ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Ι

Λύσεις θεμάτων εξεταστικής περιόδου Ιουνίου - Ιουλίου 2015

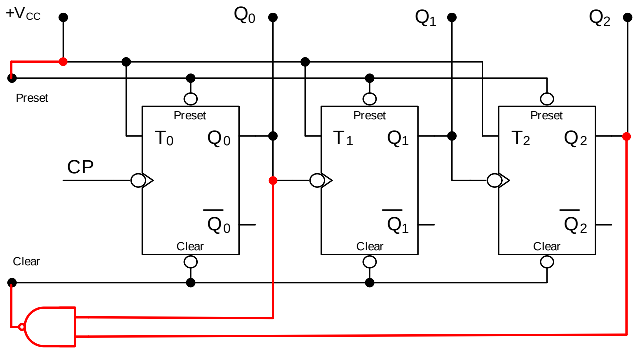
ΘΕΜΑ 1^{ο} *(2,0 μονάδες)*

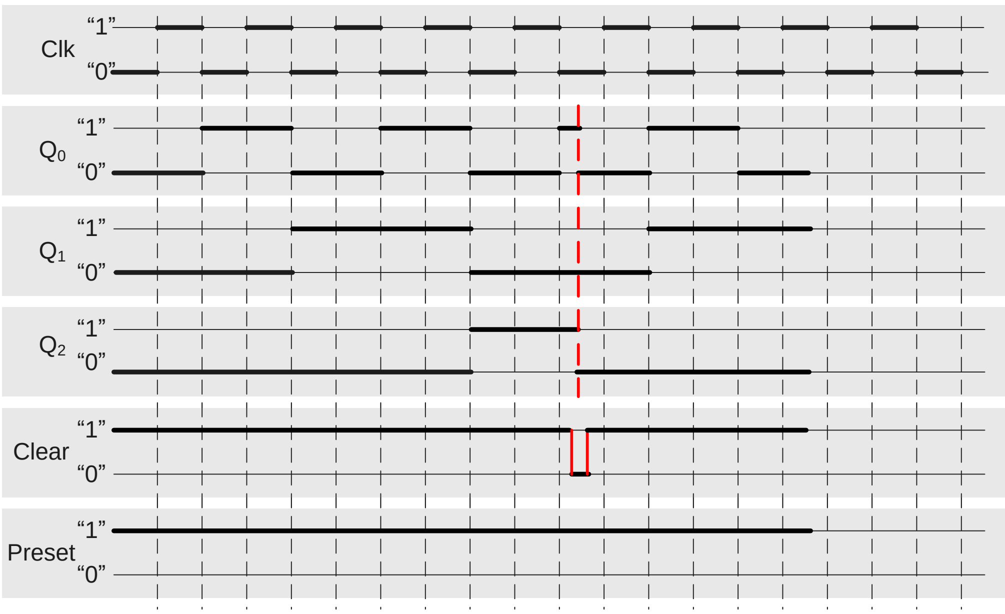
Δίνεται το ασύγχρονο κύκλωμα του σχήματος.

Εάν η αρχική κατάσταση είναι $Q_2Q_1Q_0$ = 000, να δείξετε πώς το κύκλωμα αυτό μπορεί να μετατραπεί σε μετρητή MOD(5) και να συμπληρώσετε το αντίστοιχο διάγραμμα χρονισμού.

Λύση

Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζονται στο λογικό κύκλωμα τα στοιχεία (πύλες) που απαιτούνται και οι απαραίτητες συνδέσεις (καλωδιώσεις) για να λειτουργήσει το κύκλωμα ως ασύγχρονος μετρητής MOD(5).





ΘΕΜΑ 2^{ο} *(4,0 μονάδες)*

1. Να σχεδιάσετε με αθροιστές και λογικές πύλες ένα λογικό κύκλωμα που παράγει στην έξοδό του σε δυαδική μορφή το αριθμητικό γινόμενο δύο δυαδικών αριθμών A = $A_2A_1A_0$ και B = B_1B_0. *(3,0 μον.)*
2. Να προσδιορίσετε το μέγεθος μιας προγραμματιζόμενης ROM (αριθμό λέξεων, αριθμό bits ανά λέξη, μέγεθος σε bytes) που μπορεί να υλοποιήσει το προαναφερόμενο αριθμητικό γινόμενο. *(1,0 μον.)*

Λύση

1. Ο πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών εκτελείται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που εκτελείται και ο πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών. Τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου πολλαπλασιάζονται με κάθε ψηφίο του πολλαπλασιαστή ξεκινώντας από το ελάχιστα σημαντικό ψηφίο του πολλαπλασιαστή. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται τα μερικά γινόμενα, δηλαδή τα αριθμητικά γινόμενα μεταξύ δύο ψηφίων, ενός από τον πολλαπλασιαστέο και ενός από τον πολλαπλασιαστή κάθε φορά. Στην περίπτωσή μας, τα μερικά γινόμενα που σχηματίζονται είναι $A_0 \times B_0$, $A_0 \times B_1$, $A_1 \times B_0$, $A_1 \times B_1$, $A_2 \times B_0$ και $A_2 \times B_1$, τα οποία διατάσσονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σύμφωνα με τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού (το

αριθμητικό γινόμενο), $P_4P_3P_2P_1P_0$, προκύπτει από το αριθμητικό άθροισμα των μερικών γινομένων, λαμβάνοντας υπόψη και τυχόν κρατούμενα που δημιουργούνται. Επομένως,

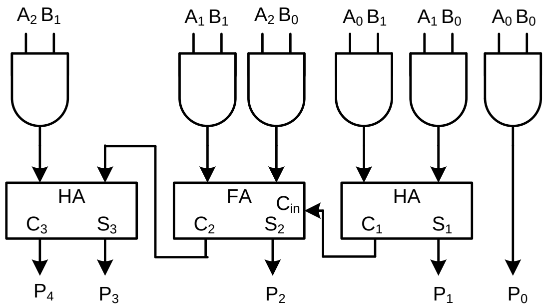
- το P_0 είναι ίσο με το μερικό γινόμενο $A_0 \times B_0$,
- το P_1 προκύπτει ως το άθροισμα των μερικών γινομένων $A_1 \times B_0$ και $A_0 \times B_1$,
- το P_2 είναι ίσο με το άθροισμα των μερικών γινομένων $A_2 \times B_0$ και $A_1 \times B_1$, καθώς και του κρατούμενου που προκύπτει από το άθροισμα των $A_1 \times B_0$ και $A_0 \times B_1$,
- το P_3 προκύπτει ως το άθροισμα του μερικού γινομένου $A_2 \times B_1$ με το κρατούμενο που προκύπτει από την αμέσως προηγούμενη άθροιση, και, τέλος,
- το P_4 είναι ίσο με το κρατούμενο που προκύπτει από την αμέσως προηγούμενη άθροιση.

Ο πολλαπλασιασμός (αριθμητικό γινόμενο) δύο δυαδικών ψηφίων A_i και B_j δίνει 1 μόνο όταν και τα δύο ψηφία είναι 1, αλλιώς δίνει 0. Το αποτέλεσμα αυτό, όμως, είναι το ίδιο με εκείνο που δίνει η λογική πράξη AND μεταξύ δύο δυαδικών ψηφίων:

A_i	B_j	$A_i \times B_j$	A_iB_j
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Επομένως, χρειαζόμαστε έξι πύλες AND δύο εισόδων για να σχηματίσουμε τα μερικά γινόμενα και συγκεκριμένα: $A_0 \times B_0 = A_0B_0$, $A_0 \times B_1 = A_0B_1$, $A_1 \times B_0 = A_1B_0$, $A_1 \times B_1 = A_1B_1$, $A_2 \times B_0 = A_2B_0$ και $A_2 \times B_1 = A_2B_1$ αντίστοιχα.

		A_2	A_1	A_0
	x		B_1	B_0
		$A_2 \times B_0$	$A_1 \times B_0$	$A_0 \times B_0$
	$A_2 \times B_1$	$A_1 \times B_1$	$A_0 \times B_1$	
C_3	C_2	C_1		
	S_3	S_2	S_1	
	C_3	C_2	C_1	
$\mathbf{P_4} = C_3$	$\mathbf{P_3} = S_3$	$\mathbf{P_2} = S_2$	$\mathbf{P_1} = S_1$	$\mathbf{P_0}$



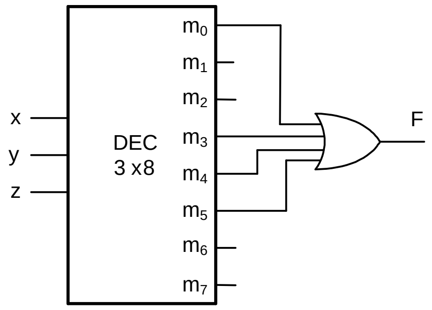
Για την άθροιση των μερικών γινομένων $A_1 \times B_0$ και $A_0 \times B_1$ απαιτείται ένας ημιαθροιστής, ο οποίος στην έξοδο του αθροίσματος S_1 παράγει το ψηφίο P_1 του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού και στην έξοδο C_1 παράγει ένα κρατούμενο.
Για την άθροιση των μερικών γινομένων $A_2 \times B_0$ και $A_1 \times B_1$, καθώς και του κρατούμενου C_1 που προκύπτει από την αμέσως προηγούμενη άθροιση (των $A_1 \times B_0$ και $A_0 \times B_1$) απαιτείται ένας πλήρης αθροιστής, ο οποίος στην έξοδο του αθροίσματος S_2 παράγει το ψηφίο P_2 του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού και στην έξοδο C_2 παράγει ένα κρατούμενο.
Ακολούθως, χρειαζόμαστε έναν δεύτερο ημιαθροιστή για την πρόσθεση του μερικού γινόμενου $A_2 \times B_1$ και του κρατούμενου C_2 που προκύπτει από την αμέσως προηγούμενη άθροιση (των $A_2 \times B_0$, $A_1 \times B_1$ και του κρατούμενου C_1). Η έξοδος S_3 του δεύτερου ημιαθροιστή μας δίνει το ψηφίο P_3 του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού και στην έξοδο C_3 παράγεται ένα κρατούμενο που μας δίνει το ψηφίο P_4 του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού.

2. Έχουμε πέντε εισόδους, $A_2A_1A_0$ B_1B_0, και απαιτούνται πέντε έξοδοι, $P_4P_3P_2P_1P_0$, αφού το μέγιστο αριθμητικό γινόμενο A x B που μπορεί να παραχθεί είναι 7_{10} (111_2) x 3_{10} (11_2) = 21_{10} (10101_2). Επομένως, η κατάλληλη ROM θα έχει 5 εισόδους διεύθυνσης (k = 5) και 5 εξόδους δεδομένων (n = 5). Η ROM θα αποτελείται από έναν αποκωδικοποιητή με k = 5 εισόδους και $2^k = 2^5 = 32$ εξόδους, καθώς και 5 πύλες OR, μία για κάθε έξοδο της ROM. Κάθε έξοδος του αποκωδικοποιητή αντιπροσωπεύει και μια διεύθυνση μνήμης (λέξη). Επομένως θα έχουμε $2^k = 2^5 = 32$ λέξεις των 5 bits, αφού οι έξοδοι δεδομένων της ROM είναι n = 5 bits. Το μέγεθος της ROM δίνεται από τη σχέση $2^k \times n = 2^5 \times 5 = 32 \times 5 = 160$ bits = 20 bytes (1 byte = 8 bits).

ΘΕΜΑ 3° *(2,0 μονάδες)*

Δίνεται το λογικό κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει έναν αποκωδικοποιητή 3 – σε – 8.

Να σχεδιάσετε ένα ισοδύναμο λογικό κύκλωμα με έναν πολυπλέκτη 2 – σε – 1 και λογικές πύλες.



Λύση:

Η λογική συνάρτηση της εξόδου F του κυκλώματος σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων είναι:

$F(x, y, z) = m_0 + m_3 + m_4 + m_5$

Επομένως, ο πίνακας αλήθειας της συνάρτησης F είναι ο ακόλουθος:

x	y	z	F	
0	0	0	**1**	$m_0 = x'y'z'$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	**1**	$m_3 = x'yz$
1	0	0	**1**	$m_4 = xy'z'$
1	0	1	**1**	$m_5 = xy'z$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

Για x = 0, F = $(y \oplus z)'$

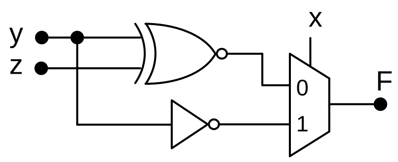
Για x = 1, F = y'

Επιλέγοντας ως είσοδο ελέγχου του πολυπλέκτη 2 – σε – 1 την είσοδο x, από τον πίνακα αλήθειας, προκύπτει ότι:

Για x = 0, F = $(y \oplus z)'$

Για x = 1, F = y'

Άρα, το ζητούμενο ισοδύναμο κύκλωμα είναι το ακόλουθο:



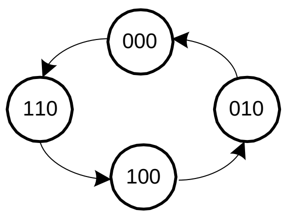
ΘΕΜΑ 4° *(4,0 μονάδες)*

α. Να σχεδιάσετε με T flip-flop σύγχρονο κυκλικό δυαδικό μετρητή 3 bit φθίνουσας μέτρησης, που απαριθμεί μόνο τις άρτιες (ζυγές) καταστάσεις. (3,0 μον.)

β. Εάν το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση $Q_2Q_1Q_0 = 101$, να προσδιορίσετε σε ποια κατάσταση θα μεταβεί μετά από έναν ωρολογιακό παλμό. *(1,0 μον.)*

Λύση:

α. Το Διάγραμμα Καταστάσεων του ζητούμενου μετρητή είναι το ακόλουθο:



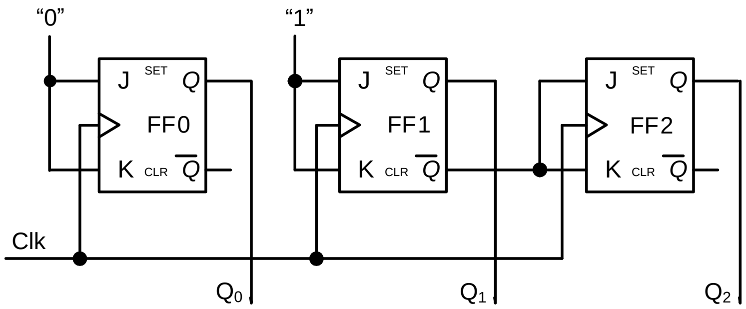
Με βάση τον πίνακα διέγερσης του JK flip-flop συμπληρώνουμε τον πίνακα (μετάβασης) καταστάσεων:

Παρούσα Κατάσταση	**Επόμενη Κατάσταση**	**Είσοδοι FF**		
$Q_2Q_1Q_0$	$Q^+_2Q^+_1Q^+_0$	T_2	T_1	T_0
0 0 0	1 1 0	1	1	0
0 1 0	0 0 0	0	1	0
1 0 0	0 1 0	1	1	0
1 1 0	1 0 0	0	1	0

Οι μη χρησιμοποιούμενες καταστάσεις (001, 011, 101 και 111) είναι αδιάφορες καταστάσεις (X).
Από τον πίνακα καταστάσεων προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις των εισόδων των Flip-Flop, σε απλοποιημένη μορφή.

Είναι προφανές ότι $\mathbf{T_2 = Q'_1}$, $\mathbf{T_1 = 1}$, $\mathbf{T_0 = 0}$.

Το κύκλωμα του μετρητή είναι το ακόλουθο:



<u>Σημείωση:</u> για σχεδιαστικούς λόγους αντί για T flip-flop χρησιμοποιείται το ισοδύναμό του JK flip-flop με βραχυκυκλωμένες εισόδους.

β.

Παρούσα Κατάσταση			**Είσοδοι FF**			**Επόμενη Κατάσταση**		
Q_2	Q_1	Q_0	$T_2 = Q'_1$	$T_1 = 1$	$T_0 = 0$	Q^+_2	Q^+_1	Q^+_0
1	0	1	1	1	0	0	1	1

<u>Παρατήρηση:</u> Βλέπουμε ότι εάν το σύστημα βρεθεί στην μη χρησιμοποιούμενη κατάσταση 101 (περιττός αριθμός), θα μεταβεί μετά από ένα ωρολογιακό παλμό στην κατάσταση 011 (περιττός αριθμός επίσης). Εάν εξετάσουμε το σύστημα για όλες τις μη χρησιμοποιούμενες καταστάσεις (περιττοί αριθμοί), θα παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, από τη στιγμή που θα βρεθεί σε μια οποιαδήποτε μη χρησιμοποιούμενη κατάσταση, δεν επανέρχεται στην κανονική ακολουθία μέτρησης και απαριθμεί τους περιττούς αριθμούς. Δηλαδή, το σύστημα αυτό είναι μη αυτοδιορθούμενο.