Ηλεκτρομαγνητισμός – Λύσεις

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

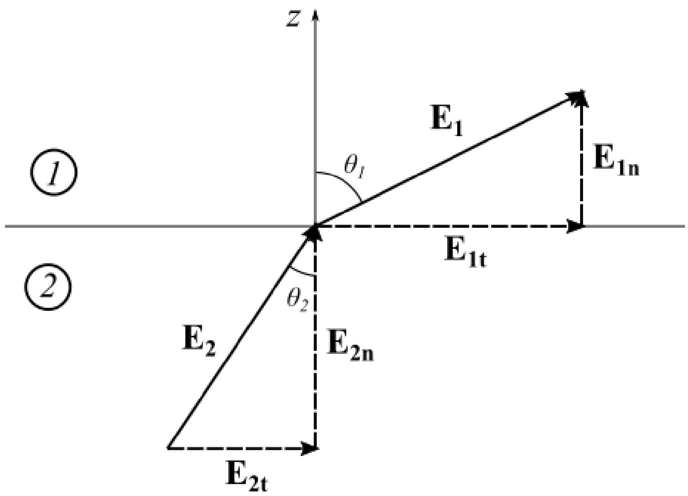
31-8-2022

1 Θέμα (3.5 μον.)

Δυο ομογενή, εκτεταμένα, ισοτροπικά διηλεκτρικά έχουν κοινή επαφή το επίπεδο $z = 0$. Για $z > 0$, $\epsilon_{r1} = 5.4$ και για $z < 0$, $\epsilon_{r2} = 2.8$. Στο χώρο $z \geq 0$ έχουμε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_1 = (3, -1, 2)$ kV/m. Υπολογίστε:

- $\mathbf{E}_2$ για $z \leq 0$.
- Τις γωνίες θ_1, θ_2 που σχηματίζουν τα $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ με την κάθετο στην διεπαφή.
- Την πυκνότητα ενέργειας σε J/m^3 στα δυο διηλεκτρικά.
- Την ενέργεια σε κύβο ακμής 5 m με κέντρο στο $(1, 2, 10)$.

Δίδεται: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m



Λύση

Οι κάθετες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\mathbf{E}_{1n} = (\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}})\ \hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 2)\ \text{kV/m} \qquad \mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}})\ \hat{\mathbf{z}}$$

Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι σύνθεση κάθετης και παράλληλης συνιστώσας, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t$ οπότε για τις παράλληλες συνιστώσες έχουμε:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = (3, -1, 0)\ \text{kV/m} \qquad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = (3, -1, 0)\ \text{kV/m}$$

Η τελευταία ισότητα προέρχεται από την συνέχεια των παραλλήλων συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου. Από την ασυνέχεια των καθέτων συνιστωσών μπορούμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \Rightarrow \mathbf{E}_{2n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \mathbf{E}_{1n} = (0, 0, 3.857)\ \text{kV/m}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} = (3, -1, 3.857)\ \text{kV/m}$$

Από το σχήμα, οι γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ με την κάθετο στην διεπαφή:

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = 1.581 \Rightarrow \theta_1 = 57.7^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = 0.820 \Rightarrow \theta_2 = 39.4^\circ$$

Οι πυκνότητες ενέργειας είναι:

$$w_{E1} = \frac{1}{2}\epsilon_1|\mathbf{E}_1|^2 = 3.347 \times 10^{-4}\ \mathrm{J/m^3}$$

$$w_{E2} = \frac{1}{2}\epsilon_2|\mathbf{E}_2|^2 = 3.084 \times 10^{-4}\ \mathrm{J/m^3}$$

Ο κύβος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή 1. Οπότε:

$$W_E = w_{E1} \times 5^3 = 41.8 \times 10^{-3}\ \mathrm{J} = 41.8\ \mathrm{mJ}$$

2 Θέμα (3 μον.)

- Να προσδιοριστεί η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A} = 2r\cos\theta\cos\phi\ \hat{\mathbf{r}} + \sqrt{r}\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο σημείο $(1, \pi/6, \pi/3)$.
- Να προσδιοριστεί ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A} = \rho^2 z\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + \rho^3\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + 3\rho z^2\ \hat{\mathbf{z}}$ και να υπολογιστεί η τιμή του στο σημείο $(10, \pi/8, 3)$

Λύση

Το

$$\mathbf{A} = 2r\cos\theta\cos\phi\ \hat{\mathbf{r}} + \sqrt{r}\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

είναι διανυσματικό πεδίο σε σφαιρικές συντεταγμένες. Έχουμε:

- $A_r = 2r\cos\theta\cos\phi$
- $A_\theta = 0$
- $A_\phi = \sqrt{r}$

Από το τυπολόγιο:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 6\cos\theta\cos\phi$$

και στο σημείο $(1, \pi/6, \pi/3)$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2.5981$.

Το

$$\mathbf{A} = \rho^2 z\ \hat{\boldsymbol{\varrho}} + \rho^3\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} + 3\rho z^2\ \hat{\mathbf{z}}$$

είναι διανυσματικό πεδίο σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Έχουμε:

- $A_\rho = \rho^2 z$
- $A_\phi = \rho^3$
- $A_z = 3\rho z^2$

Από το τυπολόγιο:

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\rho^2 - 3z^2)\ \hat{\varphi} + 4\rho^2\ \hat{\mathbf{z}}$$

και στο σημείο $(10, \pi/8, 3)$, $\nabla \times \mathbf{A} = (0, 73, 400)$.

3 Θέμα (3.5 μον.)

Οι γενικές σχέσεις για τη σταθερά μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, εμπέδηση και κυματάριθμο είναι:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]} \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]} \qquad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Σε μη μαγνητικό μέσο έχουμε:

$$\mathbf{H} = 1.8\cos(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{y}}\ \mathrm{A/m}$$

όπου $f = 85$ MHz και $\epsilon = 2.5\epsilon_0$. Να βρεθούν:

1. η περίοδος T του κύματος,

2. το μήκος κύματος λ,
3. το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$,
4. το μοναδιαίο διάνυσμα της κατεύθυνσης μετάδοσης του κύματος
5. η μέση ισχύς που μεταφέρεται από το κύμα,
6. η ολική ισχύς που διαπερνά 420 cm^2 της επιφάνειας $20x + 8y + 12z = 385$.

Δίδονται: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Λύση

$$T = \frac{1}{f} = 1.176 \times 10^{-8} \text{ s} = 11.8 \text{ ns}$$

Από το $\mathbf{H}$ φαίνεται ότι $\alpha = 0$ που σημαίνει $\sigma = 0$. Οπότε $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Εφόσον το μέσο είναι μη μαγνητικό, $\mu = \mu_0$ και έχουμε:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{2.5\mu_0\epsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{2.5\mu_0\epsilon_0}} = 2.23 \text{ m}$$

Η εμπέδηση είναι $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon} = 238.3\ \Omega$. Έχουμε επίσης:

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} \Rightarrow E_0 = \eta H_0 = 428.9 \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{x}} = 428.9 \cos(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{x}} \text{ V/m}$$

Η κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος σε δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}$ η κατεύθυνση του $\mathbf{E}$ και $\hat{\mathbf{y}}$ η κατεύθυνση του $\mathbf{H}$.

Το διάνυσμα Poynting είναι:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \beta z)\ \hat{\mathbf{z}}$$

Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}\ dt = E_0 H_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \beta z)\ dt\ \hat{\mathbf{z}} = E_0 H_0 \frac{1}{T}\frac{T}{2}\ \hat{\mathbf{z}} = \frac{E_0 H_0}{2}\ \hat{\mathbf{z}} = 386.0\ \hat{\mathbf{z}} \text{ W/m}^2$$

εφόσον (δοκιμάστε το και θα το δείτε για $\omega = 2\pi/T$)

$$\int_0^T \sin^2(\omega t - \beta z)\ dt = \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta z)\ dt = \frac{T}{2}$$

Αν έχουμε μια επιφάνεια $f(x, y, z) = 0$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

οπότε, για την επιφάνεια $f(x, y, z) = 20x + 8y + 12z = 385$ έχουμε:

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{20\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} + 12\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{608}}$$

Άρα η ολική ισχύς που διαπερνά 420 cm^2 αυτής της επιφάνειας είναι:

$$P = \int_S \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_m \cdot S\hat{\mathbf{a}}_n = (386\ \hat{\mathbf{z}})(420 \times 10^{-4}) \left(\frac{20\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} + 12\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{608}}\right) = 7.89 \text{ W}$$