Ηλεκτρομαγνητισμός - Λύσεις

Διδάσκων: Δροσόπουλος Αναστάσιος

2022-02-16

1 Θέμα (3 μον.)

Σε μονοδιάστατο στοιχείο η πυκνότητα φορτίου δίνεται από $\rho = \rho_0 \exp(-ax)$. Εάν $\mathbf{E} = 0$ στο $x = 0$ και $V = 0$ στο $x = 0$, υπολογίστε $V(x)$ και $\mathbf{E}(x)$.

Λύση

Από εξίσωση Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ έχουμε:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\, e^{-\alpha x} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\, e^{-\alpha x} + K_1 \Rightarrow V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2\, e^{-\alpha x} + K_1 x + K_2 \Rightarrow$$

$$V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2}\, e^{-\alpha x} + K_1 x + K_2$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha}\, e^{-\alpha x} + K_1\right]\hat{\mathbf{x}}$$

Από $\mathbf{E}(0) = 0$ έχουμε:

$$K_1 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha}$$

Από $V(0) = 0$ έχουμε:

$$K_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2}$$

Οπότε:

$$V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2}\, e^{-\alpha x} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha}\, x + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2}\left[e^{-\alpha x} + \alpha x - 1\right]$$

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha}\left[e^{-\alpha x} - 1\right]\hat{\mathbf{x}}$$

2 Θέμα (3 μον.)

Έστω τα διανυσματικά πεδία:

$$\mathbf{A} = \frac{5\sin\theta}{r^4}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \mathbf{B} = r^3 \sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + 3r\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Να υπολογιστούν $\nabla \times \mathbf{A}$ και $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

Λύση

Από το τυπολόγιο για σφαιρικές συντεταγμένες για $\mathbf{A} = A_\phi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ και $\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\phi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(A_\phi \sin\theta\Big)\right]\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rA_\phi\Big)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{10\cos\theta}{r^5}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{15\sin\theta}{r^5}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 B_r\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} = 5r^2\sin\phi$$

3 Θέμα (4 μον.)

Οι γενικές σχέσεις για τη σταθερά μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, εμπέδηση και κυματάριθμο είναι:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right]} \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right]} \qquad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Σε μη μαγνητικό μέσο έχουμε:

$$\mathbf{H} = 2.5\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{y}}\ \mathrm{A/m}$$

όπου $f = 50$ MHz και $\epsilon = 8\epsilon_0$. Να βρεθούν:

1. η περίοδος T του κύματος,
2. το μήκος κύματος λ,
3. το ηλεκτρικό πεδίο **E**,
4. τη μέση ισχύ που μεταφέρεται από το κύμα,
5. την ολική ισχύ που διαπερνά 245 cm^2 της επιφάνειας $18x + 7y + 9z = 150$.

Δίδονται: $\epsilon_0 = 8.854\times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ H/m, $c = 3\times 10^8$ m/s.

Λύση

$$T = \frac{1}{f} = 2\times 10^{-8}\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{ns}$$

Από το **H** φαίνεται ότι $\alpha = 0$ που σημαίνει $\sigma = 0$. Οπότε $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Εφόσον το μέσο είναι μη μαγνητικό, $\mu = \mu_0$ και έχουμε:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{8\mu_0\epsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{8\mu_0\epsilon_0}} = 2.12\ \mathrm{m}$$

Η εμπέδηση είναι $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon} = 133.2\ \Omega$. Έχουμε επίσης:

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} \Rightarrow E_0 = \eta H_0 = 333\ \mathrm{V/m}$$

$$\mathbf{E} = E_0\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}} = 333\sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}\ \mathrm{V/m}$$

Το διάνυσμα Poynting είναι:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}\,dt = E_0H_0\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - \beta z)\,dt\,\hat{\mathbf{z}} = E_0H_0\frac{1}{T}\frac{T}{2}\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{E_0H_0}{2}\,\hat{\mathbf{z}} = 416.24\,\hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{W/m^2}$$

εφόσον (δοκιμάστε το και θα το δείτε για $\omega = 2\pi/T$)

$$\int_0^T \sin^2(\omega t - \beta z)\,dt = \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta z)\,dt = \frac{T}{2}$$

Αν έχουμε μια επιφάνεια $f(x,y,z) = 0$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

οπότε, για την επιφάνεια $f(x,y,z) = 18x + 7y + 9z = 150$ έχουμε:

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{18\hat{\mathbf{x}} + 7\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{454}}$$

Άρα η ολική ισχύς που διαπερνά 245 cm^2 αυτής της επιφάνειας είναι:

$$P = \int_S \mathbf{P}_m\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_m\cdot S\hat{\mathbf{a}}_n = (416.24\,\hat{\mathbf{z}})(245\times 10^{-4})\left(\frac{18\hat{\mathbf{x}} + 7\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{454}}\right) = 4.31\ \mathrm{W}$$