



ΘΕΜΑ 1ο (2 + 2 = 4 μονάδες)

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ο μη προσημασμένος αριθμός Χ σε δεκαδική παράσταση με 3 ψηφία και ο μη προσημασμένος αριθμός Υ σε οκταδική παράσταση με 4 ψηφία.

Αριθμοί	Δεκαδική παράσταση με 3 ψηφία	Δυαδική παράσταση με 10 ψηφία	Οκταδική παράσταση με 4 ψηφία
Χ	703		
Υ			1234

- α) Να διενεργήσετε και να δείξετε αναλυτικά τις απαραίτητες μετατροπές, ώστε να συμπληρωθούν τα 4 κενά κελιά του παραπάνω πίνακα.
- β) Να εκτελέσετε κάθετα στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα τις πράξεις $X + Y$ και $X - Y$ και να μετατρέψετε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης στο δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα. Για την αφαίρεση να χρησιμοποιήσετε υποχρεωτικά το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου.

Οι μετατροπές αριθμών που δεν παρουσιάζονται αναλυτικά, δεν γίνονται δεκτές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Η μετατροπή ενός αριθμού από το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα στο δυαδικό γίνεται με επαναλαμβανόμενη διαίρεση του δεκαδικού αριθμού με τη βάση 2 του δυαδικού συστήματος, μέχρι το πηλίκο της διαίρεσης να γίνει 0. Τα δυαδικά ψηφία λαμβάνονται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων. Το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης αντιστοιχεί στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο και το υπόλοιπο της τελευταίας διαίρεσης αντιστοιχεί στο περισσότερο σημαντικό ψηφίο.

Μετατρέπουμε το δεκαδικό αριθμό $X = 703$ σε δυαδικό:

$$703 / 2 = 351 + \text{υπόλοιπο } 1 \text{ (LSB)}$$

$$351 / 2 = 175 + \text{υπόλοιπο } 1$$

$$175 / 2 = 87 + \text{υπόλοιπο } 1$$

$$87 / 2 = 43 + \text{υπόλοιπο } 1$$

$$43 / 2 = 21 + \text{υπόλοιπο } 1$$

$$21 / 2 = 10 + \text{υπόλοιπο } 1$$

$$10 / 2 = 5 + \text{υπόλοιπο } 0$$

$$5 / 2 = 2 + \text{υπόλοιπο } 1$$

$$2 / 2 = 1 + \text{υπόλοιπο } 0$$

$$1 / 2 = 0 + \text{υπόλοιπο } 1 \text{ (MSB)}$$

Επομένως: $X = 703_{10} = 101011111_2$ (με 10 δυαδικά ψηφία).

Για τη μετατροπή του δυαδικού αριθμού 101011111 σε οκταδικό, τον χωρίζουμε σε τριάδες ψηφίων, αφού 3 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο. Θα πρέπει να συμπληρώσουμε 2 μηδενικά στα αριστερά του αριθμού (χωρίς να αλλοιώνεται η τιμή του), ώστε να συμπληρωθεί η περισσότερη σημαντική τριάδα, που αντιστοιχεί στο περισσότερο σημαντικό οκταδικό ψηφίο:

$$001_2 = 1_8$$

$$010_2 = 2_8$$

$$111_2 = 7_8$$

$$111_2 = 7_8$$

Επομένως: $X = 703_{10} = 101011111_2 = 1277_8$.

Για τη μετατροπή του οκταδικού αριθμού $Y = 1234$ στο δυαδικό σύστημα, εκφράζουμε κάθε ψηφίο του αριθ-



μού σε δυαδική μορφή, λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα οκταδικό ψηφίο αντιστοιχεί σε 3 δυαδικά ψηφία:

$$1_8 = 001_2$$

$$2_8 = 010_2$$

$$3_8 = 011_2$$

$$4_8 = 100_2$$

Επομένως: $Y = 1234_8 = 1010011100_2$ (με 10 δυαδικά ψηφία).

Για να μετατρέψουμε τον οκταδικό αριθμό 1234 σε δεκαδικό, χρησιμοποιούμε τη σχέση: $A_B = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 = \alpha_{n-1} \times B^{n-1} + \alpha_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + \alpha_1 \times B^1 + \alpha_0 \times B^0$, όπου B είναι η βάση του αριθμητικού συστήματος και α_i είναι οι συντελεστές του αριθμού. Η δεκαδική παράσταση του αριθμού 1234_8 υπολογίζεται ως εξής:

$$1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 512 + 128 + 24 + 4 = 668_{10}.$$

Επομένως: $Y = 1234_8 = 1010011100_2 = 668_{10}$.

Με βάση τα παραπάνω, συμπληρώνουμε τα κενά κελιά του πίνακα που δίνεται στην εκφώνηση:

Αριθμοί	Δεκαδική παράσταση με 3 ψηφία	Δυαδική παράσταση με 10 ψηφία	Οκταδική παράσταση με 4 ψηφία
X	703	101011111	1277
Y	668	1010011100	1234

β) Η πρόσθεση των δύο δυαδικών αριθμών X και Y, εκτελείται ως εξής:

$$\begin{array}{r} \text{Κρατούμενα:} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad : X \\ + \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad : Y \\ \hline 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad : X + Y \end{array}$$

Επομένως: $X + Y = 10101011011_2$.

Για τη μετατροπή του δυαδικού αριθμού $X + Y = 10101011011$ σε δεκαεξαδικό, τον χωρίζουμε σε τετράδες ψηφίων, αφού 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο. Θα πρέπει να συμπληρώσουμε 1 μηδενικό στα αριστερά του αριθμού (χωρίς να αλλοιώνεται η τιμή του), ώστε να συμπληρωθεί η περισσότερο σημαντική τετράδα, που αντιστοιχεί στο περισσότερο σημαντικό δεκαεξαδικό ψηφίο:

$$0101_2 = 5_{16}$$

$$0101_2 = 5_{16}$$

$$1011_2 = B_{16}$$

Επομένως: $X + Y = 10101011011_2 = (55B)_{16}$.

Για την αφαίρεση δύο μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου και το προσθέτουμε στον μειωτέο.

Το συμπλήρωμα ως προς 1 του αριθμού $Y = 1010011100$ είναι 0101100011 και προσθέτοντας σε αυτό μία μονάδα λαμβάνουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού Y, που είναι: $0101100011 + 1 = 0101100100$.

$$\begin{array}{r} \text{Κρατούμενα:} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad : X \\ + \quad \quad \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad : \bar{\Sigma}_2(Y) \\ \hline \quad \quad \quad \cancel{1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad : X - Y \end{array}$$

Λόγω του ότι $X > Y$, το τελικό κρατούμενο της πράξης παραλείπεται και προκύπτει ότι: $X - Y = 0000100011_2$.

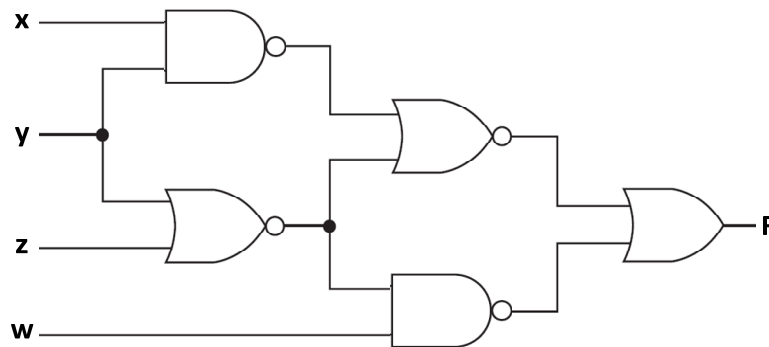
Για να μετατρέψουμε την διαφορά $X - Y$ σε δεκαδικό αριθμό, χρησιμοποιούμε τη σχέση: $A_B = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \dots \alpha_1 \alpha_0 = \alpha_{n-1} \times B^{n-1} + \alpha_{n-2} \times B^{n-2} + \dots + \alpha_1 \times B^1 + \alpha_0 \times B^0$, όπου B είναι η βάση του αριθμητικού συστήματος και α_i είναι οι

συντελεστές του αριθμού. Έτσι, προκύπτει ότι: $X - Y = 100011_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 2 + 1 = 35_{10}$.

Μπορούμε επίσης να επαληθεύσουμε την ορθότητα της εκτέλεσης της παραπάνω αφαίρεσης στο δεκαδικό σύστημα, αφού προκύπτει ότι: $X - Y = 703_{10} - 668_{10} = 35_{10}$.

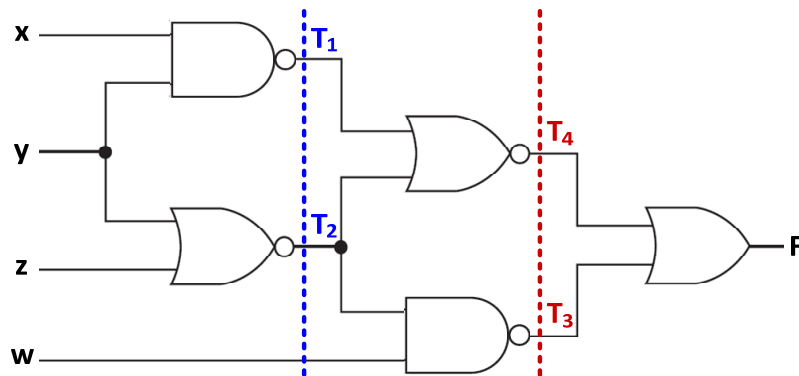
ΘΕΜΑ 2ο (2 μονάδες)

Χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole, να εξαχθεί την λογική συνάρτηση $F(x,y,z,w)$ της εξόδου του κυκλώματος του παρακάτω σχήματος, στην απλούστερη δυνατή μορφή.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όπως παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί, αφού ονομάσουμε τις εσωτερικές συνδέσεις του κυκλώματος, παρατηρούμε τη δομή του και το διαιρούμε σε επίπεδα πυλών. Το πρώτο επίπεδο περιλαμβάνει τις πύλες που λαμβάνουν ως εισόδους τις εισόδους (x, y, z, w) του κυκλώματος και το δεύτερο επίπεδο περιλαμβάνει τις πύλες που τροφοδοτούνται τουλάχιστον από μία έξοδο πύλης του πρώτου επιπέδου. Το τρίτο επίπεδο περιλαμβάνει την πύλη στην έξοδο της οποίας λαμβάνουμε την έξοδο του κυκλώματος.



Εξάγουμε τις λογικές συναρτήσεις των εξόδων των πυλών του πρώτου επιπέδου: $T_1 = (xy)'$ και $T_2 = (y + z)'$.

Στη συνέχεια, εξάγουμε τις λογικές συναρτήσεις των πυλών του δεύτερου επιπέδου και εφαρμόζουμε σε αυτές τα κατάλληλα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole:

$$T_3 = (T_2w)' = [(y + z)'w]' = [y'z'w]' = y + z + w'$$

$$T_4 = (T_1 + T_2)' = [(xy)' + (y + z)']' = xy(y + z) = xy + xyz = xy + xyz = xy(1 + z) = xy.$$

Η απλοποιημένη λογική συνάρτηση της εξόδου του κυκλώματος σε μορφή αθροίσματος γινομένων έχει ως εξής:

$$F = T_3 + T_4 = y + z + w' + xy = xy + y + z + w' = y + z + w'.$$

ΘΕΜΑ 3ο (1 + 1,5 = 2,5 μονάδες)

Η είσοδος ενός συνδυαστικού κυκλώματος είναι τετραψήφιος μη προσημασμένος δυαδικός αριθμός $xyzw$. Η έξο-



δος F του κυκλώματος λαμβάνει λογική τιμή 1 όταν ο αριθμός εισόδου δεν διαιρείται ακριβώς με το 4, διαφορετικά λαμβάνει τιμή 0.

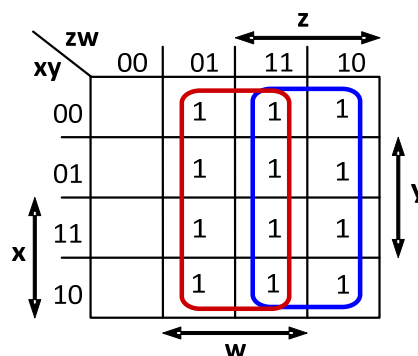
- α) Να καταστρώσετε τον πίνακα αληθείας της λογικής συνάρτησης $F(x,y,z,w)$ της εξόδου του κυκλώματος.
β) Χρησιμοποιώντας χάρτη (πίνακα) Karnaugh, να ελαχιστοποιήσετε τη λογική συνάρτηση $F(x,y,z,w)$ της εξόδου του κυκλώματος και την υλοποιήσετε μόνο με δύο λογικές πύλες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι αντίστοιχοι δεκαδικοί αριθμοί των τετραψήφιων δυαδικών αριθμών εισόδου κυμαίνονται από 0 έως 15, οι αριθμοί που δεν διαιρούνται ακριβώς με το 4 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 και ο πίνακας αλήθειας της λογικής συνάρτησης της εξόδου F του κυκλώματος, έχει ως εξής:

Αντίστοιχος δεκαδικός αριθμός	x	y	z	w	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

- β) Από τον παραπάνω πίνακα αληθείας προκύπτει η κανονική μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων της συνάρτησης $\Sigma(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$ και ο χάρτης (πίνακας) Karnaugh που περιγράφει τη συνάρτηση έχει ως εξής:



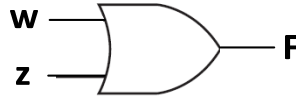
Ομαδοποιώντας στον χάρτη Karnaugh 2 οκτάδες και 1 τετράδα τετραγώνων που περιέχουν μονάδες, καταλήγουμε στην ελαχιστοποιημένη μορφή αθροίσματος γινομένων της συνάρτησης $F(x,y,z,w) = z + w$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan, στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης, λαμβάνουμε:

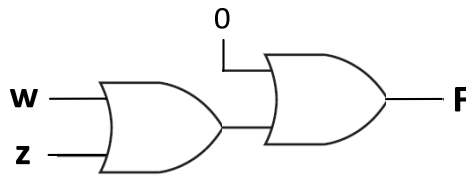


$$F(x,y,z,w) = z + w.$$

Η τελευταία μορφή της συνάρτησης, υλοποιείται μόνο με μία πύλη OR δύο εισόδων, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Στην περίπτωση όπου από την διατύπωση της εκφώνησης του ερωτήματος, οδηγηθεί κάποιος στο συμπέρασμα ότι είναι υποχρεωτική η χρήση δύο πυλών, τότε η συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί όπως παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί (με την δεύτερη πύλη να είναι προφανώς περιττή).



ΘΕΜΑ 4ο (1,5 μονάδες)

Να υλοποιήσετε τη λογική συνάρτηση $F(x,y,z) = xyz + x'z'$, χρησιμοποιώντας **έναν αποκωδικοποιητή και μία λογική πύλη**.

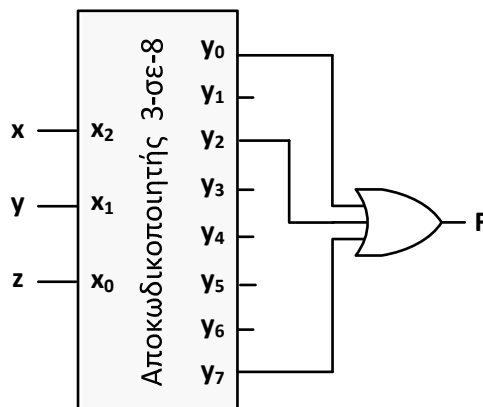
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ένας αποκωδικοποιητής N-σε- 2^N αποτελεί γεννήτρια ελαχιστόρων και συνδυάζοντάς τον με μία λογική πύλη OR, η οποία παράγει το λογικό άθροισμα κατάλληλων εξόδων του, μπορούμε να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων. Για να γίνει αυτό, πρέπει το πλήθος των εισόδων του αποκωδικοποιητή να ισούται με το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης και το πλήθος των εισόδων της πύλης OR να ισούται με το πλήθος των ελαχιστόρων που συμμετέχουν στη συνάρτηση.

Έτσι, για να υλοποιήσουμε τη συνάρτηση $F(x,y,z) = xyz + x'z'$, χρειαζόμαστε έναν αποκωδικοποιητή 3-σε-8 (δηλαδή, με 3 εισόδους και 8 εξόδους). Μετατρέπουμε τη συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων:

$$F(x,y,z) = xyz + x'z'(y + y') = xyz + x'yz' + x'z'y' = \Sigma(7, 2, 0) = \Sigma(0, 2, 7).$$

Προκύπτει έτσι ότι για την υλοποίηση της συνάρτησης $F(x,y,z)$, εκτός από τον αποκωδικοποιητή 3-σε-8, χρειάζεται μία πύλη OR με 3 εισόδους. Η ζητούμενη υλοποίηση έχει ως εξής:



=====