Ηλεκτρομαγνητισμός - Λύσεις

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

12/09/2024

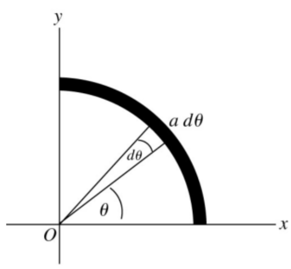
Δίδεται $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m $= 8.854 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)$.

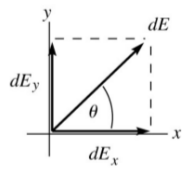
1 Θέμα (2 μον.)

Αρνητικό φορτίο $-Q$ κατανέμεται ομοιόμορφα σε ένα τέταρτο κύκλου ακτίνας a στο πρώτο τεταρτημόριο με κέντρο καμπυλότητας την αρχή των αξόνων. Βρείτε τις συνιστώσες x και y του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων.

Προσθέτουμε άλλο ένα τέταρτο κύκλου με θετικό φορτίο $+Q$ κατανεμημένο ομοιόμορφα στο δεύτερο τεταρτημόριο με ίδια ακτίνα και κέντρο καμπυλότητας. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ του συνολικού φορτίου στην αρχή των αξόνων;

Λύση





Μήκος τόξου ενός τεταρτημορίου είναι $\pi a/2$. Άρα γραμμική πυκνότητα φορτίου: $\lambda = Q/(\pi a/2) = 2Q/(\pi a)$. Επομένως το φορτίο dQ σε ένα στοιχειώδες κομμάτι τόξου $ad\theta$ είναι

$$dQ = \lambda a d\theta = \frac{2Q}{\pi a} a d\theta = \frac{2Q}{\pi} d\theta$$

Το φορτίο είναι αρνητικό άρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά από το κέντρο στο dQ και το μέτρο του πεδίου είναι

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} d\theta$$

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\cos\theta d\theta \Rightarrow E_x = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\left(\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\sin\theta d\theta \Rightarrow E_y = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

Το δεύτερο φορτίο στο δεύτερο τεταρτημόριο είναι θετικό. Άρα η φορά του ηλεκτρικού πεδίου είναι από το φορτίο στο κέντρο. Ανάλυση σε συνιστώσες δίνει

$$E_x = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} \qquad E_y = -\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

που σημαίνει ότι για το ολικό φορτίο οι y συνιστώσες αλληλοαναιρούνται και έχουμε

$$\mathbf{E} = 2E_x\hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{\pi^2\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{x}}$$

2 Θέμα (1 μον.)

Φορτίο 87.6 pC κατανέμεται ομοιόμορφα σε επιφάνεια λεπτού φύλλου μονωτικού υλικού ολικού εμβαδού 29.2 cm^2. Γκαουσιανή επιφάνεια περικλείει μέρος του φορτισμένου φύλλου. Αν η ροή μέσω της γκαουσιανής επφάνειας είναι 5 $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, πόσο εμβαδόν φύλλου περικλείεται εντός της γκαουσιανής;

Λύση

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου για το φύλλο είναι

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{87.6 \text{ pC}}{29.2 \text{ cm}^2} = 3 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

Ο νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow q = \epsilon_0 \Phi_E$$

όπου q το φορτίο εντός της γκαουσιανής και

$$A = \frac{q}{\sigma} = \frac{\epsilon_0 \Phi_E}{\sigma} = 1.47 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

όπου A το ζητούμενο εμβαδόν φύλλου που περικλείεται εντός της γκαουσιανής.

3 Θέμα (4 μον.)

Περιοχή στο χώρο περιέχει θετικό φορτίο $Q = 20$ μC κατανεμημένο σφαιρικά με πυκνότητα φορτίου

$$\rho(r) = \begin{cases} \alpha[1-(r/R)^3] & \text{για} \quad 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{για} \quad r \geq R \end{cases}$$

όπου α θετική σταθερά με μονάδες μέτρησης C/m^3 και $R = 3$ cm.

1. Προσδιορίστε την σταθερά α.
2. Χρησιμοποιείστε τον νόμο Gauss για να βρείτε έκφραση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ για $r > 0$.
3. Πόσο είναι το μέτρο του $\mathbf{E}$ για $r = 2R$;

Λύση

Έχουμε σφαιρική συμμετρία επομένως βολεύει να θεωρήσουμε το στοιχειώδες φορτίο σφαιρικού κελύφους ακτίνας r και πάχους dr, $dQ = \rho(r) 4\pi r^2 dr$ και να εφαρμόσουμε νόμο Gauss με γκαουσιανές σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας r.

Το φορτίο για $0 \leq r \leq R$ είναι

$$Q = \int dQ = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^R \alpha[1-(r/R)^3] 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \left[\int_0^R r^2 dr - \int_0^R \frac{r^5}{R^3} dr\right] =$$

$$= 4\pi\alpha R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi\alpha R^3 \qquad \text{και} \qquad \alpha = \frac{3Q}{2\pi R^3} = 0.354 \text{ C/m}^3$$

Για την περιοχή $0 \leq r \leq R$, ο νόμος Gauss δίνει

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r dQ = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \alpha[1-(r/R)^3] r^2 dr = \frac{4\pi\alpha}{3\epsilon_0}\left[1 - \frac{r^3}{2R^3}\right] r^3 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{3\epsilon_0}\left[1 - \frac{r^3}{2R^3}\right] r$$

Για $r > R$, έξω από την περιοχή όπου υπάρχει φορτίο, μπορούμε να θεωρήσουμε σημειακό φορτίο Q στο κέντρο και

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Για $r = 2R$, έχουμε

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4R^2} = 4.993 \times 10^7 \text{ N/C}$$

4 Θέμα (3 μον.)

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε περιοχή του χώρου είναι $V(x, y, z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$ όπου A σταθερά.

1. Να υπολογίσετε έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ σε κάθε σημείο της περιοχής.
2. Το έργο που παρήχθη από το πεδίο όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο 1.5 μC κινείται από το σημείο $(0, 0, 0.25)$ m προς την αρχή των αξόνων μετριέται ότι είναι 6×10^{-5} J. Υπολογίστε τη σταθερά A.
3. Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο $(0, 0, 0.25)$ m.

Λύση

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -2Ax\hat{\mathbf{x}} + 6Ay\hat{\mathbf{y}} - 2Az\hat{\mathbf{z}}$$

Εξ ορισμού, το έργο W_{ab} για μετακίνηση φορτίου q από το $a = (0, 0, 0.25)$ στο $b = (0, 0, 0)$ σε ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι

$$W_{ab} = q(V_a - V_b) = qV_a = qAz^2 \Rightarrow A = \frac{W_{ab}}{qz^2} = 640 \text{ V/m}^2$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο a είναι

$$\mathbf{E} = -2Ax\hat{\mathbf{x}} + 6Ay\hat{\mathbf{y}} - 2Az\hat{\mathbf{z}} = -2Az\hat{\mathbf{z}} = -320\ \hat{\mathbf{z}} \text{ V/m}$$