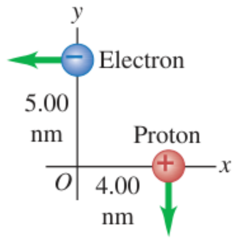
Ηλεκτρομαγνητισμός - Λύσεις

14/02/2024

Δίδονται: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C.

1 Θέμα (2 μον.)

Ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο κινούνται και τα δυο με ταχύτητα μέτρου 892 km/s σε κάθετες διευθύνσεις όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή στις θέσεις του σχήματος υπολογίστε:



1. Το ολικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ που παράγουν στην αρχή των συντεταγμένων.
2. Το μαγνητικό πεδίο που παράγει το ηλεκτρόνιο στη θέση του πρωτονίου.
3. Την ολική ηλεκτρική και μαγνητική δύναμη που ασκεί το ηλεκτρόνιο στο πρωτόνιο.

Λύση

Και τα δυο φορτία κινούνται άρα δημιουργούν γύρω τους μαγνητικό πεδίο. Έχουμε (δείκτης e για ηλεκτρόνιο και δείκτης p για πρωτόνιο):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{-e\mathbf{v}_e \times \mathbf{r}_e}{r_e^3} + \frac{e\mathbf{v}_p \times \mathbf{r}_p}{r_p^3}\right)$$

Για $v = 892$ km/s, $r_e = 5$ nm, $r_p = 4$ nm έχουμε στην αρχή των αξόνων:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi}\left[-\frac{(-1,0,0)\times(0,-r_e,0)}{r_e^3} + \frac{(0,-1,0)\times(-r_p,0,0)}{r_p^3}\right] = (0,0,-1.465)\times 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

Η απόσταση από το ηλεκτρόνιο στο πρωτόνιο είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που φαίνεται στο σχήμα, ή, διανυσματικά: $\mathbf{r}_{ep} = (0,-r_e,0) + (r_p,0,0) = (r_p,-r_e,0)$. Οπότε το μαγνητικό πεδίο που παράγει το ηλεκτρόνιο στη θέση του πρωτονίου είναι:

$$\mathbf{B}_{ep} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\mathbf{v}_e \times \mathbf{r}_{ep}}{r_{ep}^3} = (0,0,-0.272)\times 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρονίου στη θέση του πρωτονίου είναι:

$$\mathbf{E}_{ep} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e\mathbf{r}_{ep}}{r_{ep}^3}$$

Η ηλεκτρική δύναμη στο πρωτόνιο από το ηλεκτρόνιο είναι:

$$\mathbf{F}_{\text{ηλεκτρική}} = e\mathbf{E}_{ep} = (-3.51, 4.39, 0)\times 10^{-12}\ \mathrm{N}$$

Η μαγνητική δύναμη στο πρωτόνιο από το ηλεκτρόνιο είναι:

$$\mathbf{F}_{\text{μαγνητική}} = e\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_{ep} = (3.89, 0, 0)\times 10^{-17}\ \mathrm{N}$$

και η ολική:

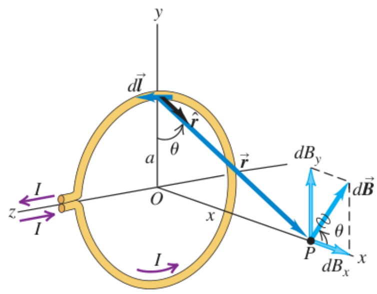
$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}_{ep} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_{ep}) = (-3.51, 4.39, 0)\times 10^{-12}\ \mathrm{N}$$

Η μαγνητική είναι αμελητέα μπροστά στην ηλεκτρική και μπορούμε να εκφράσουμε την ολική δύναμη σαν διάνυσμα μέτρου $F = 5.63 \times 10^{-12}$ N στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που φαίνεται στο σχήμα με φορά από το πρωτόνιο στο ηλεκτρόνιο και με γωνία με τον άξονα των x

$$\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{F}_{\text{ηλεκτρική}}\cdot(1,0,0)}{\|\mathbf{F}_{\text{ηλεκτρική}}\|}\right) = 128.7^\circ$$

2 Θέμα (2 μον.)

Έστω κυκλικός ρευματοφόρος βρόχος ακτίνας a όπως φαίνεται στο σχήμα.



1. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο **B** στο σημείο P του άξονά του που απέχει απόσταση x από το κέντρο του βρόχου..
2. Να υπολογιστεί η τιμή του όταν $I = 14.1$ A, $a = 8$ cm και $x = 6$ cm.

Λύση

Σύμφωνα με τον νόμο Biot-Savart και επειδή $d\mathbf{l}$ και $\mathbf{r}$ είναι κάθετα

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{x^2+a^2}$$

με το διάνυσμα $d\mathbf{B}$ να βρίσκεται στο επίπεδο xy (σχήμα) με συνιστώσες:

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{x^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \text{και} \qquad dB_y = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

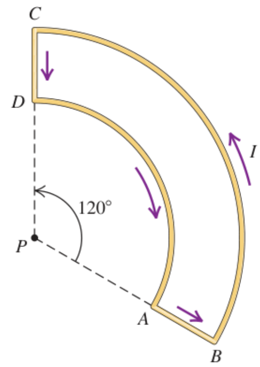
Με την ολοκλήρωση στο βρόχο οι συνιστώσες dB_y μηδενίζονται και το ολικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα x, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$, με μέτρο

$$B = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{adl}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}}\int dl = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}}2\pi a = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Η τιμή του όταν $I = 14.1$ A, $a = 8$ cm και $x = 6$ cm είναι:

$$B = 5.67\times 10^{-5}\ \text{T}$$

3 Θέμα (2 μον.)



Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο **B** στο σημείο P που οφείλεται στο ρεύμα $I = 12$ A που κυκλοφορεί στο σύρμα του σχήματος. Το τμήμα BC είναι τόξο περιφέρειας κύκλου ακτίνας 30 cm ενώ το P είναι το κέντρο καμπυλότητας του τόξου. Ομοίως, το τμήμα DA είναι τόξο περιφέρειας κύκλου ακτίνας 20 cm με το ίδιο κέντρο καμπυλότητας. Τα τμήματα CD και AB είναι ευθύγραμμα, μήκους 10 cm το καθένα.

Λύση

Πάλι νόμο Biot-Savart: $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$.

Θεωρούμε xy άξονες στο επίπεδο του βρόχου με z άξονα από το επίπεδο του χαρτιού προς τον αναγνώστη.

Για τα τόξα AB και CD, $d\mathbf{l}$ και $\mathbf{r}$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και το εξωτερικό γινόμενο μηδενίζεται.

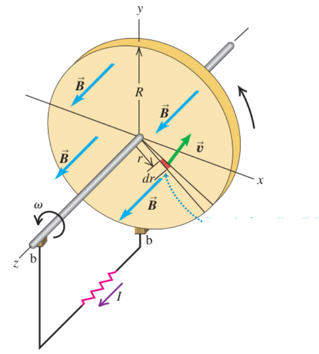
Τόξο BC: $d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}} = dl\sin(90^\circ)\hat{\mathbf{z}} = dl\ \hat{\mathbf{z}} = r_{BC}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}$.

Τόξο DA: $d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}} = dl\sin(90^\circ)(-\hat{\mathbf{z}}) = -dl\ \hat{\mathbf{z}} = -r_{DA}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}$.

Οπότε εφόσον $120^\circ = 2\pi/3$ rad,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi/3}\left[\frac{r_{BC}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}}{r_{BC}^2} - \frac{r_{DA}\ d\theta\ \hat{\mathbf{z}}}{r_{DA}^2}\right] = \left[\frac{\mu_0 I}{6r_{BC}} - \frac{\mu_0 I}{6r_{DA}}\right]\hat{\mathbf{z}} = -4.19\times 10^{-6}\ \hat{\mathbf{z}}\ \text{T}$$

4 Θέμα (4 μον.)



Αγώγιμος δίσκος ακτίνας R που βρίσκεται στο επίπεδο xy περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Ο δίσκος είναι τοποθετημένος σε ομογενές, σταθερό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ παράλληλο στον άξονα z.

1. Να αιτιολογηθεί γιατί αναπτύσσεται ΗΕΔ μεταξύ κέντρου και περιφέρειας του δίσκου και ποια είναι η σχέση που την προσδιορίζει.
2. Να υπολογιστούν η παραπάνω τάση καθώς και το ρεύμα που διαρρέει αντίσταση r συνδεδεμένη όπως φαίνεται στο σχήμα με αιτιολόγηση της αντίστοιχης πολικότητας και φοράς όταν $B = 0.8$ T, $\omega = 3.28$ rpm, $R = 32$ cm και $r = 5\ \Omega$.

Λύση

Εφόσον ο δίσκος περιστρέφεται με κάποια γωνιακή ταχύτητα ω τα διάφορα σημεία του σε ακτίνα r από το κέντρο του έχουν κάποια γραμμική ταχύτητα $v = \omega r$. Αγώγιμο υλικό σημαίνει ελεύθερα φορτία q. Εφόσον βρίσκονται σε μαγνητικό πεδίο και κινούνται, υφίστανται μαγνητική δύναμη $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, που για θετικά φορτία, με τη φορά περιστροφής που φαίνεται στο σχήμα, τα σπρώχνει προς την περιφέρεια και για αρνητικά προς το κέντρο. Άρα αναπτύσσεται ΗΕΔ με αρνητική πολικότητα στο κέντρο και θετική στην περιφέρεια.

Γνωρίζουμε ότι για ευθύγραμμο αγωγό μήκους L που κινείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο B αναπτύσσεται στα άκρα του τάση μέτρου $\mathcal{E} = vBL$. Αν θεωρήσουμε μικρό ευθύγραμμο τμήμα αγωγού dr κατά μήκος μιας ακτίνας R τότε έχουμε

$$d\mathcal{E} = vBdr \Rightarrow \mathcal{E} = \int_0^R vBdr = \int_0^R \omega rBdr = \frac{1}{2}\omega BR^2$$

Στη διάταξη που έχουμε ο δίσκος είναι σαν μια πηγή συνεχούς ρεύματος με $+$ στην περιφέρεια και $-$ στο κέντρο. Επίσης 1 rpm αντιστοιχεί σε $2\pi/60$ rad/s. Οπότε με τους αριθμούς που έχουμε:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\omega_{rpm}\frac{2\pi}{60}BR^2 = 14.07\ \text{mV}$$

και το ρεύμα (όπως φαίνεται στο σχήμα) με το νόμο του Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} = 2.81\ \text{mA}$$