Ηλεκτρομαγνητισμός – Λύσεις

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

15-2-2023

1 Θέμα (4 μον.)

- Υπολογίστε απόκλιση και στροβιλισμό των παρακάτω διανυσματικών πεδίων:

$$\mathbf{A} = \left(4y^2 + \frac{3x^2y}{z^2}\right)\ \hat{\mathbf{x}} + \left(8xy + \frac{x^3}{z^2}\right)\ \hat{\mathbf{y}} + \left(11 - \frac{2x^3y}{z^3}\right)\ \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r^2}\left(\cos\phi\ \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \qquad \mathbf{C} = 25e^{-\rho}\sin\phi\ \hat{\mathbf{z}}$$

- Δώστε τον ορισμό συντηρητικού και σωληνοειδούς πεδίου.
- Ποια από τα παραπάνω πεδία $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ είναι συντηρητικά και ποια σωληνοειδή;

Λύση

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{6xy}{z^2} + 8x + \frac{6x^3y}{z^4}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(-\frac{2x^3}{z^3} + \frac{2x^3}{z^3}\right)\ \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{6x^2y}{z^3} - \frac{6x^2y}{z^3}\right)\ \hat{\mathbf{y}} + \left(8y + \frac{3x^2}{z^2} - 8y - \frac{3x^2}{z^2}\right)\ \hat{\mathbf{z}} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}\right) = \frac{\cos\phi}{r^3\sin^2\theta}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\sin\phi}{r^2}\right) - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{C} = \frac{\partial}{\partial z}(25e^{-\rho}\sin\phi) = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{C} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(25e^{-\rho}\sin\phi)\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} - \frac{\partial}{\partial\rho}(25e^{-\rho}\sin\phi)\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{25e^{-\rho}\cos\phi}{\rho}\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + 25e^{-\rho}\sin\phi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Συντηρητικά ή αστρόβιλα όταν ο στροβιλισμός είναι μηδέν.

Σωληνοειδή όταν η απόκλιση είναι μηδέν.

Άρα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ είναι συντηρητικά και $\mathbf{C}$ είναι σωληνοειδές.

2 Θέμα (3 μον.)

Έστω $\mathbf{B} = \dfrac{50}{\sqrt{\rho}}\sin^2\phi\ \hat{\mathbf{z}}$ Wb/m^2.

Προσδιορίστε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από το επίπεδο $z = 0, 1 < \rho < 2$ m$, 0 < \phi < \pi/4$.

Λύση

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{50}{\sqrt{\rho}}\sin^2\phi\ \hat{\mathbf{z}}\cdot\rho d\phi d\rho\ \hat{\mathbf{z}} = 50\int_{\rho=1}^{2}\sqrt{\rho}d\rho\int_{\phi=0}^{\pi/4}\sin^2\phi d\phi =$$

$$= 50\left[\frac{2}{3}\rho^{3/2}\right]_{\rho=1}^{2}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\frac{1-\cos(2\phi)}{2}d\phi = 50\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) = 8.697 \text{ Wb}$$

3 Θέμα (3 μον.)

Οι γενικές σχέσεις για τη σταθερά μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, εμπέδηση και κυματάριθμο είναι:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right]} \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right]} \qquad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ηλεκτρικό πεδίο στο κενό δίδεται από $\mathbf{E} = 72\cos(10^8 t + \beta x)\ \hat{\mathbf{y}}$ V/m. Να βρεθούν:

- η κατεύθυνση μετάδοσης
- η παράμετρος β και ο χρόνος μετάδοσης για διάστημα $\lambda/2$
- η μέση ισχύς που μεταφέρεται από το κύμα
- η ολική ισχύς που διαπερνά 3 m^2 της επιφάνειας $42x + 18y + 15z = 300$

Δίδονται: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Λύση

Από το πρόσημο του β στη φάση $\omega t + \beta x$ και την μεταβλητή x, η κατεύθυνση μετάδοσης είναι $-\hat{\mathbf{x}}$.

Στο κενό $\sigma = 0$ και έχουμε $\omega = 10^8$ rad/s. Οπότε:

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right]} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 0.3336 \text{ rad/m}$$

Χρόνος μετάδοσης για διάστημα $\lambda/2$:

$$\frac{\lambda}{2} = ct \Rightarrow t = \frac{\lambda}{2c} = \frac{2\pi}{\beta 2c} = \frac{\pi}{\beta c} = 31.4 \text{ ns}$$

Η χαρακτηριστική εμπέδηση του κενού είναι:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73\ \Omega$$

Το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο για σύστημα όπου το ηλεκτρικό πεδίο, μαγνητικό πεδίο και κατεύθυνση μετάδοσης αποτελούν δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\mathbf{H} = -H_0\cos(\omega t + \beta x)\ \hat{\mathbf{z}} = -\frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t + \beta x)\ \hat{\mathbf{z}} = -0.191\cos(\omega t + \beta x)\ \hat{\mathbf{z}} \text{ A/m}$$

Το διάνυσμα Poynting είναι:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -E_0 H_0 \cos^2(\omega t + \beta x)\ \hat{\mathbf{x}} = -\frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\omega t + \beta x)\ \hat{\mathbf{x}}$$

Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}\ dt = -E_0 H_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \beta x)\ dt\ \hat{\mathbf{x}} = -E_0 H_0 \frac{1}{T}\frac{T}{2}\ \hat{\mathbf{x}} = -\frac{E_0 H_0}{2}\ \hat{\mathbf{x}} = -6.88\ \hat{\mathbf{x}} \text{ W/m}^2$$

εφόσον (δοκιμάστε το και θα το δείτε για $\omega = 2\pi/T$)

$$\int_0^T \sin^2(\omega t + \beta x)\ dt = \int_0^T \cos^2(\omega t + \beta x)\ dt = \frac{T}{2}$$

Αν έχουμε μια επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

με φορά από τα κοίλα στα κυρτά. Εφόσον η επιφάνεια είναι επίπεδη

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

Οπότε, για την επιφάνεια $f(x, y, z) = 42x + 18y + 15z = 300$ έχουμε:

$$\hat{\mathbf{a}}_n = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = -\frac{42\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 15\hat{\mathbf{z}}}{48.1}$$

Άρα η ολική ισχύς που διαπερνά 3 m^2 αυτής της επιφάνειας είναι:

$$P = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_m \cdot S\hat{\mathbf{a}}_n = (6.88\ \hat{\mathbf{x}})(3)\left(\frac{42\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 15\hat{\mathbf{z}}}{48.1}\right) = 18.025 \text{ W}$$

και φαίνεται γιατί επιλέξαμε αρνητικό πρόσημο στο $\hat{\mathbf{a}}_n$.