\tau$ ο στοιχειώδης όγκος στην περιοχή. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες $d\tau = dxdydz$.

Παράδειγμα: Αν T η γνωστή πυκνότητα τότε το ολοκλήρωμα όγκου είναι η συνολική μάζα.

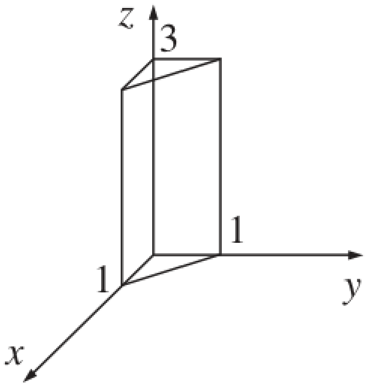
Τα ολοκληρώματα όγκου επεκτείνονται και σε διανυσματικά πεδία $\mathbf{v}$ όπου

$$\int_V \mathbf{v} d\tau = \int_V (v_x\,\hat{\mathbf{x}} + v_y\,\hat{\mathbf{y}} + v_z\,\hat{\mathbf{z}}) d\tau = \hat{\mathbf{x}} \int_V v_x\, d\tau + \hat{\mathbf{y}} \int_V v_y\, d\tau + \hat{\mathbf{z}} \int_V v_z\, d\tau$$

όπου τα μοναδιαία διανύσματα (σταθερά για καρτεσιανές συντεταγμένες) βγαίνουν έξω από τα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όγκου της $T = xyz^2$ στο πρίσμα του σχήματος

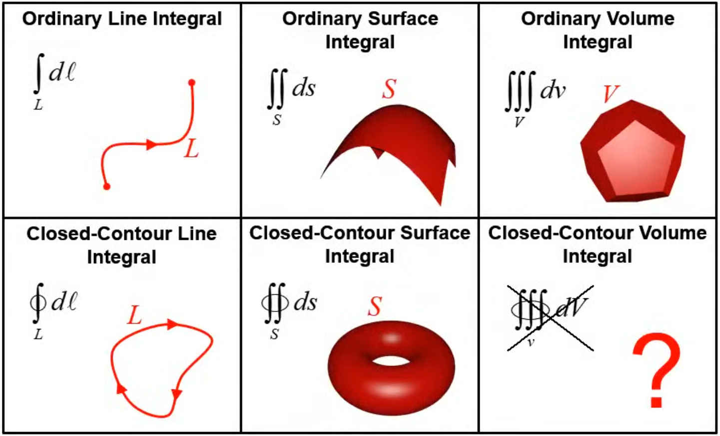


Παράδειγμα (2)

Φανταζόμαστε έναν στοιχειώδη όγκο και σαρώνουμε το πρίσμα. Ένας τρόπος είναι μια «φέτα» κάθετη στον άξονα x όπου $y = 1 - x$ και $0 < z < 3$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1 - x$. Οπότε

$$\int_V T d\tau = \int_{z=0}^{3} z^2 \left\{ \int_{x=0}^{1} x \left[\int_{y=0}^{1-x} y dy \right] dx \right\} dz = \frac{3}{8} = 0.375$$

Ολοκληρώματα



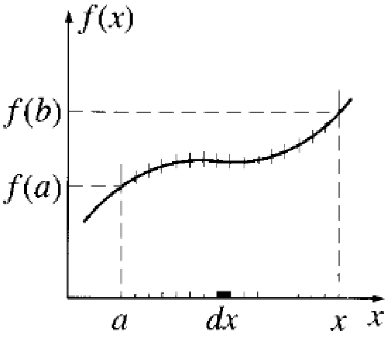
Σχήμα: Ολοκληρώματα

Θεμελιώδες θεώρημα ανάλυσης

Για $f(x)$ βαθμωτή συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a) \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a)$$

όπου $df/dx = F(x)$. Ερμηνεία.



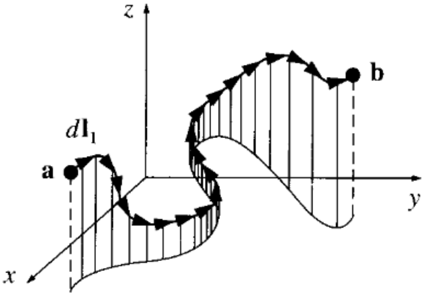
Θεμελιώδες θεώρημα ανάλυσης για βάθμωση

Για $T(x, y, z)$ βαθμωτή συνάρτηση τριών μεταβλητών. Κάθε στοιχειώδης μεταβολή dT εξαρτάται από την κατεύθυνση που παίρνουμε σε κάποια καμπύλη στο χώρο.

$$dT_1 = (\nabla T) \cdot d\mathbf{l}_1, dT_2 = (\nabla T) \cdot d\mathbf{l}_2, ...$$

και η ολική μεταβολή από $\mathbf{a}$ σε $\mathbf{b}$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a})$$



ΘΘΑ για βάθμωση (2)

- Γενίκευση της μονοδιάστατης περίπτωσης με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που εν γένει εξαρτάται από τη διαδρομή (καμπύλη). Εξαρτάται;
- Βλέπουμε ότι η τελική τιμή εξαρτάται μόνο από αρχικό και τελικό σημείο. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βάθμωσης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.
- Προφανώς αν η διαδρομή είναι κλειστή

$$\oint (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Παράδειγμα 1.9

ΘΘΑ για απόκλιση

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$$

θεώρημα απόκλισης, θεώρημα Gauss, θεώρημα Green.

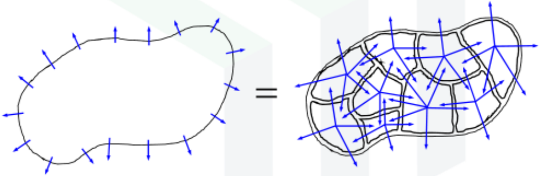
Το ολοκλήρωμα της απόκλισης σε μια περιοχή είναι η ολική ροή που διέρχεται από την κλειστή επιφάνεια που οριοθετεί την περιοχή.

Παράδειγμα 1.10

ΘΘΑ για απόκλιση (divergence theorem)

Divergence Theorem

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{F} \bullet d\vec{s} = \iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{F}\right) dv$$



The divergence theorem allows us to write a closed-contour surface integral as a volume integral.

Σχήμα: Συνδέει ροή διανυσματικού πεδίου μέσα από μια κλειστή επιφάνεια με την απόκλιση του πεδίου στον εσωκλεισμένο όγκο

ΘΘΑ για στροβιλισμό

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Θεώρημα Stokes

Το ολοκλήρωμα του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου σε μια επιφάνεια (ροή) ισούται με την κυκλοφορία του (εφαπτόμενη συνιστώσα πεδίου) στην κλειστή καμπύλη που οριοθετεί την επιφάνεια.

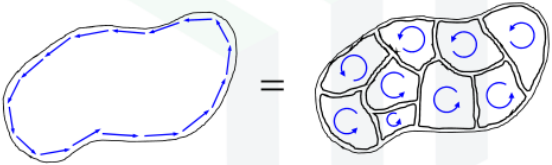
- Ανεξάρτητο επιφάνειας. Εξαρτάται μόνο από την καμπύλη οριοθέτησης.
- Για κλειστή επιφάνεια μηδενίζεται.

Παράδειγμα 1.11

ΘΘΑ για στροβιλισμό - Stoke's theorem

Stoke's Theorem

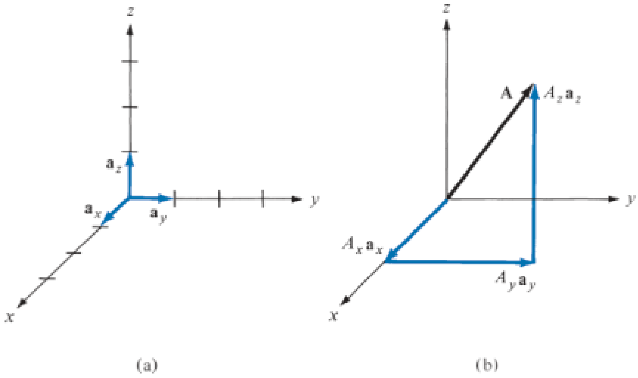
$$\oint_L \vec{F} \bullet d\vec{\ell} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{F} \right) \bullet d\vec{s}$$



Stoke's theorem allows us to write a closed-contour line integral as a surface integral.

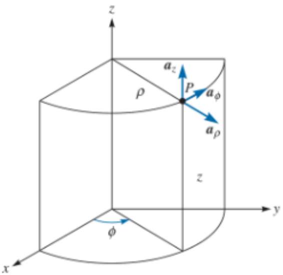
Σχήμα: Συνδέει επικαμπύλιο με επιφανειακό ολοκλήρωμα

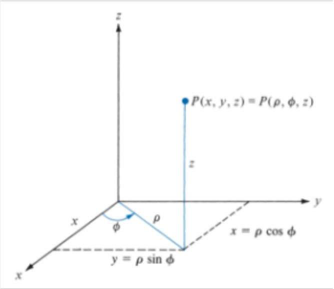
Σύστημα αξόνων: καρτεσιανό



Σχήμα: Καρτεσιανό σύστημα αξόνων στον 3D χώρο.

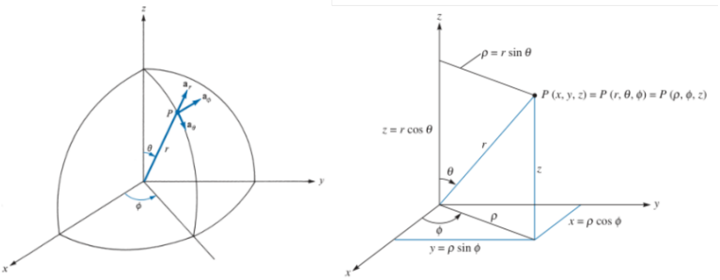
Σύστημα αξόνων: κυλινδρικό





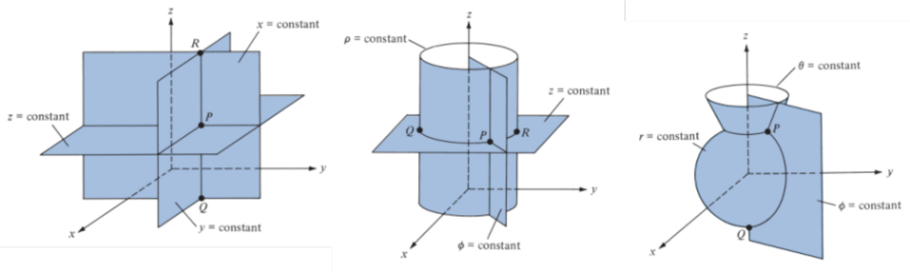
Σχήμα: Κυλινδρικό σύστημα αξόνων

Σύστημα αξόνων: σφαιρικό



Σχήμα: Σφαιρικό σύστημα αξόνων

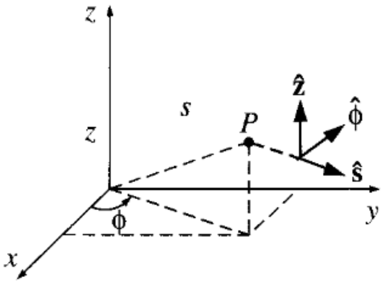
Επιφάνειες σταθερής τιμής



Σχήμα: Επιφάνειες σταθερής τιμής

Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) σημείου P ορίζονται όπως στο σχήμα.



Διάνυσμα σε αυτό το σύστημα:

$$\mathbf{A} = A_\rho\, \hat{\rho} + A_\phi\, \hat{\varphi} + A_z\, \hat{\mathbf{z}}$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)

Μετατροπές συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \qquad & \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= \rho\sin\phi \qquad & \phi &= \tan^{-1}(y/x) \\ z &= z \qquad & z &= z \end{aligned}$$

Μοναδιαία διανύσματα:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Προσοχή. Τα μοναδιαία διανύσματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες ΔΕΝ είναι σταθερά.

Κυλινδρικές συντεταγμένες (συν)

Η στοιχειώδης μετατόπιση

$$d\mathbf{l} = dl_\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + dl_\phi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dl_z\, \hat{\mathbf{z}} = d\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\, \hat{\mathbf{z}}$$

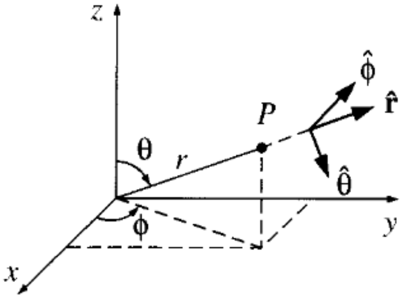
Ο στοιχειώδης όγκος: $d\tau = dl_r dl_\phi dz = \rho d\rho d\phi dz$

Η στοιχειώδης επιφάνεια εξαρτάται από το επίπεδο.

$$\begin{array}{lcccc}
\rho \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\phi dz\, \hat{\boldsymbol{\rho}} & = & \rho d\phi dz\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \\
\phi \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\rho dl_z\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} & = & d\rho dz\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
z \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\rho dl_\phi\, \hat{\mathbf{z}} & = & \rho d\rho d\phi\, \hat{\mathbf{z}}
\end{array}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) σημείου P ορίζονται όπως στο σχήμα.



Διάνυσμα σε αυτό το σύστημα:

$$\mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)

Μετατροπές συντεταγμένων:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi\sin\theta & \qquad r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
y &= r\sin\phi\sin\theta & \qquad \theta &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\
z &= r\cos\theta & \qquad \phi &= \tan^{-1}(y/x)
\end{aligned}
$$

Μοναδιαία διανύσματα:

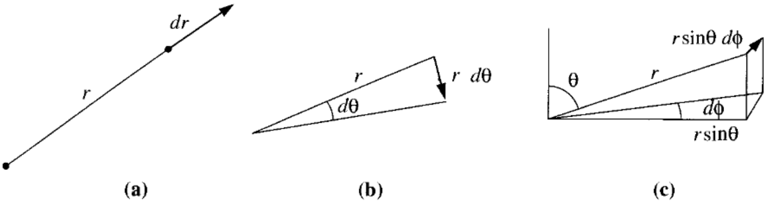
$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

Προσοχή. Τα μοναδιαία διανύσματα σε σφαιρικές συντεταγμένες ΔΕΝ είναι σταθερά.

Σφαιρικές συντεταγμένες (συν)

Η στοιχειώδης μετατόπιση

$$d\mathbf{l} = dl_r\,\hat{\mathbf{r}} + dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$



Ο στοιχειώδης όγκος: $d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

Η στοιχειώδης επιφάνεια εξαρτάται από το επίπεδο.

$$\begin{array}{lcrcl} r \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_\theta dl_\phi\,\hat{\mathbf{r}} & = & r^2 \sin\theta d\theta d\phi\,\hat{\mathbf{r}} \\ \theta \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_r dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} & = & r\sin\theta dr d\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \phi \text{ σταθερό} & : & d\mathbf{a} = dl_r dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} & = & r dr d\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{array}$$

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Rectangular to Cylindrical

Variable change
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \\ A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \\ A_z = A_z \end{cases}$$

Cylindrical to Rectangular

Variable change
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \begin{cases} \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_x = A_\rho\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - A_\phi\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y = A_\rho\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_\phi\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z = A_z \end{cases}$$

Rectangular to Spherical

Variable change
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi \\ \qquad + A_z\cos\theta \\ A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi \\ \qquad - A_z\sin\theta \\ A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \end{cases}$$

Spherical to Rectangular

Variable change
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_x = \dfrac{A_r x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta xz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} - \dfrac{A_\phi y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y = \dfrac{A_r y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} + \dfrac{A_\phi x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z = \dfrac{A_r z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{A_\theta\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

Τυπολόγιο

Dot Products

$\vec{A}\bullet\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta_{AB}$

$\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$

$\vec{A}\bullet\vec{A}=|\vec{A}|^2$

$\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}$

$\nabla\bullet(f\vec{A})=(\nabla\bullet\vec{A})f+\vec{A}\bullet(\nabla f)$

Cross Products

$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta_{AB}\hat{a}_n$

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

$\vec{A}\times\vec{A}=0$

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

$\nabla\times(f\vec{A})=(\nabla\times\vec{A})f+(\nabla f)\times\vec{A}$

Triple Products

$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\bullet(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})$

$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

Miscellaneous

Stoke's Theorem

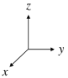
$\oint_L \vec{A}\bullet d\vec{\ell}=\iint_S(\nabla\times\vec{A})d\vec{s}$

Divergence Theorem

$\oint\!\!\oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s}=\iiint_V(\nabla\bullet\vec{A})dv$

Cartesian (x, y, z)

Vector Notation



$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$

Differential Terms

$d\vec{\ell}=dx\hat{a}_x+dy\hat{a}_y+dz\hat{a}_z$

$d\vec{s}=dydz\hat{a}_x+dxdz\hat{a}_y+dxdy\hat{a}_z$

$dv=dxdydz$

Vector Derivatives

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

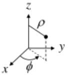
$$\nabla^2\vec{A}=\nabla^2A_x\hat{a}_x+\nabla^2A_y\hat{a}_y+\nabla^2A_z\hat{a}_z$$

$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

Cylindrical (ρ, ϕ, z)

Vector Notation



$\vec{A}=A_\rho\hat{a}_\rho+A_\phi\hat{a}_\phi+A_z\hat{a}_z$

Differential Terms

$d\vec{\ell}=d\rho\hat{a}_\rho+\rho d\phi\hat{a}_\phi+dz\hat{a}_z$

$d\vec{s}=\rho d\phi dz\hat{a}_\rho+d\rho dz\hat{a}_\phi+\rho d\rho d\phi\hat{a}_z$

$dv=\rho d\rho d\phi dz$

Vector Derivatives

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{a}_\phi+\frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{a}_\phi+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

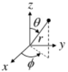
$$\nabla^2\vec{A}=\nabla^2A_\rho\hat{a}_\rho+\nabla^2A_\phi\hat{a}_\phi+\nabla^2A_z\hat{a}_z$$

$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{a}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{a}_\phi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{a}_z$$

Spherical (r, θ, ϕ)

Vector Notation



$\vec{A}=A_r\hat{a}_r+A_\theta\hat{a}_\theta+A_\phi\hat{a}_\phi$

Differential Terms

$d\vec{\ell}=dr\hat{a}_r+rd\theta\hat{a}_\theta+r\sin\theta d\phi\hat{a}_\phi$

$d\vec{s}=r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{a}_r+r\sin\theta drd\phi\hat{a}_\theta+rdrd\theta\hat{a}_\phi$

$dv=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

Vector Derivatives

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{a}_\phi$$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{a}_\phi$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\vec{A}=\nabla^2A_r\hat{a}_r+\nabla^2A_\theta\hat{a}_\theta+\nabla^2A_\phi\hat{a}_\phi$$

$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{a}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{a}_\phi$$

Συνάρτηση δ του Dirac

Έστω η συνάρτηση

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

που λογικά θα έπρεπε να έχει μεγάλη θετική απόκλιση. Και όμως

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

και πάλι όμως για σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R (θεώρημα απόκλισης)

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{R^2} \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\phi\, \hat{\mathbf{r}} = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$

Το πρόβλημα είναι στο σημείο $r = 0$. Παρόμοιο με το πρόβλημα υλικού σημείου με πεπερασμένη μάζα. Το λύνουμε με τη γενικευμένη συνάρτηση δ του Dirac.

Συνάρτηση δ του Dirac (2)

Σε μια διάσταση:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

όριο ακολουθίας συναρτήσεων που συγκλίνει στα παραπάνω.

Η βασική ιδιότητα:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = f(0)$$

Με μετατόπιση:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = f(a)$$

Συνάρτηση δ του Dirac (3)

Παραδείγματα:

$$\int_0^3 x^3 \delta(x-2)dx = 2^3 = 8$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x) \qquad \text{Παράδειγμα 1.15}$$

Προβλήματα 1.43, 1.44, 1.45

Συνάρτηση δ του Dirac (4)

Σε τρεις διαστάσεις:

$$\int_{\Omega} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) = 1$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{a}) d\tau = f(\mathbf{a})$$

Άρα

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \qquad \text{ή πιο γενικά} \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})$$

και εφόσον (πρόβλημα 1.13)

$$\nabla \left(\frac{1}{\mathscr{r}} \right) = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \Rightarrow \nabla^2 \frac{1}{\mathscr{r}} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})$$

Παράδειγμα 1.16

Θεώρημα Helmholtz

Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο σε μια περιοχή από την απόκλιση και το στροβιλισμό του:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \qquad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

σαν (θεώρημα Helmholtz)

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}$$

όπου

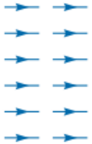
$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' \qquad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr'$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα σαρώνουν όλη την περιοχή και συγκλίνουν. Σύγκλιση σημαίνει απόκλιση D και στροβιλισμός $\mathbf{C}$ να τείνουν στο 0 ταχύτερα από $1/r^2$ καθώς $r \to \infty$ και $\mathbf{F}$ τείνει στο 0 καθώς $r \to \infty$. Η τυπική οριακή συνθήκη όπου όλα τα πεδία τείνουν στο μηδέν όσο απομακρυνόμαστε από τα φορτία που τα δημιουργούν. Τότε η λύση που προτείνει το θεώρημα Helmholtz είναι και μοναδική.

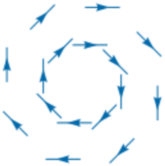
Κατηγοριοποίηση (classification) διανυσματικών πεδίων

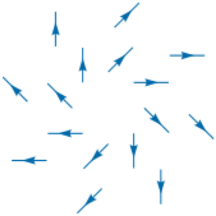
Ένα διανυσματικό πεδίο χαρακτηρίζεται πλήρως από την απόκλιση (divergence) ΚΑΙ το στροβιλισμό (curl) του. Οι περιπτώσεις που έχουμε είναι:

a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$
b) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$, $\nabla \times \mathbf{A} = 0$
c) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$
d) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$, $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$


(a)


(b)


(c)


(d)

Συντηρητικό πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται συντηρητικό (conservative), ή αστρόβιλο (irrotational) εάν $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Από το θεώρημα Stoke's

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\ell = 0$$

που σημαίνει ότι η κυκλοφορία του πεδίου γύρω από μια κλειστή καμπύλη είναι εκ ταυτότητος μηδέν, άρα η κυκλοφορία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της καμπύλης. Π.χ. ηλεκτροστατικό πεδίο και πεδίο βαρύτητας. Εν γένει ισχύει ότι $\nabla \times (\nabla V) = 0$ για οποιοδήποτε βαθμωτό πεδίο V άρα,

$$\text{εάν} \quad \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\text{τότε} \quad \oint_L \mathbf{A} \cdot d\ell = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = -\nabla V$$

Το $\mathbf{A}$ ονομάζεται επίσης δυναμικό πεδίο με V το βαθμωτό δυναμικό του $\mathbf{A}$. Το αρνητικό πρόσημο θα εξηγηθεί αργότερα.

Σωληνοειδές πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται σωληνοειδές εάν έχει μηδενική απόκλιση, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Από το θεώρημα απόκλισης

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV = 0$$

φαίνεται ότι οι γραμμές ροής του $\mathbf{A}$ που εισέρχονται στην κλειστή επιφάνεια S πρέπει και να εξέρχονται. Δεν έχουμε πηγές (sources) ή καταβόθρες (sinks). Π.χ. ασυμπίεστα ρευστά, μαγνητικά πεδία, πυκνότητες ρεύματος σε σταθερές καταστάσεις. Εν γένει ισχύει ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ άρα,

$$\text{εάν} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{τότε} \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F}$$