

Άσκηση 1:

(I) Από το διαφομετικό νόμο της δυναμικής:

$$m \frac{dv}{dt} = -a_0 \cdot v \Leftrightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{a_0}{m} dt \Rightarrow$$

$$\ln v \Big|_{v_0}^v = -\frac{a_0}{m} t \Leftrightarrow \ln v - \ln v_0 = -\frac{a_0}{m} t \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{a_0}{m} t \Leftrightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{a_0 t}{m}} \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{a_0 t}{m}} \quad (1)$$

(II) Την χρονική στιγμή t_1 την οποία η ταχύτητα μειώνεται κατά 90% γίνεται

$$v_1 = v_0 - \frac{90}{100} v_0 = 0.1 v_0 \quad \text{οπότε από}$$

$$\text{την (1)} \Rightarrow 0.1 \cdot v_0 = v_0 e^{-\frac{a_0 t_1}{m}} \Rightarrow 0.1 = e^{-\frac{a_0 t_1}{m}} \Leftrightarrow$$

$$\ln 10^{-1} = -\frac{a_0 \cdot t_1}{m} \Rightarrow t_1 = \frac{m \cdot \ln 10}{a_0}$$

(III) Επειδή $v = \frac{dx}{dt}$ ή $x=0$ για $t=0$

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-\frac{a_0 t}{m}} dt =$$

$$= -U_0 \frac{m}{a_0} \left[e^{-\frac{a_0 t}{m}} \right]_0^t =$$

$$= -U_0 \frac{m}{a_0} \left[e^{-\frac{a_0 t}{m}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{m U_0}{a_0} \left(1 - e^{-\frac{a_0 t}{m}} \right)$$

(IV) Η απόσταση που διαώει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει θα είναι:

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{m U_0}{a} (1 - e^{-\frac{a_0 t}{m}}) \right]$$

$$= \frac{m \cdot U_0}{a_0}$$

$$(V) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = a \cdot \frac{1}{v} \quad \text{αλλά}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-a_0 v}{m} \quad \text{ή ζεταίκε}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{-a_0 v}{m}}{v} = \frac{-a_0}{m}$$

Επειδή για $t=0$ $U=U_0$ θα έχουμε

$$dU = -\frac{a_0}{m} dx \Rightarrow$$

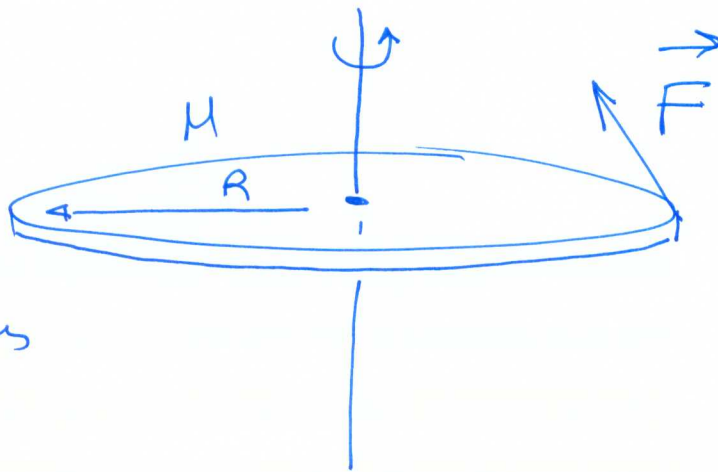
$$\int_{U_0}^{U(t)} dU = -\frac{a_0}{m} \int_0^{x(t)} dx \Rightarrow$$

$$U(t) - U_0 = -\frac{a_0}{m} x(t) \Rightarrow$$

$$U(t) = U_0 - \frac{a_0}{m} x(t)$$

Άσκηση 2

Η ροπή ως προς τον άξονα
 $\vec{F}$ θα είναι



$$\tau = I \alpha_y \Rightarrow F \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \alpha_y \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{2} M \cdot R \cdot \alpha_y \Rightarrow \alpha_y = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 0.5}$$

$$= 4 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Επειδή η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή

$$\omega = \omega_0 + \alpha_y \cdot t = 0 + \alpha_y t = 4t \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(α)
$$v = \omega \cdot R = 4 \cdot t \cdot 0.5 = 2t \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Σε χρόνο t ο δίσκος διαγράφει γωνία:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_y t^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot t^2 = 2t^2 \text{ rad}$$

οπότε ο αριθμός των πλήρων περιστροφών που κάνει στο χρονικό αυτό διάστημα είναι ο μεγαλύτερος αέρας να είναι μικρότερος από:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{2t^2}{2\pi} = \frac{t^2}{\pi}$$

Άσκηση 3 :

Το έργο ως συνάρτηση

$\vec{F}$ για μία μετατόμιση AB

θα υπολογιστεί ως:

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -a \cdot \sin\theta \vec{i} + a \cos\theta \vec{j} + \beta \vec{k} \Rightarrow$$

$$d\vec{r} = (-a \sin\theta \vec{i} + a \cos\theta \vec{j} + \beta \vec{k}) d\theta$$

$$\text{Από (1)} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = (-a \cdot \sin\theta F_1 + a \cdot \cos\theta F_2 + \beta \cdot F_3) d\theta$$

Το σημείο A από το οποίο έχουμε $\vec{r}(\theta)$ φαίνεται ότι αντιστοιχεί στη γωνία $\theta=0$ ενώ το

B στην γωνία $\theta = \frac{5\pi}{2}$ άρα

$$W = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} (-a \sin\theta F_1 + a \cos\theta F_2 + \beta F_3) d\theta =$$
$$= -a F_1 (-\cos\theta) \Big|_0^{\frac{5\pi}{2}} + a F_2 \sin\theta \Big|_0^{\frac{5\pi}{2}} + \beta F_3 \left(\frac{5\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= -\alpha F_1 \left(-\cos \frac{5\pi}{2} + 1 \right) + \alpha F_2 \left(\sin \frac{5\pi}{2} - 0 \right) + \\ + \beta F_3 \frac{5\pi}{2} =$$

$$= -\alpha F_1 + \alpha F_2 + \beta \frac{F_3 5\pi}{2} =$$

$$= \alpha (F_2 - F_1) + \frac{5\pi\beta}{2} F_3$$