

Παρατηρήσεις

Οι παρακάτω ασκήσεις αποτελούν ένα καλό αντιπροσωπευτικό δείγμα για το μάθημα Ηλεκτροτεχνία II (πλην του κεφαλαίου των Μετασχηματιστών). Επειδή ορισμένοι σπουδαστές έκαναν το σχόλιο

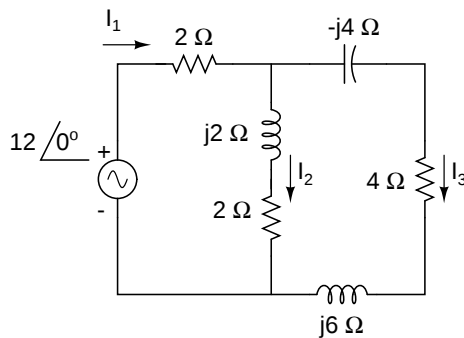
« Δάσκαλε, πως θα είμαστε σίγουροι ότι λύσαμε σωστά τις ασκήσεις; »

έκανα την προσπάθεια να σας δείξω στις περισσότερες από αυτές πως χρησιμοποίησα το πρόγραμμα LTSpice για επιβεβαίωση. Προσθέτω επίσης ότι τις αριθμητικές πράξεις τις έκανα με το πρόγραμμα SCILAB (πολύ πιο ισχυρό εργαλείο από ένα απλό κομπιουτεράκι) λύνοντας με ευκολία τα γραμμικά συστήματα που παρουσιάστηκαν καθώς επίσης και τις γραφικές παραστάσεις στο κεφάλαιο των Μεταβατικών Φαινομένων.

Πιστεύω ότι τα παραπάνω εργαλεία θα σας φανούν και εσάς πολύ χρήσιμα στο μέλλον, στην επαγγελματική σας δουλειά, όταν δεν θα έχετε τον δάσκαλο να σας επιβεβαιώνει τις λύσεις σας σε διάφορα προβλήματα. Ευκαιρία λοιπόν να τα μάθετε τώρα.

1 Κεφάλαιο

Άσκηση 1.7 Να υπολογιστούν τα ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Έχουμε $Z_1 = 2 \Omega$, $Z_2 = 2 + j2 \Omega$, $Z_3 = 4 + j6 - j4 \Omega$, $Z_{23} = Z_2 \parallel Z_3 = 1.754 \angle 37.875^\circ = 1.385 + j1.077 \Omega$ και $Z_{ολικό} = Z_1 + Z_{23} = 3.385 + j1.077 = 3.552 \angle 17.65^\circ \Omega$.

$$I_1 = \frac{12 \angle 0^\circ}{Z_{ολικό}} = 3.379 \angle -17.65^\circ = 3.219 - j1.024 \text{ A}$$

και με διαιρέτη ρεύματος

$$I_2 = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} I_1 = 2.095 \angle -24.775^\circ = 1.902 - j0.878 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} I_1 = 1.325 \angle -6.340^\circ = 1.317 - j0.146 \text{ A}$$

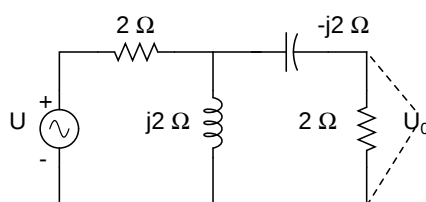
Το παρακάτω netlist για το LTSpice όπου θέτουμε $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για $f = \omega/(2\pi) = 0.15915 \text{ Hz}$

```
askisi 1.7
V 1 0 ac 12 0
R1 1 2 2
L1 2 3 2
R2 3 0 2
C1 2 4 0.25
R3 4 5 4
L2 5 0 6
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac I(R1) I(R2) I(R3)
.end
```

μας δίνει

frequency :	0.15915	Hz		
I(R3):	mag:	1.32505	phase:	-6.33997 device_current
I(R2):	mag:	2.09494	phase:	-24.769 device_current
I(R1):	mag:	3.37811	phase:	-17.646 device_current

Άσκηση 1.8 Να υπολογιστεί η τάση της πηγής στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{U}_0 = 8 \angle 45^\circ \text{ V}$.



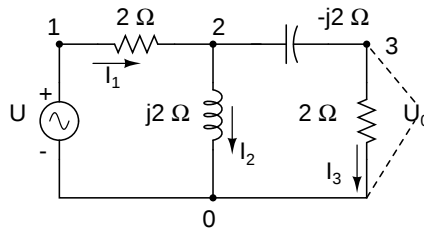
Λύση

α τρόπος

Στο παρακάτω κύκλωμα εφόσον $\dot{U}_0 = 8 \angle 45^\circ$ V έχουμε

$$I_3 = \frac{\dot{U}_0}{2} = 4 \angle 45^\circ \text{ A}$$

Ένας κανόνας βρόγχων του Kirchhoff στο δεξιό βρόγχο δίνει



$$\dot{I}_3(-j2 + 2) - \dot{I}_2(j2) = 0 \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_3(-j2 + 2)}{j2} = \dot{I}_3(-1 - j) = 5.657 \angle -90^\circ \text{ A}$$

Επίσης, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 4 \angle -45^\circ$ A και από τον αριστερό βρόγχο, πάλι με κανόνα βρόγχων του Kirchhoff

$$\dot{U} = 2\dot{I}_1 + j2\dot{I}_2 = 17.89 \angle -18.435^\circ \text{ V}$$

β τρόπος

Εφαρμόζοντας γραμμικότητα θέτουμε $\dot{U} = 1 \angle 0^\circ$ V. Το ισοδύναμο κατά Thevenin στους ακροδέκτες 3,0 είναι

$$\dot{U}_{TH} = \frac{j2}{2 + j2} \dot{U} = 0.707 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$Z_{TH} = (2 \parallel j2) - j2 = 1 + j - j2 = 1 - j = 1.414 \angle -45^\circ \Omega$$

Επομένως, $\dot{U}_0 = \frac{2}{2 + 1 - j} \cdot 0.707 \angle 45^\circ = 0.447 \angle 63.435^\circ$ V και

$$\dot{U} = \frac{8 \angle 45^\circ}{0.447 \angle 63.435^\circ} = 17.889 \angle -18.435^\circ \text{ V}$$

η πραγματική τιμή της πηγής τάσης.

Υπάρχουν πολλές άλλες παραλλαγές για λύση. Το παρακάτω netlist για το LTSpice όπου εφαρμόζουμε γραμμικότητα και θέτουμε $\omega = 1$ rad/s για $f = \omega/(2\pi) = 0.15915$ Hz

```
askisi 1.8
V 1 0 ac 1 0
R1 1 2 2
L1 2 0 2
C1 2 3 0.5
R2 3 0 2
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac Vm(3) Vp(3)
.end
```

μας δίνει

```
frequency:      0.15915  Hz
V(3):   mag:    0.447074  phase:    63.4313      voltage
```

σε καλή συμφωνία με την $\dot{U}_0$ πριν διορθώσουμε για γραμμικότητα.

Άσκηση 1.10 Μετατρέψτε τους φάσορες σε κυματομορφές για τις συχνότητες $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 400$ Hz.

$$\dot{U}_1 = 24 \angle -45^\circ \quad \dot{U}_2 = 10 \angle 120^\circ \quad \dot{U}_3 = 8 \angle -60^\circ \quad \dot{U}_4 = 2 \angle 30^\circ$$

Λύση

Για $f_1 = 50$ Hz

$$\begin{aligned}u_1(t) &= 24\sqrt{2} \sin(2\pi f_1 t - 45^\circ) = 33.941 \sin(314.16t - 45^\circ) \\u_2(t) &= 10\sqrt{2} \sin(2\pi f_1 t + 120^\circ) = 14.142 \sin(314.16t + 120^\circ) \\u_3(t) &= 8\sqrt{2} \sin(2\pi f_1 t - 60^\circ) = 11.314 \sin(314.16t - 60^\circ) \\u_4(t) &= 2\sqrt{2} \sin(2\pi f_1 t + 30^\circ) = 2.828 \sin(314.16t + 30^\circ)\end{aligned}$$

Για $f_2 = 400$ Hz

$$\begin{aligned}u_1(t) &= 24\sqrt{2} \sin(2\pi f_2 t - 45^\circ) = 33.941 \sin(2513.3t - 45^\circ) \\u_2(t) &= 10\sqrt{2} \sin(2\pi f_2 t + 120^\circ) = 14.142 \sin(2513.3t + 120^\circ) \\u_3(t) &= 8\sqrt{2} \sin(2\pi f_2 t - 60^\circ) = 11.314 \sin(2513.3t - 60^\circ) \\u_4(t) &= 2\sqrt{2} \sin(2\pi f_2 t + 30^\circ) = 2.828 \sin(2513.3t + 30^\circ)\end{aligned}$$

Άσκηση 1.11 Κάνετε τις προσθώσεις

1. $3 \angle 30^\circ + 4 \angle 30^\circ$
2. $2 \angle 45^\circ - 4 \angle -45^\circ$
3. $6 \angle 20^\circ + 5 \angle 40^\circ$
4. $1 \angle -20^\circ + 1 \angle 180^\circ$

Λύση

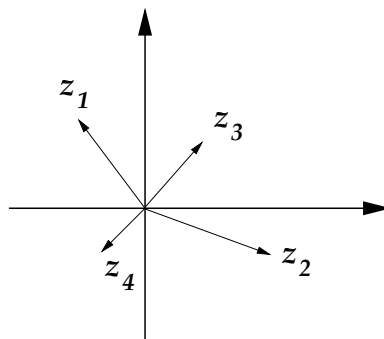
$$\begin{aligned}3 \angle 30^\circ + 4 \angle 30^\circ &= 2.5981 + j1.5000 + 3.4641 + j2.0000 = 6.0622 + j3.5000 = 7 \angle 30^\circ \\2 \angle 45^\circ - 4 \angle -45^\circ &= 1.4142 + j1.4142 - 2.8284 + j2.8284 = -1.4142 + j4.2426 = 4.4721 \angle 108.435^\circ \\6 \angle 20^\circ + 5 \angle 40^\circ &= 5.6382 + j2.0521 + 3.8302 + j3.2139 = 9.4684 + j5.2661 = 10.834 \angle 29.082^\circ \\1 \angle -20^\circ + 1 \angle 180^\circ &= 0.93969 - j0.34202 - 1 + j0 = -0.060307 - j0.342020 = 0.34730 \angle -100^\circ\end{aligned}$$

Άσκηση 1.12 Να βρείτε το μέτρο και τη φάση των παρακάτω εμπεδήσεων και να τις σχεδιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο.

$$-1.5 + j2 \ \Omega \quad 2.82 - j1.03 \ \Omega \quad 1.32 + j1.5 \ \Omega \quad -1 - j1 \ \Omega$$

Λύση

$$\begin{aligned}z_1 &= -1.5 + j2 = 2.5 \angle 126.87^\circ \\z_2 &= 2.82 - j1.03 = 3.0022 \angle -20.065^\circ \\z_3 &= 1.32 + j1.5 = 1.9981 \angle 48.652^\circ \\z_4 &= -1 - j1 = 1.414 \angle -135^\circ\end{aligned}$$



Άσκηση 1.13 Να βρείτε τις εμπεδήσεις που έχουν τα παρακάτω στοιχεία:

1. Πηνίο 2 H στα 100 Hz.
2. Πυκνωτής 25 μ F στα 50 Hz.
3. Πυκνωτής 25 μ F στα 50 rad/s.
4. Ωμική αντίσταση 75 Ω στα 377 rad/s.

Λύση

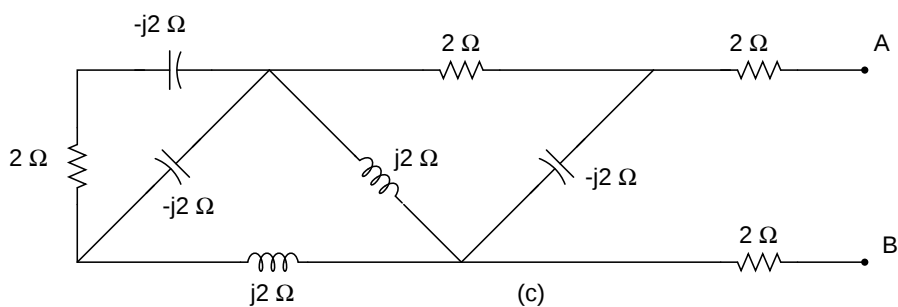
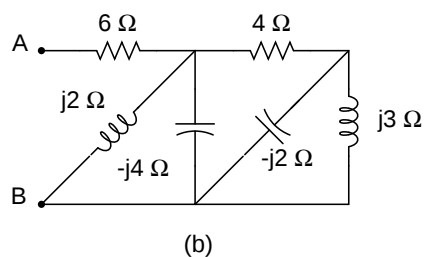
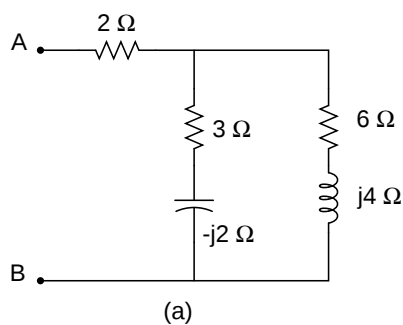
$$Z_L = j\omega L = j2\pi fL = j628.32 \cdot 2 = 1256.6 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{2\pi fC} = -j127.32 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j800 \Omega$$

$$R = 75 \Omega$$

Άσκηση 1.14 Να βρείτε την ολική εμπέδηση που φαίνεται από τα A, B στα παρακάτω κυκλώματα.



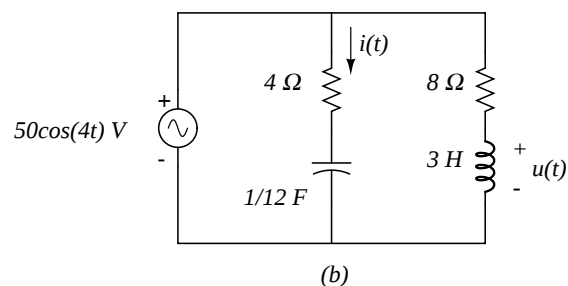
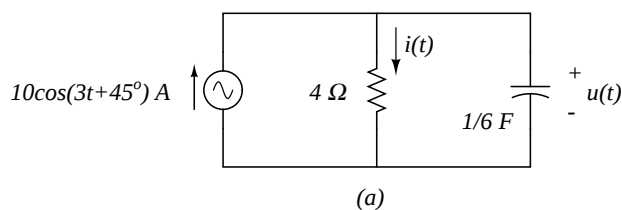
Λύση

$$(a) \quad Z_{AB} = [(6 + j4) \parallel (3 - j2)] + 2 = 4.792 \angle -7.334^\circ \Omega$$

$$(b) \quad Z_{AB} = \left[\left\{ \left[(j3 \parallel (-j2)) + 4 \right] \parallel (-j4) \right\} \parallel (j2) \right] + 6 = 10.77 \angle 31.33^\circ \Omega$$

$$(c) \quad Z_{AB} = \left\{ \left[\left\{ \left[(2 - j2 \parallel (-j2)) + (j2) \right] \parallel (j2) \right\} + 2 \right] \parallel (-j2) \right\} + 2 + 2 = 5.423 \angle -12.53^\circ \Omega$$

Άσκηση 1.21 Να βρεθούν η τάση $u(t)$ και το ρεύμα $i(t)$ στα παρακάτω κυκλώματα.



Λύση

Στο κύκλωμα (a) ο πυκνωτής έχει εμπέδηση $Z_C = -j/(3/6) = -j2 \Omega$ και ο φάσορας της πηγής είναι $\dot{I}_s = (10/\sqrt{2}) \angle 45^\circ$ A. Με διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I} = \frac{Z_C}{Z_C + 4} \dot{I}_s = 3 - j = 3.162 \angle -18.435^\circ \Rightarrow i(t) = 4.472 \cos(3t - 18.435^\circ) \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι ίδια με την τάση στα άκρα της 4Ω . Άρα, $u(t) = 4i(t) = 17.89 \cos(3t - 18.435^\circ) \text{ V}$.

Το παρακάτω netlist για το LTSpice

```
askisi a1_21a
I 0 1 ac 10 45
R 1 0 4
C 1 0 0.16667
.ac lin 1 0.47746 0.47746
.print ac
.end
```

μας δίνει

```
frequency:      0.47746 Hz
V(1):   mag:    17.8884 phase:   -18.4352      voltage
I(R):   mag:    4.4721 phase:   -18.4352      device_current
```

Στο κύκλωμα (b) ο πυκνωτής έχει εμπέδηση $Z_C = -j/(4/12) = -j3 \Omega$, το πηνίο $Z_L = j4 \cdot 3 = j12 \Omega$, και ο φάσορας της πηγής είναι $\dot{U}_s = (50/\sqrt{2}) \angle 0^\circ$ V.

Η τάση στο μεσαίο κλάδο είναι η τάση της πηγής, άρα

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{4 - j3} = 7.071 \angle 36.87^\circ \Rightarrow i(t) = 10 \cos(4t + 36.87^\circ) \text{ A}$$

Στον δεξιό κλάδο μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτη τάσης, άρα

$$\dot{U} = \frac{Z_L}{Z_L + 8} \dot{U}_s = 29.417 \angle 33.69^\circ \Rightarrow u(t) = 41.603 \cos(4t + 33.69^\circ) \text{ V}$$

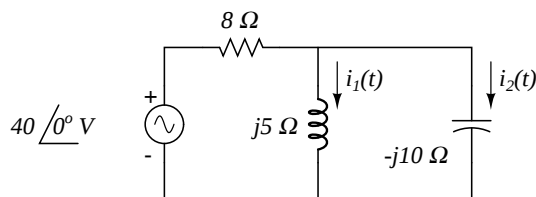
Το παρακάτω netlist για το LTSpice

```
askisi a1_21b
Vs 1 0 ac 50 0
R1 1 2 4
C 2 0 0.083333
R2 1 3 8
L 3 0 3
.ac lin 1 0.63662 0.63662
.print ac
.end
```

μας δίνει

```
frequency:      0.63662 Hz
V(3):   mag:    41.6009 phase:    33.6886      voltage
I(R1):  mag:    9.99999 phase:    36.87       device_current
```

Άσκηση 1.22 Να βρεθούν τα ρεύματα $i_1(t)$, $i_2(t)$ στο παρακάτω κύκλωμα εάν η συχνότητα της πηγής είναι $f = 50 \text{ Hz}$.



Λύση

Το πηνίο και ο πυκνωτής είναι παράλληλα και η εμπέδηση είναι

$$Z = (j5) \parallel (-j10) = j10 \Omega$$

Με διαίρετη τάσης, η τάση στα άκρα του πηνίου και πυκνωτή είναι

$$\dot{U} = \frac{j10}{j10 + 8} 40 = 31.235 \angle 38.66^\circ \text{ V}$$

άρα

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j5} = 6.247 \angle -51.34^\circ \Rightarrow i_1(t) = 8.834 \sin(2\pi 50 \cdot t - 51.34^\circ) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{-j10} = 3.123 \angle 128.66^\circ \Rightarrow i_2(t) = 4.417 \sin(2\pi 50 \cdot t + 128.66^\circ) \text{ A}$$

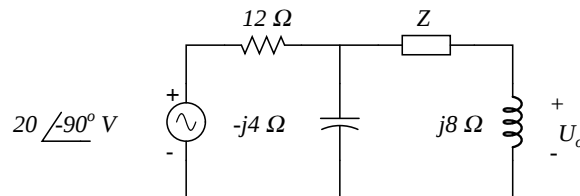
Το παρακάτω netlist για το LTSpice

```
askisi a1_22
V 1 0 ac 40 0
R 1 2 8
L 2 0 0.015915
C 2 0 0.00031831
.ac lin 1 50 50
.print ac
.end
```

μας δίνει

frequency :	50	Hz		
I(C) :	mag :	3.12279	phase :	128.653 device_current
I(L) :	mag :	6.24578	phase :	-51.336 device_current

Άσκηση 1.24 Να βρεθεί η εμπέδηση Z στο παρακάτω κύκλωμα εάν $\dot{U}_o = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$.

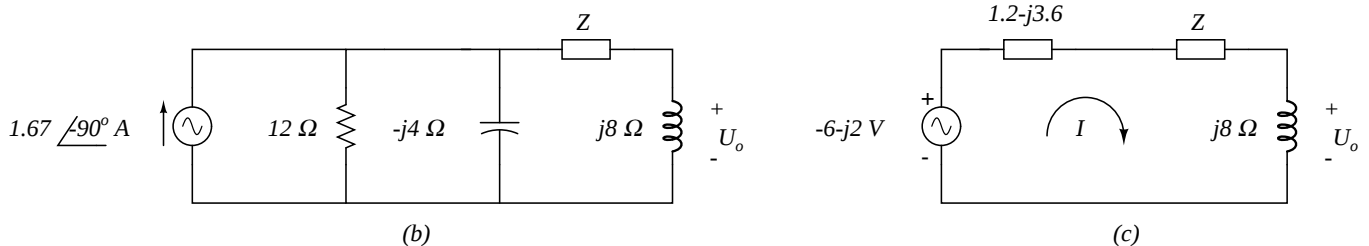


Λύση

Το ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο άρα και από την άγνωστη εμπέδηση είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_o}{j8} = -j0.5 \text{ A}$$

Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς πηγών καταλήγουμε στο παρακάτω κύκλωμα (c)



όπου με εφαρμογή του κανόνα τάσεων του Kirchhoff στον ένα βρόγχο έχουμε

$$\dot{I}(1.2 - j3.6) + \dot{I}Z + \dot{U}_o - (-6 - j2) = 0 \Rightarrow Z = -\frac{6 + j2 + 4 + \dot{I}(1.2 - j3.6)}{\dot{I}} = 2.8 - j16.4 = 16.637 \angle -80.311^\circ \Omega$$

Για επιβεβαίωση με το LTSpice θέτουμε στο αρχικό κύκλωμα την τιμή της Z και εξετάζουμε την τιμή της $\dot{U}_o$. $Z = 2.8 - j16.4$ σημαίνει ωμική αντίσταση 2.8Ω και χωρητική αντίσταση $-j16.4 \Omega$. Επομένως ένα κατάλληλο netlist με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
askisi a1_24
Vs 1 0 ac 20 -90
R1 1 2 12
C1 2 0 0.25
R2 2 3 2.8
C2 3 4 0.060976
L 4 0 8
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac Vm(4) Vp(4)
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.15915      Hz
V(4):   mag:    3.99966  phase:   -0.0101502      voltage
```

σε καλή συμφωνία με το $4 \angle 0^\circ$.

2 Κεφάλαιο

Άσκηση 2.3 Σε εν σειρά κύκλωμα συντονισμού έχουμε $R = 10 \Omega$. Να βρεθούν οι τιμές L και C έτσι ώστε το κύκλωμα να έχει συχνότητα συντονισμού 100 kHz και εύρος ωφέλιμης ζώνης 1 kHz . Να βρεθούν κατόπιν τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

Λύση

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow LC = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = 2.5330 \times 10^{-12}$$

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L} \Rightarrow L = \frac{R}{2\pi \Delta f} = 1.5915 \times 10^{-3} \text{ H} \quad \text{και} \quad C = \frac{LC}{L} = 1.5915 \times 10^{-9} \text{ F}$$

Ο συντελεστής ποιότητας είναι

$$Q_s = \frac{f_0}{\Delta f} = 100$$

Τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης είναι f_1, f_2 όπου

$$f_1 f_2 = f_0^2 \quad \text{και} \quad f_2 - f_1 = \Delta f$$

οπότε

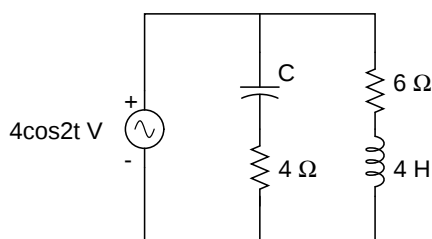
$$f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} \quad \text{και} \quad \frac{f_0^2}{f_1} - f_1 = \Delta f \Rightarrow f_1^2 + \Delta f \cdot f_1 - f_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$f_1 = -\frac{\Delta f}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2}\right)^2 + f_0^2} = 99501.25 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} = 100501.25 \text{ Hz}$$

Μια καλή προσέγγιση των f_1, f_2 (σε αυτή την περίπτωση) υπολογίζεται επίσης με

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 99500 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 100500 \text{ Hz}$$

Άσκηση 2.4 Στο παρακάτω κύκλωμα να προσδιοριστεί η τιμή της C έτσι ώστε να έχουμε συντονισμό. Υπολογίστε κατόπιν τις αλλαγές στα στοιχεία όταν αλλάζουμε κλίμακα στη συχνότητα με συντελεστή συχνότητας $K_F = 1000$.



Λύση

Συντονισμό έχουμε όταν η ολική εμπέδηση που βλέπει η πηγή έχει φανταστικό τμήμα μηδέν. Οι εμπεδήσεις στους δυο κλάδους για $\omega = 2 \text{ rad/s}$ είναι

$$Z_1 = 4 - \frac{j}{2C} \quad \text{και} \quad Z_2 = 6 + j2 \cdot 4 = 6 + j8$$

και η ολική εμπέδηση είναι

$$Z_{ολ} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\left(4 - \frac{j}{2C}\right)(6 + j8)}{4 - \frac{j}{2C} + 6 + j8} = \frac{\left(24 + \frac{4}{C}\right) + j\left(32 - \frac{3}{C}\right)}{10 + j\left(8 - \frac{1}{2C}\right)} = \left[\frac{\left(24 + \frac{4}{C}\right) + j\left(32 - \frac{3}{C}\right)}{10 + j\left(8 - \frac{1}{2C}\right)} \right] \cdot \left[\frac{10 - j\left(8 - \frac{1}{2C}\right)}{10 - j\left(8 - \frac{1}{2C}\right)} \right]$$

Το φανταστικό μέρος του αριθμητή που μηδενίζεται είναι

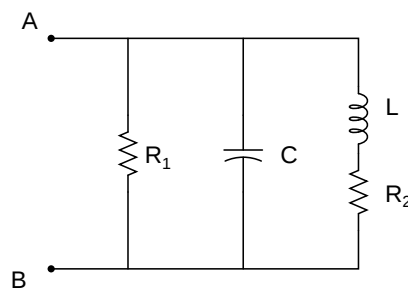
$$10 \left(32 - \frac{3}{C}\right) - \left(8 - \frac{1}{2C}\right) \left(24 + \frac{4}{C}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2}{C^2} - \frac{50}{C} + 128 = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 2 \cdot 128}}{2 \cdot 2} = 22.1047 \text{ και } 2.8953 \Rightarrow$$
$$C = 45.24 \text{ mF και } 345.39 \text{ mF}$$

δυο δυνατές λύσεις για τη χωρητικότητα.

Αλλαγή κλίμακος στη συχνότητα κατά $K_F = 1000$ σημαίνει ίδιες ωμικές αντιστάσεις και

$$C' = \frac{C}{K_F} = 45.24 \text{ } \mu\text{F} \text{ ή } 345.39 \text{ } \mu\text{F} \quad \text{και} \quad L' = \frac{L}{K_F} = 4 \text{ mH}$$

Άσκηση 2.5 Στο παρακάτω κύκλωμα υπολογίστε την συχνότητα συντονισμού καθώς και την εμπέδηση Z_{AB} στο συντονισμό. Δίδονται $R_1 = 125 \text{ } \Omega$, $R_2 = 30 \text{ } \Omega$, $C = 4 \text{ } \mu\text{F}$ και $L = 10 \text{ mH}$. Εκτιμήστε τον συντελεστή ποιότητας.



Λύση

Η σύνθετη αγωγιμότητα που φαίνεται από τα A,B είναι

$$Y_{AB} = \frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{R_2 + j\omega L} = \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{R_2 - j\omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

Συντονισμό έχουμε όταν το φανταστικό μέρος μηδενίζεται, οπότε

$$\omega C = \frac{\omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow R_2^2 + \omega^2 L^2 = \frac{L}{C} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{L^2}} = 4000 \text{ rad/s ή } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 636.62 \text{ Hz}$$

Κρατήσαμε μόνο τη θετική λύση που έχει φυσική σημασία. Για τη συχνότητα συντονισμού ω_0 έχουμε

$$Y_{AB} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + \omega_0^2 L^2} = 0.02 \text{ S} \Rightarrow Z_{AB} = \frac{1}{Y_{AB}} = 50 \text{ } \Omega$$

Το δικτύωμα θυμίζει παράλληλο συντονισμό. Μπορούμε να μετατρέψουμε τον εν σειρά συνδυασμό L , R_2 σε παράλληλο συνδυασμό R_p , L_p (σελ. 55 βιβλίο) όπου

$$R_p = R_2 \left[1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R_2} \right)^2 \right] = 83.333 \text{ } \Omega \quad L_p = L \left[1 + \left(\frac{R_2}{\omega_0 L} \right)^2 \right] = 0.015625 \text{ H}$$

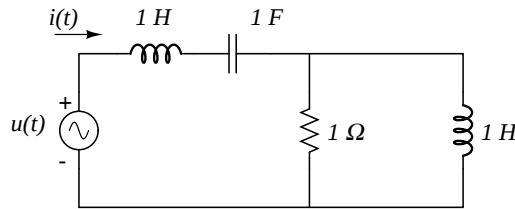
Έχουμε επίσης

$$R = R_1 \parallel R_p = 50 \text{ } \Omega$$

και το ισοδύναμο παράλληλο δικτύωμα συντονισμού έχει παράλληλα στοιχεία R , C και L_p . Ο συντελεστής ποιότητας είναι

$$Q_p = \omega_0 RC = 0.8$$

Άσκηση 2.8 Στο παρακάτω κύκλωμα υπολογίστε τη συχνότητα ω για την οποία τα $u(t)$ και $i(t)$ είναι εν φάση.



Λύση

Τα $u(t)$ και $i(t)$ είναι εν φάση όταν η εμπεδήση που βλέπει η πηγή είναι καθαρά ωμική. Επομένως

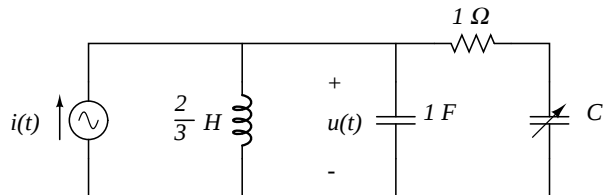
$$\Im m \left\{ \left(j\omega + \frac{1}{j\omega} \right) + (1 \parallel j\omega) \right\} = 0 \Rightarrow \Im m \left\{ j\omega - \frac{j}{\omega} + \frac{j\omega}{1+j\omega} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} \right\} = 0 \Rightarrow \omega - \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{1+\omega^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2(1+\omega^2) - (1+\omega^2) + \omega^2}{\omega(1+\omega^2)} = 0 \Rightarrow \omega^4 + \omega^2 - 1 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.61803 \Rightarrow$$

$$\omega = 0.78615 \text{ rad/s} \quad \text{ή} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.12512 \text{ Hz}$$

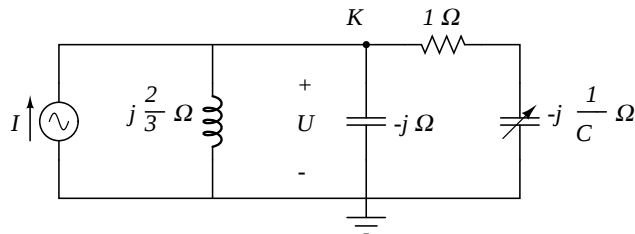
όπου κρατήσαμε μόνο τις θετικές τιμές των συχνοτήτων που έχουν φυσικό νόημα.

Άσκηση 2.11 Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $i(t) = 10 \sin t$. Υπολογίστε την χωρητικότητα C έτσι ώστε $u(t) = U_0 \sin t$. Ποιά είναι η τιμή U_0 ;



Λύση

Μετατρέποντας σε φάσορες και μιγαδικές εμπεδήσεις έχουμε το παρακάτω κύκλωμα.



Με κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο K έχουμε

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j(2/3)} + \frac{\dot{U}}{(-j)} + \frac{\dot{U}}{1-j/C} = \dot{U} \left[-j\frac{3}{2} + j + \frac{C}{C-j} \right] = \dot{U} \left[-j\frac{3}{2} + j + \frac{C^2+jC}{1+C^2} \right] \Rightarrow$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{\left[\frac{C^2}{1+C^2} - j\frac{1}{2} + \frac{jC}{1+C^2} \right]}$$

Και επειδή $\dot{U} = (U_0/\sqrt{2}) \angle 0^\circ$ και $\dot{I} = (10/\sqrt{2}) \angle 0^\circ$ έχουμε

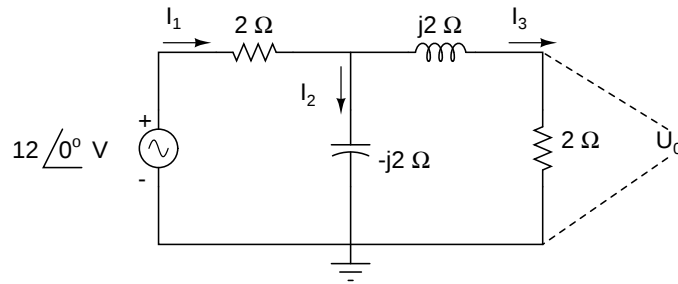
$$U_0 = \frac{10}{\left[\frac{C^2}{1+C^2} - j\frac{1}{2} + \frac{jC}{1+C^2} \right]}$$

όπου U_0 πραγματικός αριθμός. Επομένως

$$\frac{C}{1+C^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C^2 - 2C + 1 = 0 \Rightarrow C = 1 \text{ F} \quad \text{και} \quad U_0 = 20 \text{ V}$$

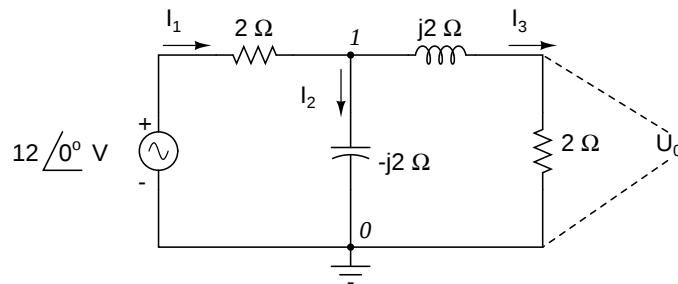
3 Κεφάλαιο

Άσκηση 3.1 Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογίσετε την $\dot{U}_0$ υποθέτοντας αρχικά ότι $\dot{U}_0 = 1 \angle 0^\circ$ και χρησιμοποιώντας γραμμικότητα.



Λύση

Εάν $\dot{U}_0 = 1 \angle 0^\circ$ V τότε $\dot{I}_3 = \dot{U}_0/2 = 0.5 \angle 0^\circ$ A.



Η τάση $\dot{U}_{10}$ στον δεξιό κλάδο είναι τότε

$$\dot{U}_{10} = \dot{I}_3(j2) + \dot{U}_0 = j + 1 \text{ V}$$

άρα το ρεύμα

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{10}}{-j2} = \frac{j(j+1)}{2} = \frac{j-1}{2} \text{ A}$$

και

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \frac{j-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{j}{2} \text{ A}$$

Οπότε η πηγή που θα έδινε την τάση που υποθέσαμε από κανόνα Kirchhoff στον αριστερό βρόγχο

$$2\dot{I}_1 + \dot{U}_{10} = \dot{U}_s = j + j + 1 = 1 + 2j \text{ V}$$

Και με μέθοδο τριών, η τελική τάση $\dot{U}_0$ είναι

$$\dot{U}_0 = \frac{12}{1+j2} = 5.3666 \angle -63.435^\circ \text{ V}$$

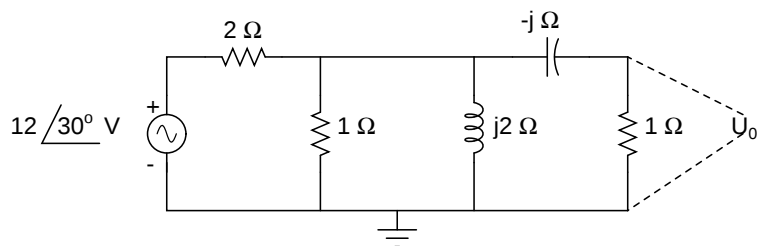
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1$ rad/s είναι

```
3_1
Vs 1 0 ac 12 0
R1 1 2 2
C1 2 0 0.5
L1 2 3 2
R2 3 0 2
.ac lin 1 0.1591549 0.1591549
.print ac Vm(3) Vp(3)
.end
```

και μας δίνει

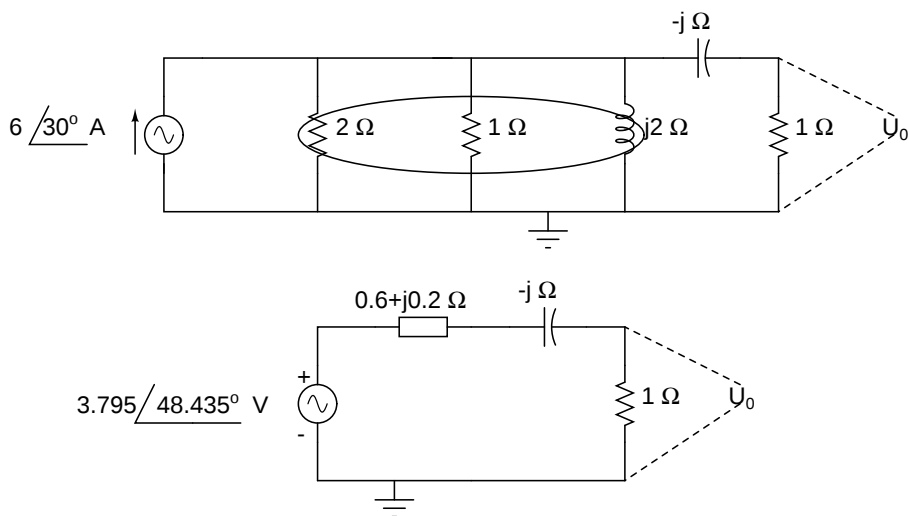
```
frequency:      0.159155      Hz
V(3):   mag:    5.36495  phase:  -63.4292      voltage
```

Άσκηση 3.2 Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογίσετε την $\dot{U}_0$.



Λύση

Μετατρέπουμε την πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος και αντικαθιστούμε τις τρεις παράλληλες εμπεδήσεις με την ισοδύναμή τους.



$$\dot{I}_s = \frac{12 \angle 30^\circ}{2} = 6 \angle 30^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{j}{2} = 1.5 - j0.5 \Rightarrow Z = 0.6 + j0.2 = 0.6325 \angle 18.435^\circ \Omega$$

Μετασχηματίζουμε κατόπιν σε πηγή τάσης

$$\dot{U} = \dot{I}_s Z = 3.795 \angle 48.435^\circ \text{ V}$$

και έχουμε κύκλωμα ενός βρόγχου από όπου με ένα διαρέτη τάσης

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{1 - j + 0.6 + j0.2} \dot{U} = 2.1213 \angle 75^\circ \text{ V}$$

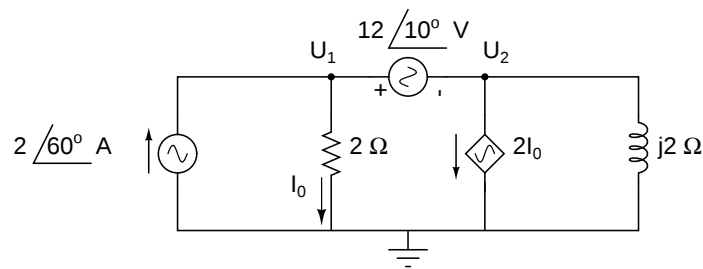
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_2
V1 1 0 ac 12 30
R1 1 2 2
R2 2 0 1
L1 2 0 2
C1 2 3 1
R3 3 0 1
.ac lin 1 0.1591549 0.1591549
.print ac Vm(3) Vp(3)
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.159155      Hz
V(3):  mag:      2.12106  phase:      75      voltage
```

Άσκηση 3.3 Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογίσετε τις τάσεις $\dot{U}_1, \dot{U}_2$.



Λύση

Έχουμε $\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 12 \angle 10^\circ \text{ V}$ που σημαίνει ότι κυκλοφορεί κάποιο ρεύμα $\dot{I}_{12}$ από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2. Ο κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff για τον κόμβο 1 είναι

$$2 \angle 60^\circ - \dot{I}_0 - \dot{I}_{12} = 0$$

Στον κόμβο 2 εισέρχεται το ρεύμα $\dot{I}_{12}$ και έχουμε

$$\dot{I}_{12} - 2\dot{I}_0 - \frac{\dot{U}_2}{j2} = 0 \Rightarrow \dot{I}_{12} = 2 \frac{\dot{U}_1}{2} + \frac{\dot{U}_2}{j2}$$

και η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$2 \angle 60^\circ - \frac{\dot{U}_1}{2} - \dot{U}_1 - \frac{\dot{U}_2}{j2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \dot{U}_1 - j \frac{\dot{U}_2}{2} = 2 \angle 60^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} (\dot{U}_2 + 12 \angle 10^\circ) - j \frac{\dot{U}_2}{2} = 2 \angle 60^\circ \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2} \right) \dot{U}_2 = 2 \angle 60^\circ - 18 \angle 10^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{U}_2 = -9.7572 - j4.1815 = 10.615 \angle -156.802^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + 12 \angle 10^\circ = 2.0605 - j2.0977 = 2.9404 \angle -45.513^\circ \text{ V}$$

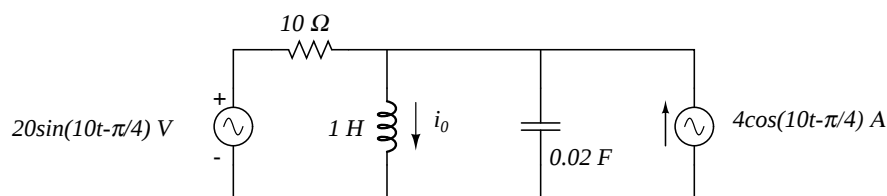
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3 3
Is 0 1 ac 2 60
R1 1 3 2
Vd 3 0 ac 0
Vs 1 2 ac 12 10
F1 2 0 Vd 2
L1 2 0 2
.ac lin 1 0.1591549 0.1591549
.print ac Vm(1) Vp(1) Vm(2) Vp(2)
.end
```

και μας δίνει

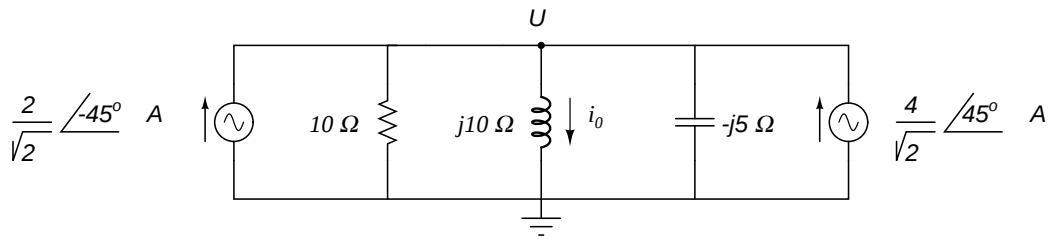
frequency:	0.159155	Hz	
V(1):	mag:	2.94049	phase: -45.48 voltage
V(2):	mag:	10.6139	phase: -156.805 voltage

Άσκηση 3.4 Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογίσετε το ρεύμα i_0 .



Λύση

Καταρχήν μετατρέπουμε σε φάσορες. Αν πάρουμε το $\sin$ σαν αναφορά χρησιμοποιούμε τη σχέση $\cos \theta = \sin(90^\circ + \theta)$ έτσι ώστε $4 \cos(10t - \pi/4) = 4 \sin(10t - \pi/4 + \pi/2) = 4 \sin(10t + \pi/4)$. Μετατρέπουμε κατόπιν την πηγή τάσης σε ρεύματος και έχουμε το παρακάτω σχήμα.



Κανόνες ρευμάτων του Kirchhoff δίνει

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ + \frac{4}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = \dot{U} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j10} + \frac{j}{5} \right) \Rightarrow \dot{U} = \frac{3+j}{0.1+j0.1} = 20 - j10 = 22.361 \angle -26.565^\circ \text{ V}$$

και

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{j10} = -1 - j2 = 2.2361 \angle -116.565^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad i_0(t) = 3.162 \sin(10t - 116.565^\circ) \text{ A}$$

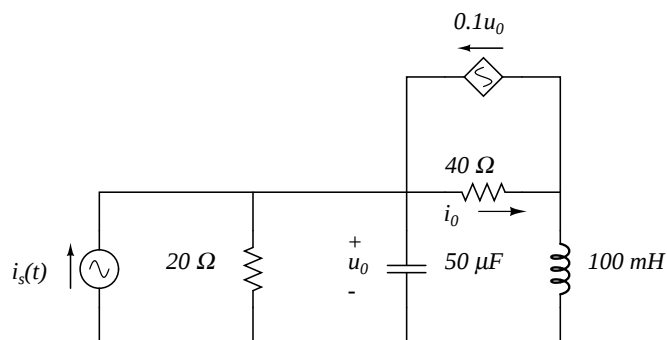
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 10 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_4
V1 1 0 ac 20 -45
R1 1 2 10
L1 2 0 1
C1 2 0 0.02
I1 0 2 ac 4 45
.ac lin 1 1.5915 1.5915
.print ac Vm(2) Vp(2)
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      1.5915   Hz
I(L1):  mag:    3.16237  phase:   -116.554      device_current
```

Άσκηση 3.7 Προσδιορίστε το ρεύμα $i_0(t)$ στο παρακάτω κύκλωμα όταν $i_s(t) = 6 \cos(200t + 15^\circ) \text{ A}$.

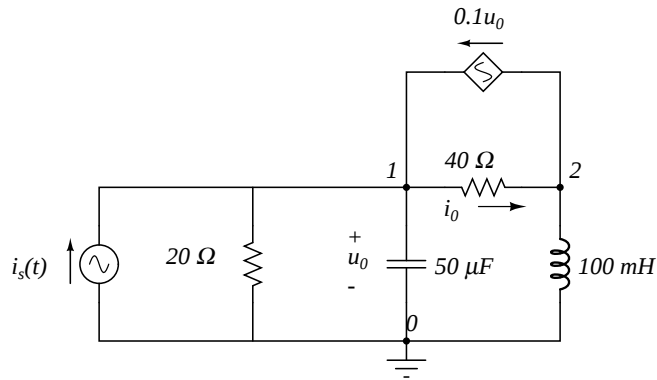


Λύση

Καταρχήν μετατρέπουμε σε φάσορες με αναφορά το $\cos$.

$$\dot{I}_s = (6/\sqrt{2}) \angle 15^\circ \text{ A} \quad \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{200 \cdot 50 \times 10^{-6}} = -j100 \Omega \quad j\omega L = j200 \cdot 100 \times 10^{-3} = j20 \Omega$$

Το κύκλωμα έχει μόνο πηγές ρεύματος και 3 κόμβους (ένας είναι ο αναφοράς) άρα εφαρμόζουμε μέθοδο κόμβων.



$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{20} + \frac{j}{100} + \frac{1}{40} \right) - \dot{U}_2 \left(\frac{1}{40} \right) &= \dot{I}_s + 0.1\dot{U}_1 \\ -\dot{U}_1 \left(\frac{1}{40} \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{1}{40} - \frac{j}{20} \right) &= -0.1\dot{U}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{20} + \frac{j}{100} + \frac{1}{40} - 0.1 \right) - \dot{U}_2 \left(\frac{1}{40} \right) &= \frac{6}{\sqrt{2}} \angle 15^\circ \\ -\dot{U}_1 \left(\frac{1}{40} - 0.1 \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{1}{40} - \frac{j}{20} \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{U}_1 = 102.9 \angle -89.036^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_2 = 138.054 \angle 154.4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{40} = 5.145 \angle -52.166^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad i_0(t) = 7.276 \cos(200t - 52.166^\circ) \text{ A}$$

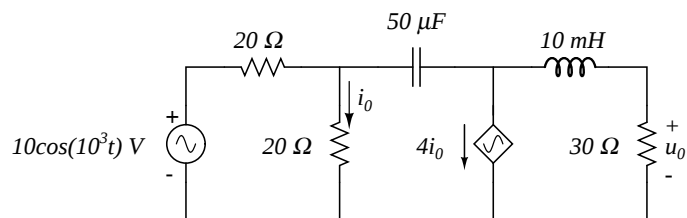
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 200 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_7
Is 0 1 ac 6 15
R1 1 0 20
C1 1 0 50u
R2 1 2 40
G1 2 1 1 0 0.1
L1 2 0 100m
.ac lin 1 31.831 31.831
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      31.831   Hz
I(R2):  mag:    7.27631  phase:   -52.1672      device_current
```

Άσκηση 3.8 Υπολογίστε την τάση u_0 στο παρακάτω κύκλωμα.

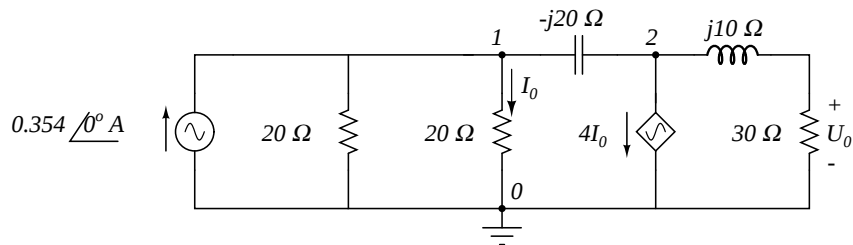


Λύση

Καταρχήν μετατρέπουμε σε φάσορες με αναφορά το $\cos$.

$$\dot{U}_s = (10/\sqrt{2}) \angle 0^\circ \text{ V} \quad \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{1000 \cdot 50 \times 10^{-6}} = -j20 \Omega \quad j\omega L = j1000 \cdot 10 \times 10^{-3} = j10 \Omega$$

Μετατρέπουμε επίσης την πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος $\dot{I}_s = 0.354 \angle 0^\circ \text{ A}$. Το κύκλωμα τώρα έχει μόνο πηγές ρεύματος και 3 κόμβους (ένας είναι ο αναφοράς) άρα εφαρμόζουμε μέθοδο κόμβων.



$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{j}{20} \right) - \dot{U}_2 \left(\frac{j}{20} \right) &= \dot{I}_s \\ -\dot{U}_1 \left(\frac{j}{20} \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{j}{20} + \frac{1}{30 + j10} \right) &= -4\dot{I}_0 = -4\frac{\dot{U}_1}{20} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{j}{20} \right) - \dot{U}_2 \left(\frac{j}{20} \right) &= 0.354 \angle 0^\circ \\ -\dot{U}_1 \left(\frac{j}{20} - \frac{1}{5} \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{j}{20} + \frac{1}{30 + j10} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{U}_1 = 1.112 \angle -24.15^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_2 = 4.587 \angle 88.69^\circ \text{ V}$$

και με διαρέτη τάσης

$$\dot{U}_0 = \frac{30}{30 + j10} \dot{U}_2 = 4.351 \angle 70.25^\circ \Rightarrow u_0(t) = 6.154 \cos(1000t + 70.25^\circ) \text{ V}$$

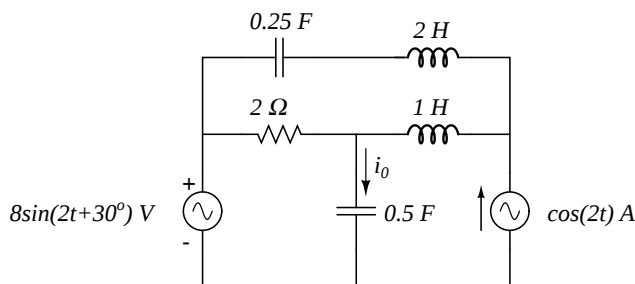
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_8
V1 1 0 ac 10 0
R1 1 2 20
R2 2 5 20
Vd 5 0 ac 0 0
C1 2 3 50u
F1 3 0 Vd 4
L1 3 4 10m
R3 4 0 30
.ac lin 1 159.15 159.15
.print ac Vm(4) Vp(4)
.end
```

και μας δίνει

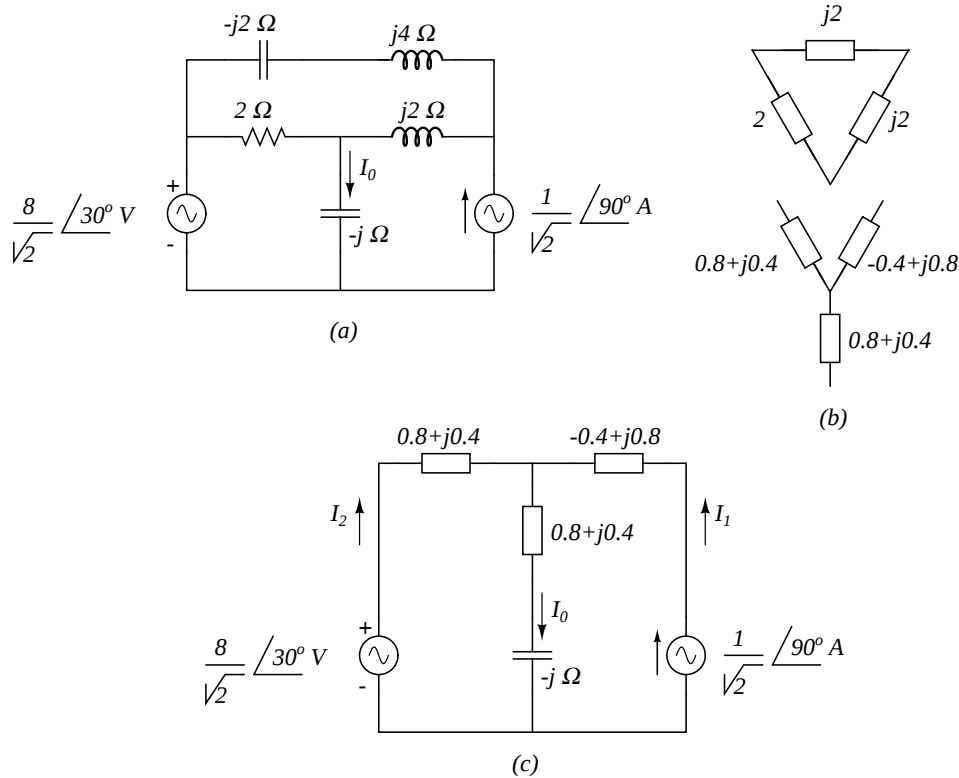
```
frequency:      159.15  Hz
V(4):   mag:    6.15397  phase:    70.2546      voltage
```

Άσκηση 3.9 Υπολογίστε το ρεύμα $i_0(t)$ στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Καταρχήν μετατρέπουμε σε φάσORES. Αν πάρουμε το $\sin$ σαν αναφορά χρησιμοποιούμε τη σχέση $\cos \theta = \sin(90^\circ + \theta)$ έτσι ώστε $\cos(2t) = \sin(2t + 90^\circ)$. Παρατηρούμε επίσης ότι οι 4 επάνω εμπεδήσεις σχηματίζουν ένα τρίγωνο το οποίο μπορούμε να μετατρέψουμε σε αστέρα και να εξαφανίσουμε έτσι τον επάνω βρόγχο (κύκλωμα (c)).



Με κανόνες Kirchhoff τώρα (ρευμάτων στον επάνω κόμβο, βρόγχων στον αριστερό βρόγχο) έχουμε

$$\left. \begin{aligned} I_2 + I_1 &= I_0 \\ I_2(0.8 + j0.4) + I_0(0.8 + j0.4 - j) &= U \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_0 = \frac{\left(\frac{8}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ\right)(0.8 + j0.4)}{0.8 + j0.4 + 0.8 + j0.4 - j} =$$

$$= 3.553 \angle 43.451^\circ \Rightarrow i_0(t) = 5.025 \sin(2t + 43.451^\circ) \text{ A}$$

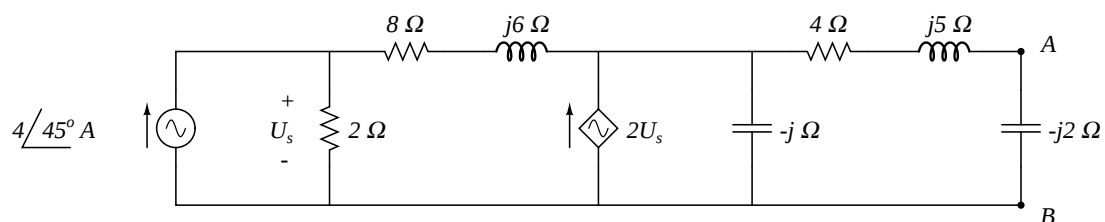
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 2 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_9
V1 2 0 ac 8 30
R1 2 1 2
C1 1 0 0.5
L1 1 3 1
I1 0 3 ac 1 90
C2 2 4 0.25
L2 4 3 2
.ac lin 1 0.31831 0.31831
.print ac
.end
```

και μας δίνει

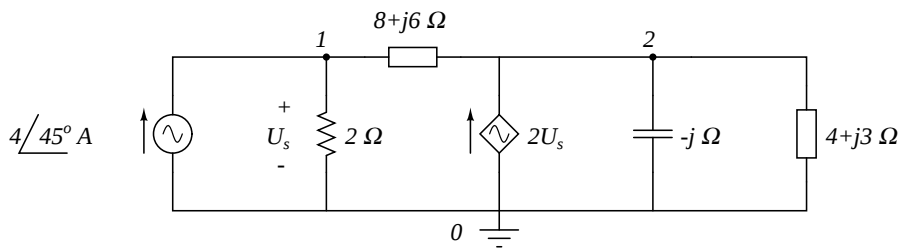
```
frequency:      0.31831 Hz
I(C1):  mag:    5.02588  phase:    43.462      device_current
```

Άσκηση 3.12 Προσδιορίστε την τάση $\dot{U}_{AB}$ στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Αν συνδυάσουμε τις εν σειρά εμπεδήσεις βλέπουμε ότι έχουμε ένα κύκλωμα με πηγές ρεύματος και 3 κόμβους (ένας από αυτούς είναι ο αναφοράς). Μπορούμε λοιπόν με μέθοδο κόμβων να βρούμε την τάση $\dot{U}_2$ και κατόπιν με διαιρέτη τάσης την $\dot{U}_{AB}$.



Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8+j6} \right) - \dot{U}_2 \left(\frac{1}{8+j6} \right) &= 4 \angle 45^\circ \\ -\dot{U}_1 \left(\frac{1}{8+j6} \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{1}{8+j6} + \frac{1}{(-j)} + \frac{1}{4+j3} \right) &= 2\dot{U}_s = 2\dot{U}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8+j6} \right) - \dot{U}_2 \left(\frac{1}{8+j6} \right) &= 4 \angle 45^\circ \\ -\dot{U}_1 \left(\frac{1}{8+j6} + 2 \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{1}{8+j6} + \frac{1}{(-j)} + \frac{1}{4+j3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{U}_1 = 5.779 \angle 31.167^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_2 = 14.075 \angle -44.171^\circ \text{ V}$$

και με διαιρέτη τάσης

$$\dot{U}_{AB} = \frac{-j2}{4+j5-j2} \dot{U}_2 = 5.630 \angle -171.04^\circ \text{ V}$$

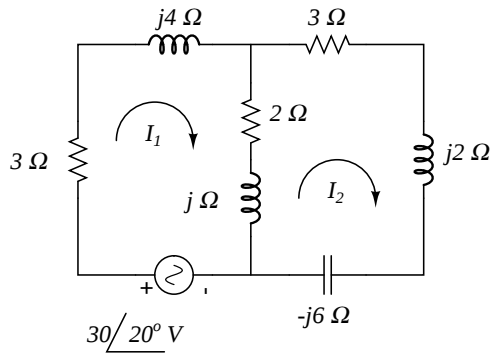
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_12
Is 0 1 ac 4 45
R1 1 0 2
R2 1 2 8
L1 2 3 6
G1 0 3 1 0 2
C1 3 0 1
R3 3 4 4
L2 4 5 5
C2 5 0 0.5
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac Vm(5) Vp(5)
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.15915  Hz
V(5):   mag:      5.6296  phase:    -171.033      voltage
```

Άσκηση 3.15 Υπολογίστε τα ρεύματα οφθαλμών $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Με μέθοδο οφθαλμών έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 (3 + j4 + 2 + j) - \dot{I}_2 (2 + j) &= 30 \angle 20^\circ \\ -\dot{I}_1 (2 + j) + \dot{I}_2 (3 + j2 - j6 + j + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{I}_1 = 4.667 \angle -20.175^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 1.790 \angle 37.354^\circ \text{ A}$$

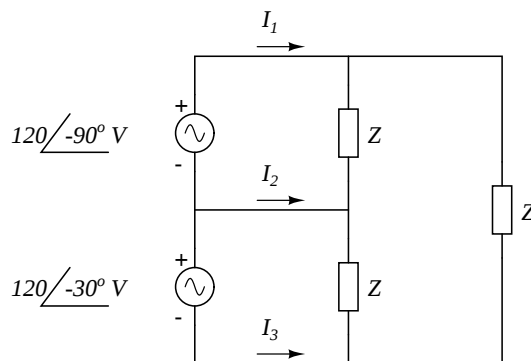
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_15
V1 1 0 ac 30 20
R1 1 2 3
L1 2 3 4
R2 3 4 2
L2 4 0 1
R3 3 5 3
L3 5 6 2
C1 6 0 0.16667
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency :      0.15915 Hz
I(R3):   mag:    1.78958 phase:      37.345      device_current
I(R1):   mag:    4.66626 phase:    -20.1629      device_current
```

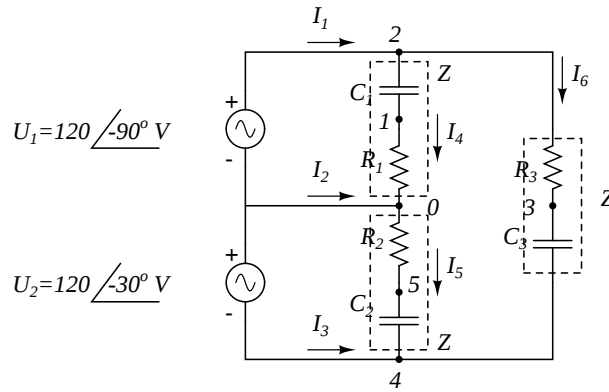
Άσκηση 3.17 Προσδιορίστε τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ στο παρακάτω κύκλωμα, όταν $Z = 80 - j35 \Omega$.



Λύση

Οι τάσεις $\dot{U}_1$, $\dot{U}_1$ και $\dot{U}_1 + \dot{U}_2$ εφαρμόζονται σε φορτία Z άρα

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_1}{Z} = 1.3742 \angle -66.3706^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_2}{Z} = 1.3742 \angle -6.3706^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_6 = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{Z} = 2.3802 \angle -36.3706^\circ \text{ A}$$



Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 3.6359 \angle -47.2640^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= -(\dot{I}_5 + \dot{I}_6) = 3.6359 \angle 154.5228^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_5 - \dot{I}_4 = 1.3742 \angle 53.6294^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_17
V1 2 0 ac 120 -90
R1 0 1 80
C1 1 2 0.028571
R2 0 5 80
C2 5 4 0.028571
V2 0 4 ac 120 -30
R3 2 3 80
C3 3 4 0.028571
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

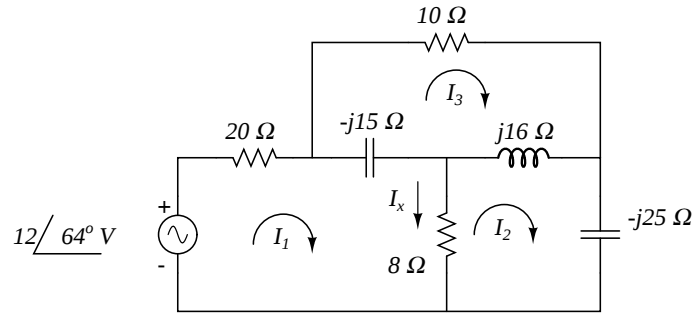
και μας δίνει

frequency:	0.15915	Hz	
I(R3):	mag:	2.38023	phase: -36.3697 device_current
I(R2):	mag:	1.37423	phase: -6.36965 device_current
I(R1):	mag:	1.37423	phase: 113.63 device_current
I(V2):	mag:	3.63586	phase: 154.524 device_current
I(V1):	mag:	3.63586	phase: 132.737 device_current

Εδώ χρειάζεται μια ερμηνεία των αποτελεσμάτων του LTSpice. Οι φορές ρεύματος του προγράμματος ακολουθούν τον θετικό και αρνητικό ακροδέκτη των εκάστοτε στοιχείων. Επίσης, αρνητικό πρόσημο σημαίνει πολ/σμό με $\angle 180^\circ$ ή $\angle -180^\circ$. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, τα αποτελέσματα του LTSpice είναι

$$\begin{aligned}I(R_3) &= 2.38023 \angle -36.3697^\circ = \dot{I}_6 \\ I(R_2) &= 1.37423 \angle -6.36965^\circ = \dot{I}_5 \\ I(R_1) &= 1.37423 \angle 113.63^\circ = -\dot{I}_4 \\ I(V_2) &= 3.63586 \angle 154.524^\circ = \dot{I}_3 \\ I(V_1) &= 3.63586 \angle 132.737^\circ = -\dot{I}_1\end{aligned}$$

Άσκηση 3.18 Να βρεθούν τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ και $\dot{I}_x$ στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Μέθοδος οφθαλμών.

$$\begin{aligned} (20 - j15 + 8)\dot{I}_1 - 8\dot{I}_2 + j15\dot{I}_3 &= 12 \angle 64^\circ \\ -8\dot{I}_1 + (8 + j16 - j25)\dot{I}_2 - j16\dot{I}_3 &= 0 \\ j15\dot{I}_1 - j16\dot{I}_2 + (10 - j15 + j16)\dot{I}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Από όπου

$$\dot{I}_1 = 0.381 \angle 109.604^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 0.344 \angle 124.407^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_3 = 0.145 \angle -60.417^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_x = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0.1005 \angle 48.50^\circ \text{ A}$$

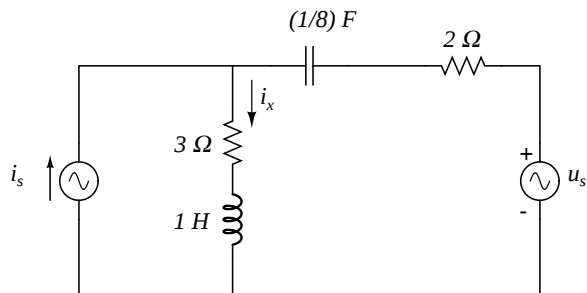
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3 18
V1 1 0 ac 12 64
R1 1 2 20
C1 2 3 0.066667
R2 2 4 10
R3 3 0 8
L1 3 4 16
C2 4 0 0.04
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

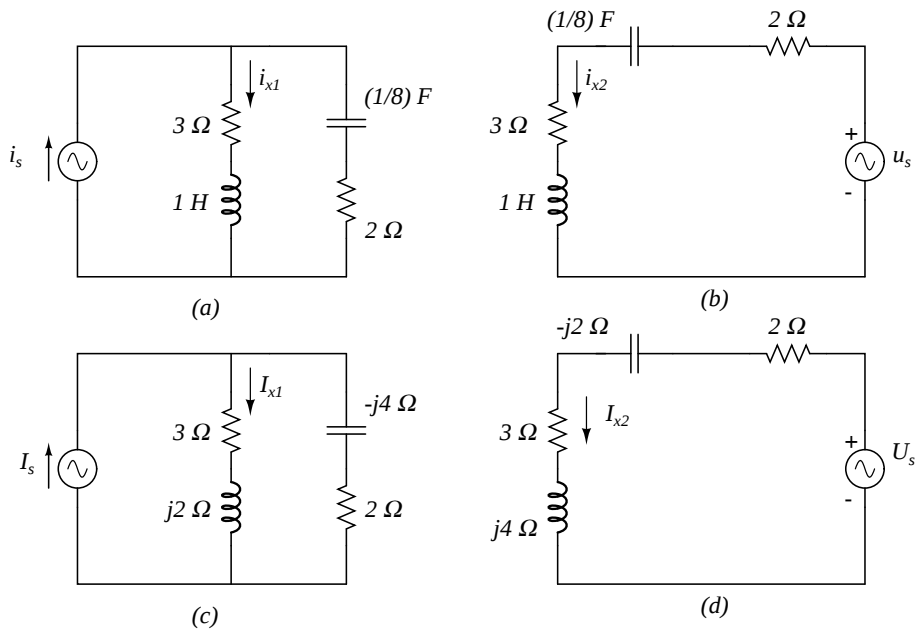
frequency:	0.15915	Hz		
I(C2):	mag:	0.344288	phase:	124.411 device_current
I(R3):	mag:	0.1005	phase:	48.4941 device_current
I(R2):	mag:	0.145467	phase:	-60.3987 device_current
I(R1):	mag:	0.381409	phase:	109.603 device_current

Άσκηση 3.20 Στο παρακάτω κύκλωμα $u_s = 12 \cos(4t - 30^\circ) \text{ V}$ και $i_s = 6 \sin(2t) \text{ A}$. Να βρεθεί το ρεύμα $i_x(t)$ με τη μέθοδο της υπερθέσεως.



Λύση

Με τη μέθοδο υπερθέσεως διακρίνουμε τα κυκλώματα (α), (β). Παρατηρούμε ότι u_s και i_s έχουν διαφορετική συχνότητα. Άρα τα αντίστοιχα κυκλώματα με φάσσορες είναι τα (c), (d).



Από το (c), με διαιρέτη ρεύματος, έχουμε

$$\dot{I}_{x1} = \frac{2 - j4}{2 - j4 + 3 + j2} \dot{I}_s = \frac{2 - j4}{5 - j2} \frac{6}{\sqrt{2}} = 3.523 \angle -41.633^\circ \text{ A} \Rightarrow i_{x1}(t) = 4.983 \sin(2t - 41.633^\circ) \text{ A}$$

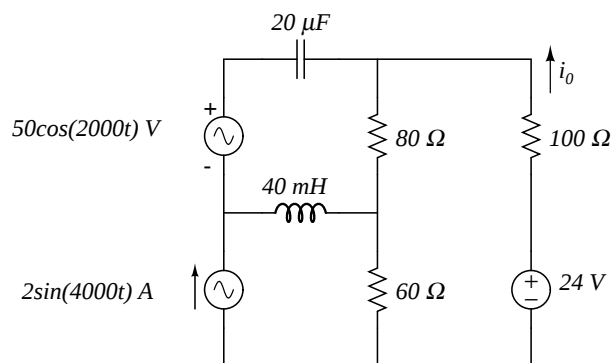
Από το (d), με κανόνα βρόγχων του Kirchhoff, έχουμε

$$\dot{I}_{x2} = \frac{\dot{U}_s}{2 - j2 + 3 + j4} = \frac{12 \angle -30^\circ}{\sqrt{2}(5 + j2)} = 1.576 \angle -51.801^\circ \text{ A} \Rightarrow i_{x2}(t) = 2.228 \cos(4t - 51.801^\circ) \text{ A}$$

Άρα, το τελικό αποτέλεσμα είναι

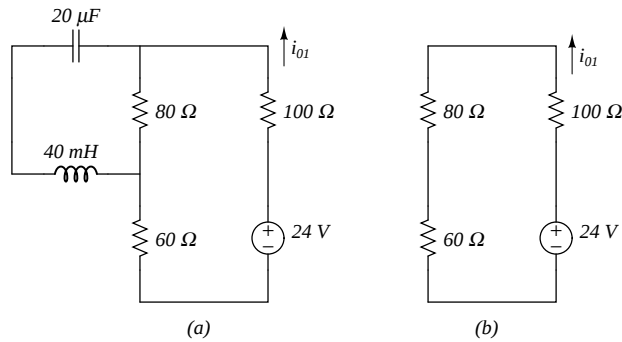
$$i_x(t) = i_{x1}(t) + i_{x2}(t) = 4.983 \sin(2t - 41.633^\circ) + 2.228 \cos(4t - 51.801^\circ) \text{ A}$$

Άσκηση 3.22 Να βρεθεί το ρεύμα $i_0(t)$ στο παρακάτω κύκλωμα με τη μέθοδο της υπερθέσεως.



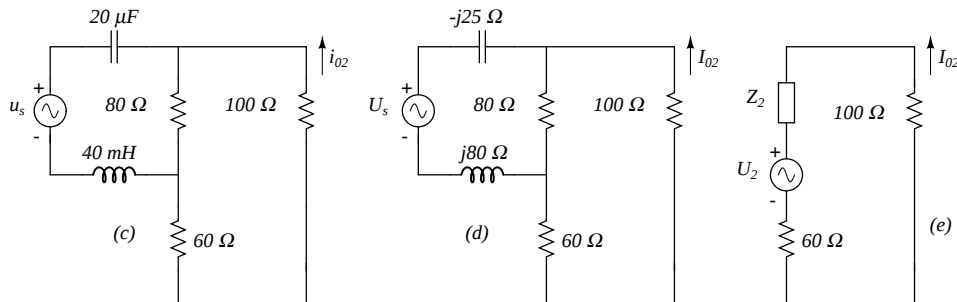
Λύση

Εξετάζουμε το κύκλωμα με μόνη τη dc πηγή τάσης. Ο πυκνωτής στο συνεχές δρα σαν διακόπτης και το πηνίο σαν βραχυκύκλωμα. Άρα ο αριστερός βρόγχος είναι και αυτός εκτός. Από το κύκλωμα (b) έχουμε



$$i_{01}(t) = \frac{24}{100 + 80 + 60} = 0.1 \text{ A}$$

Εξετάζουμε τώρα το κύκλωμα με μόνη την ac πηγή τάσης ενεργή (κύκλωμα (c)). Μετατροπή σε φάσορες οδηγεί στο (κύκλωμα (d)) με $\dot{U}_s = (50/\sqrt{2}) \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ και αναφορά το $\cos$. Μετατρέπουμε την πηγή τάσης σε ρεύματος, $\dot{I}_1 = \dot{U}_s / (j80 - j25) = 0.6428 \angle -90^\circ \text{ A}$ με παράλληλη εμπέδηση $Z_1 = j80 - j25 = j55 \Omega$. Έχουμε $Z_2 = Z_1 \parallel 80 = 45.322 \angle 55.491^\circ \Omega$ και μετασχηματίζουμε την πηγή ρεύματος πίσω σε πηγή τάσης $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \cdot Z_2 = 29.134 \angle -34.509^\circ \text{ V}$ καταλήγοντας στο κύκλωμα ενός βρόγχου (e).



Από αυτό και τον κανόνα βρόγχων του Kirchhoff,

$$\dot{I}_{02} = -\frac{\dot{U}_2}{Z_2 + 100 + 60} = 0.1538 \angle 134.119^\circ \Rightarrow i_{02}(t) = 0.2175 \cos(2000t + 134.119^\circ) \text{ A}$$

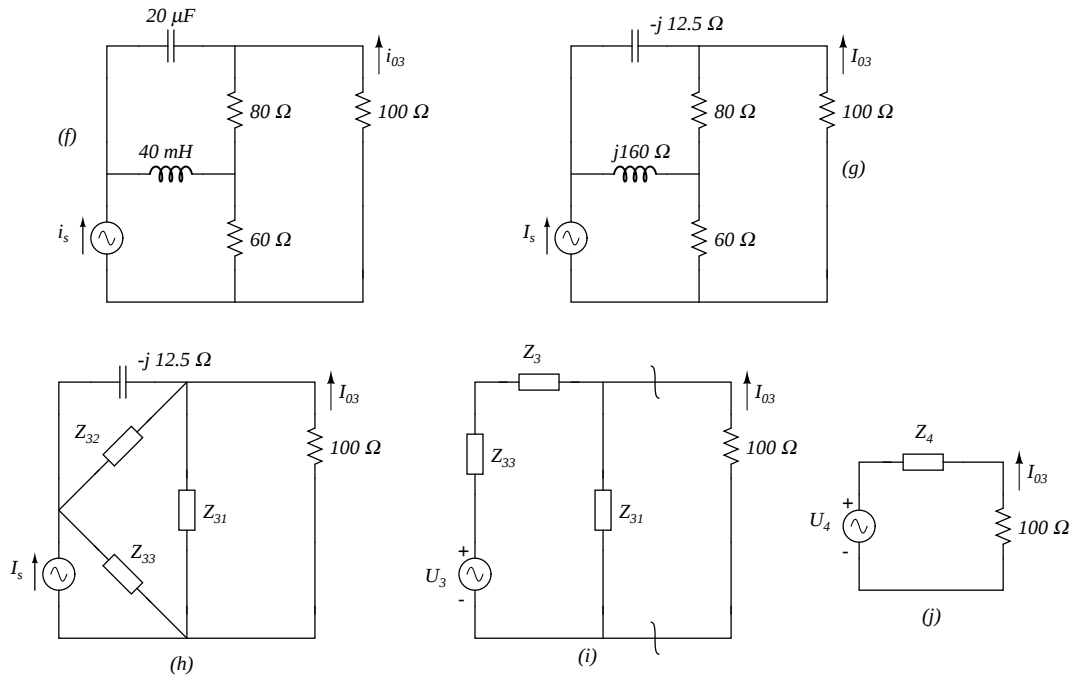
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ είναι

```
3.22b
Vs 1 0 ac 50 0
C1 1 2 20u
L1 0 4 40m
R3 2 4 80
R1 3 2 100
R2 4 3 60
.ac lin 1 318.31 318.31
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      318.31   Hz
I(R1):   mag:    0.217544  phase:    134.119      device_current
```

Στην τελευταία περίπτωση (κύκλωμα (f)) διατηρούμε μόνο την πηγή ρεύματος ενεργή. Μετατρέποντας σε φάσορες έχουμε το κύκλωμα (g) με $\dot{I}_s = (2/\sqrt{2}) \angle 0^\circ \text{ A}$ και $\omega = 4000 \text{ rad/s}$.



Μπορούμε να το λύσουμε με μέθοδο κόμβων (σύστημα 3ης τάξης - δοκιμάστε το) αλλά χρησιμοποιούμε μετατροπή αστέρα σε τρίγωνο όπου (κύκλωμα (h))

$$Z_{31} = \frac{80 \cdot 60 + 60 \cdot j160 + j160 \cdot 80}{j160} = 143.178 \angle -12.095^\circ \Omega$$

$$Z_{32} = \frac{80 \cdot 60 + 60 \cdot j160 + j160 \cdot 80}{60} = 381.809 \angle 77.905^\circ \Omega$$

$$Z_{33} = \frac{80 \cdot 60 + 60 \cdot j160 + j160 \cdot 80}{80} = 286.356 \angle 77.905^\circ \Omega$$

Συνεχίζοντας, (κύκλωμα (i))

$$Z_3 = Z_{32} \parallel (-j12.5) = 12.913 \angle -89.594^\circ \Omega \quad \text{και} \quad \dot{U}_3 = \dot{I}_s \cdot Z_{33} = 404.97 \angle 77.905^\circ \text{ V}$$

Με θεώρημα Thevenin μεταφερόμαστε τελικά στο (j) όπου

$$\dot{U}_4 = \frac{Z_{31}}{Z_3 + Z_{33} + Z_{31}} \dot{U}_3 = 186.9 \angle 15.973^\circ \text{ V}$$

$$Z_4 = (Z_3 + Z_{33}) \parallel Z_{31} = 126.345 \angle 15.388^\circ \Omega$$

και

$$\dot{I}_{03} = -\frac{\dot{U}_4}{Z_4 + 100} = 0.833 \angle -172.622^\circ \Rightarrow i_{03}(t) = 1.178 \sin(4000t - 172.622^\circ) \text{ A}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 4000 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_22c
Is 0 1 ac 2 0
C1 1 3 20u
L1 1 2 40m
R3 3 2 80
R2 2 0 60
R1 0 3 100
.ac lin 1 636.62 636.62
.print ac
.end
```

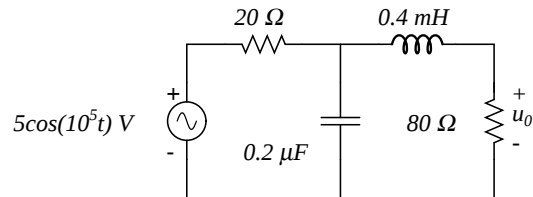
και μας δίνει

```
frequency:      636.62  Hz
I(R1):  mag:    1.17821  phase:    -172.622      device_current
```

Οπότε τελικά

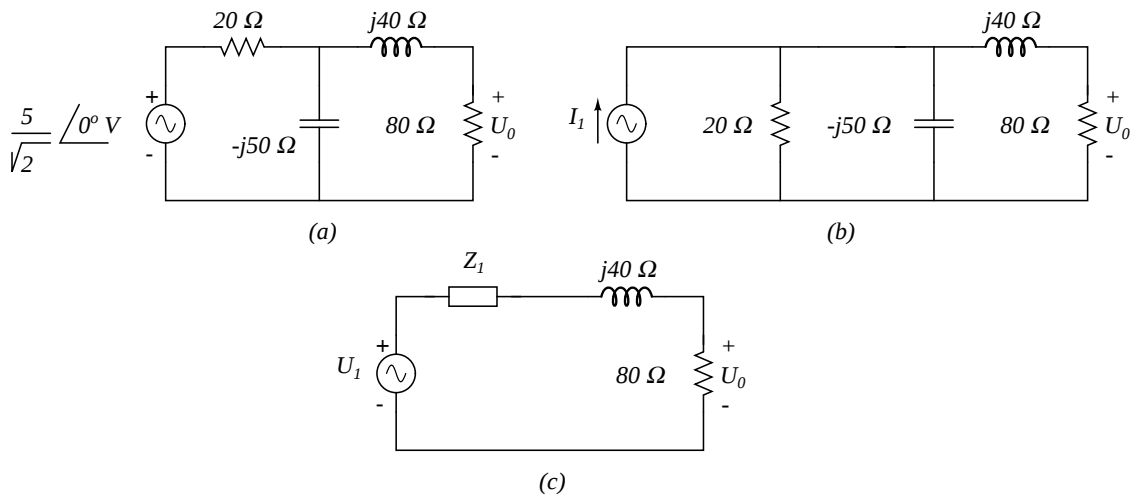
$$i_3(t) = 0.1 + 0.2175 \cos(2000t + 134.119^\circ) + 1.178 \sin(4000t - 172.622^\circ) \text{ A}$$

Άσκηση 3.24 Με μετασχηματισμούς πηγών προσδιορίστε την τάση u_0 στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Έχουμε $\dot{U}_s = (5/\sqrt{2}) \angle 0^\circ \text{ V}$ και $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$. Μετατρέποντας σε φάσορες έχουμε το κύκλωμα (a).



Στα (b), (c) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{U}_s / 20 = 0.1768 \angle 0^\circ \text{ A} \\ Z_1 &= 20 \parallel (-j50) = 18.57 \angle -21.801^\circ \Omega \\ \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 \cdot Z_1 = 3.283 \angle -21.801^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_0 = \frac{80}{80 + j40 + Z_1} \dot{U}_1 = 2.556 \angle -40.601^\circ \text{ V}$$

$$u_0(t) = 3.615 \cos(10^5 t - 40.601^\circ) \text{ V}$$

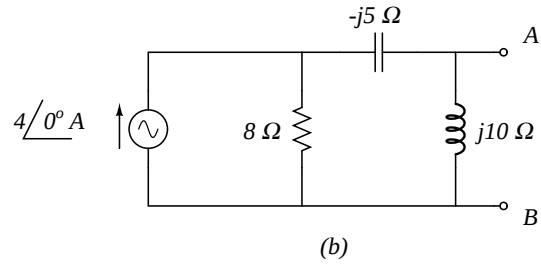
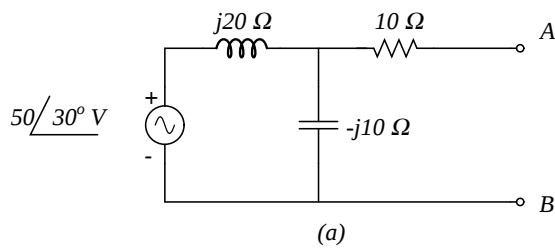
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_24
Vs 1 0 ac 5 0
R1 1 2 20
C1 2 0 0.2u
L1 2 3 0.4m
R2 3 0 80
.ac lin 1 15915.49431 15915.49431
.print ac Vm(3) Vp(3)
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      15915.5 Hz
V(3):   mag:    3.61547 phase:   -40.6011      voltage
```

Άσκηση 3.26 Να βρεθούν τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton ως προς τους ακροδέκτες A, B για κάθε ένα από τα παρακάτω κυκλώματα.

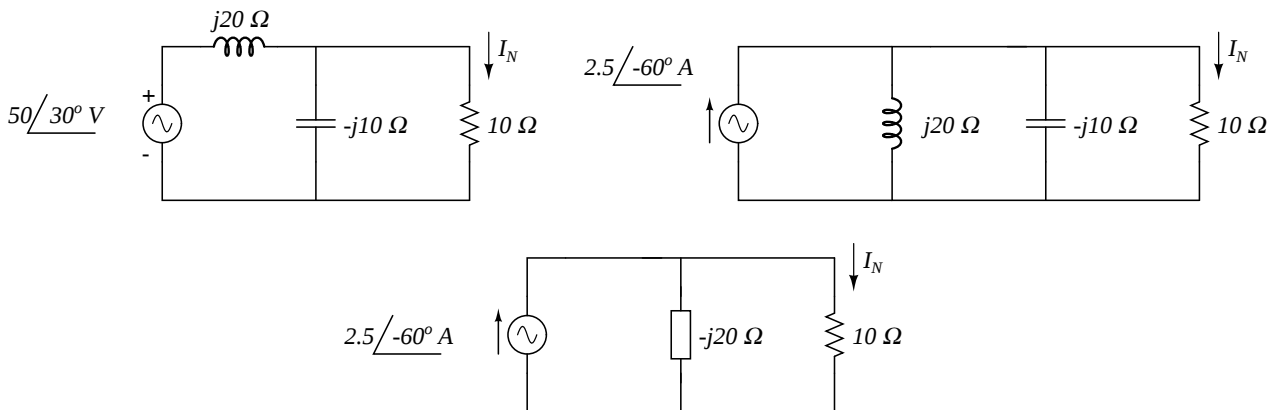


Λύση

Ισοδύναμο Thevenin για το κύκλωμα (α). Εφόσον οι ακροδέκτες A,B είναι ανοικτοί, η τάση $\dot{U}_{AB|oc}$ είναι ίση με την τάση στα άκρα του πυκνωτή.

$$\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AB|oc} = \frac{-j10}{j20 - j10} 50 \angle 30^\circ = 50 \angle -150^\circ \text{ V} \quad \text{και} \quad Z_{TH} = [j20 \parallel (-j10)] + 10 = 10 - j20 = 22.361 \angle -63.435^\circ \Omega$$

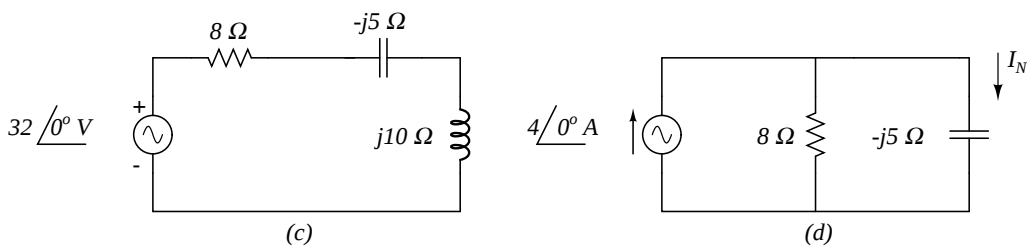
Ισοδύναμο Norton για το κύκλωμα (α). $Z_N = Z_{TH}$ όπως παραπάνω. Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως των A,B είναι το ρεύμα που περνάει από την αντίσταση $R = 10 \Omega$.



Με μετασχηματισμό πηγής και διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I}_N = \frac{-j20}{10 - j20} 2.5 \angle -60^\circ = 2.236 \angle -86.565^\circ \text{ A}$$

Ισοδύναμο Thevenin για το κύκλωμα (β). Με μετασχηματισμό της πηγής ρεύματος έχουμε το (c). Οπότε

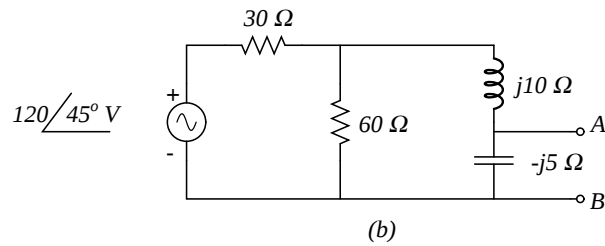
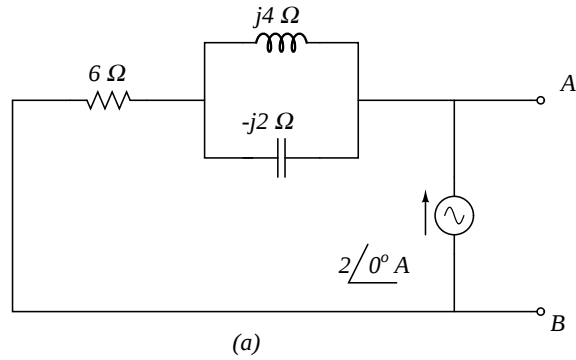


$$\dot{U}_{TH} = \frac{j10}{j10 + 8 - j5} 32 \angle 0^\circ = 33.92 \angle 57.995^\circ \text{ V} \quad \text{και} \quad Z_{TH} = [8 - j5] \parallel (j10) = 10 \angle 25.989^\circ \Omega$$

Ισοδύναμο Norton για το κύκλωμα (β). $Z_N = Z_{TH}$ όπως παραπάνω. Το ρεύμα βραχυκυκλώσεως των A,B είναι το ρεύμα που περνάει από τον πυκνωτή (κύκλωμα (d)). Με διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I}_N = \frac{8}{8 - j5} 4 \angle 0^\circ = 3.392 \angle 32.005^\circ \text{ A}$$

Άσκηση 3.27 Να βρεθούν τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton ως προς τους ακροδέκτες A, B για κάθε ένα από τα παρακάτω κυκλώματα.



Λύση

Ισοδύναμο Thevenin για το κύκλωμα (a). Έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{U}_{TH} &= \dot{U}_{AB|oc} = (2 \angle 0^\circ) \left[(j4 \parallel (-j2)) + 6 \right] = 2 \cdot (6 - j4) = 12 - j8 = 14.422 \angle -33.69^\circ \text{ V} \\ Z_{TH} &= \left[(j4 \parallel (-j2)) + 6 \right] = 6 - j4 = 7.211 \angle -33.69^\circ \Omega\end{aligned}$$

Ισοδύναμο Norton για το κύκλωμα (a). $Z_N = Z_{TH}$ όπως προηγουμένως. Για το ρεύμα βραχυκυκλώσεως $\dot{I}_N$, εφόσον βραχυκυκλώνουμε τα A,B, το ρεύμα της πηγής ρεύματος θα περάσει όλο από το βραχυκύκλωμα. Άρα

$$\dot{I}_N = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για το ισοδύναμο Thevenin είναι

```
3_27a
Is 0 1 ac 2 0
L1 1 2 4
C1 1 2 0.5
R1 2 0 6
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.15915 Hz
V(1):   mag:    14.4243  phase:   -33.6881      voltage
```

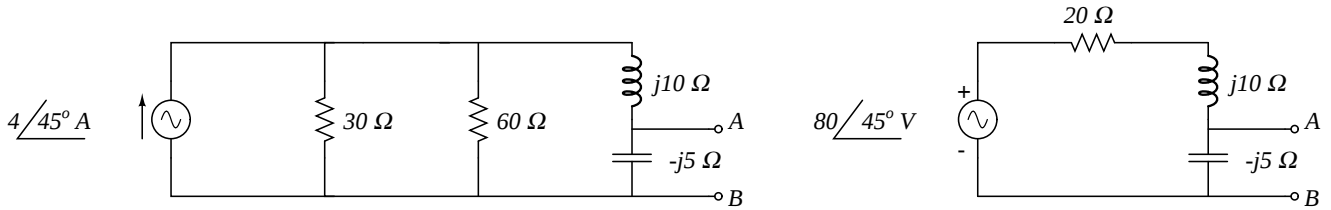
Για το ισοδύναμο Norton θεωρούμε ότι τα A,B ενώνονται με μια πολύ μικρή αντίσταση $R_2 = 0.1 \text{ p}\Omega$ και

```
3_27a2
Is 0 1 ac 2 0
L1 1 2 4
C1 1 2 0.5
R1 2 0 6
R2 1 0 0.1p
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

frequency : 0.15915 Hz
 I(R2): mag: 2 phase: -4.40651e-013 device_current

Για το κύκλωμα (b), κάνουμε δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς πηγών και έχουμε κύκλωμα ενός βρόγχου.



Για το ισοδύναμο Thevenin, με ένα διαρέτη τάσης

$$\dot{U}_{TH} = \frac{-j5}{20 + j10 - j5} 80 \angle 45^\circ = 19.403 \angle -59.036^\circ \text{ V}$$

και

$$Z_{TH} = (-j5) \parallel (20 + j10) = 5.423 \angle -77.471^\circ \Omega$$

Για το ισοδύναμο Norton, ο πυκνωτής βραχυκυκλώνεται και βγαίνει εκτός, και

$$\dot{I}_N = \frac{80 \angle 45^\circ}{20 + j10} = 3.578 \angle 18.435^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad Z_N = Z_{TH}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για το ισοδύναμο Thevenin είναι

```
3_27b
Vs 1 0 ac 120 45
R1 1 2 30
R2 2 0 60
L1 2 3 10
C1 3 0 0.2
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

frequency : 0.15915 Hz
 V(3): mag: 19.4026 phase: -59.0343 voltage

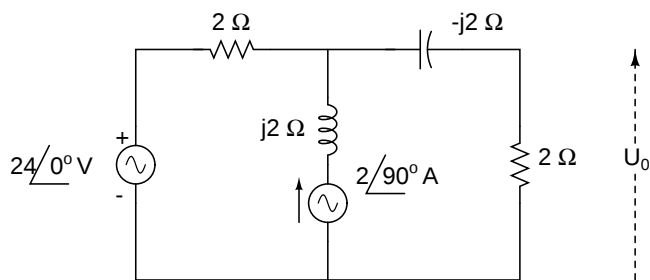
Για το ισοδύναμο Norton θεωρούμε ότι τα A,B ενώνονται, ο πυκνωτής βραχυκυκλώνεται και βγαίνει εκτός, και $\dot{I}_N$ είναι το ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο.

```
3_27b2
Vs 1 0 ac 120 45
R1 1 2 30
R2 2 0 60
L1 2 0 10
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

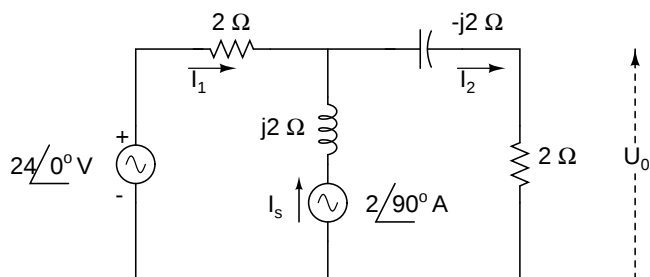
frequency : 0.15915 Hz
 I(L1): mag: 3.57759 phase: 18.4368 device_current

Άσκηση 3.31 Να βρεθεί η τάση $\dot{U}_0$ στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Χαρακτηρίζουμε τα ρεύματα στους κλάδους και έχουμε το παρακάτω κύκλωμα.



Με κανόνες Kirchhoff έχουμε

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_2 - I_s \\ 2I_1 + I_2(2 - j2) &= \dot{U}_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_2 = \frac{\dot{U}_s + 2\dot{I}_s}{4 - j2} = \frac{24 \angle 0^\circ + 2 \cdot 2 \angle 90^\circ}{4 - j2} = 5.441 \angle 36.027^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{U}_0 = 2\dot{I}_2 = 10.881 \angle 36.027^\circ \text{ V}$$

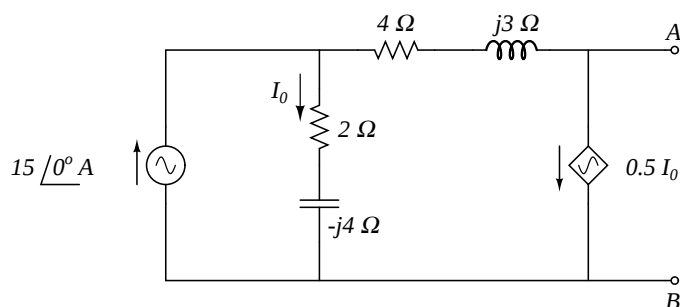
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_31
Vs 1 0 ac 24 0
R1 1 2 2
L1 2 3 2
Is 0 3 ac 2 90
C1 2 4 0.5
R2 4 0 2
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

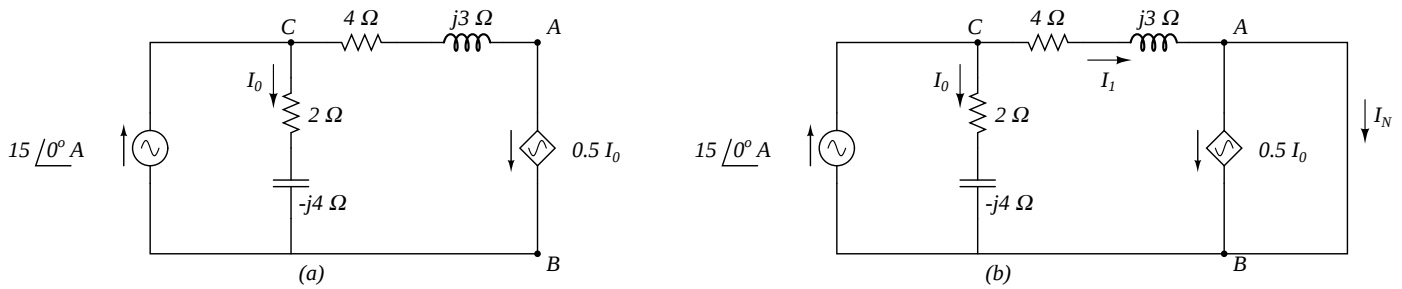
```
frequency:      0.15915 Hz
V(4):   mag:    10.8811 phase:    36.0281      voltage
```

Άσκηση 3.34 Να βρεθεί το ισοδύναμο κατά Thevenin ως προς τους ακροδέκτες A, B στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Το κύκλωμα περιέχει εξαρτημένη πηγή άρα χρειάζεται να βρούμε την τάση με ανοικτούς ακροδέκτες $\dot{U}_{AB|oc}$ (τάση Thevenin) και το ρεύμα βραχυκυκλώσεως $\dot{I}_{AB|sc}$ (ρεύμα Norton).



Στο κύκλωμα (a) βλέπουμε στον κόμβο C ότι

$$15 \angle 0^\circ = \dot{I}_0 + 0.5\dot{I}_0 \Rightarrow \dot{I}_0 = \frac{15}{1.5} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Οπότε η τάση Thevenin είναι

$$0.5\dot{I}_0(4 + j3) + \dot{U}_{AB|oc} - \dot{I}_0(2 - j4) = 0 \Rightarrow \dot{U}_{AB|oc} = \dot{I}_0(2 - j4 - 2 - j1.5) = -j55 = 55 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Για το ρεύμα Norton έχουμε το κύκλωμα (b). Δεν βγάζουμε εκτός την πηγή. Με κανόνες Kirchhoff έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_s &= \dot{I}_0 + \dot{I}_1 \\ \dot{I}_1 &= 0.5\dot{I}_0 + \dot{I}_{AB|sc} \\ \dot{I}_1(4 + j3) &= \dot{I}_0(2 - j4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{I}_{AB|sc} &= \dot{I}_1 - 0.5\dot{I}_0 = 13.563 \angle -80.538^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_0 &= \frac{4 + j3}{2 - j4} \dot{I}_1 = 1 \angle 46.332^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Οπότε

$$Z_{TH} = \frac{\dot{U}_{AB|oc}}{\dot{I}_{AB|sc}} = 4.055 \angle -9.462^\circ \Omega$$

Τελικά, $\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AB|oc} = 55 \angle -90^\circ \text{ V}$ και $Z_{TH} = 4.055 \angle -9.462^\circ \Omega$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για την τάση Thevenin είναι

```
3_34
I1 0 3 ac 15 0
R1 3 4 2
C1 4 5 0.25
Vd 5 0 ac 0 0
R2 3 2 4
L1 2 1 3
F1 1 0 Vd 0.5
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

V(1): mag: 55.0008 phase: -90.0052 voltage

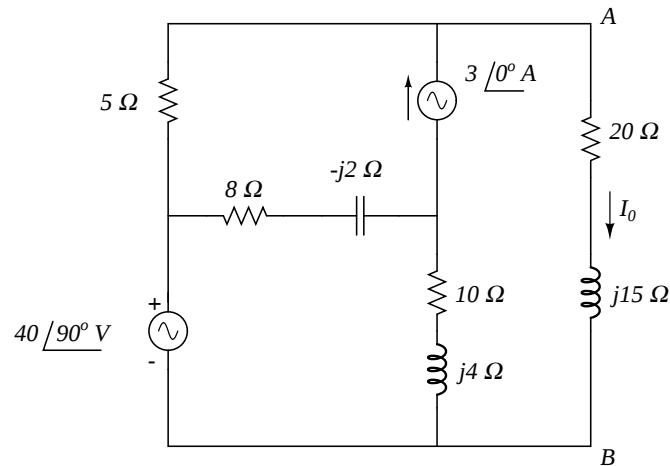
Για το ρεύμα Norton προσθέτουμε απλώς την εντολή

```
R3 1 0 0.01p
```

μετά την F1 (πολύ μικρή αντίσταση, άρα βραχυκύκλωμα) και μας δίνει

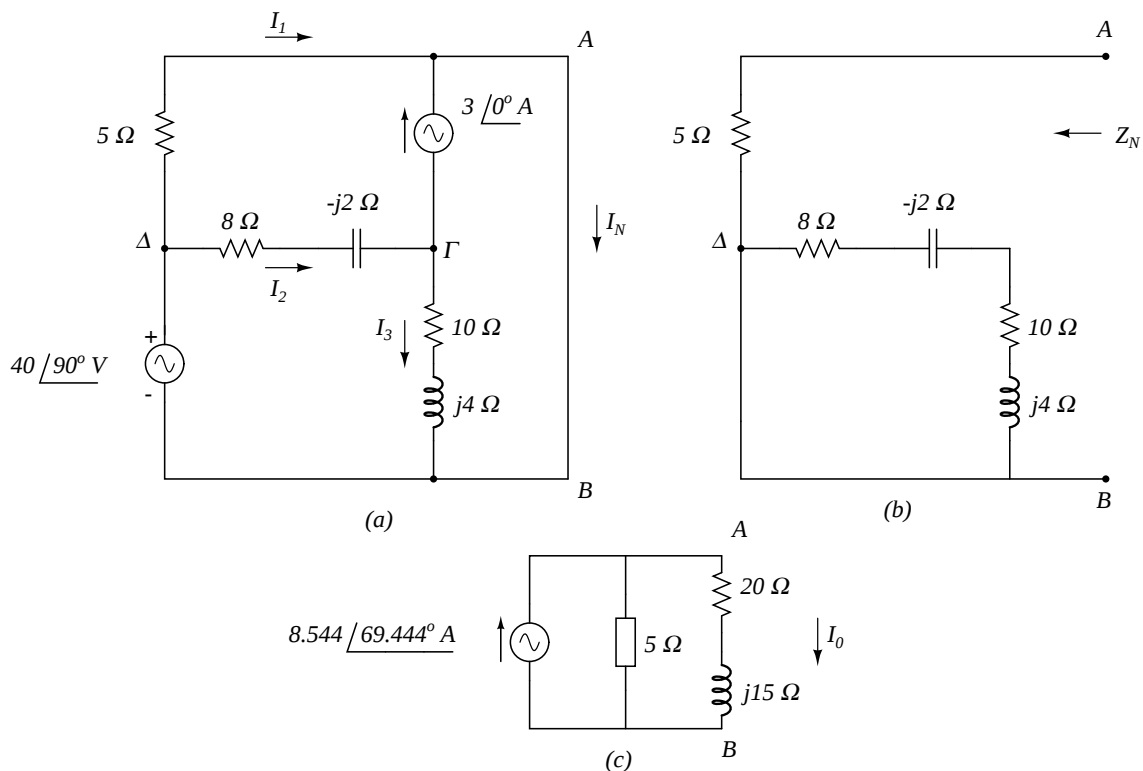
I(R3): mag: 13.5608 phase: -80.5424 device_current

Άσκηση 3.36 Να βρεθεί το ρεύμα $\dot{I}_0$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Norton.



Λύση

Αφαιρούμε το φορτίο στον δεξιό κλάδο και βραχυκυκλώνουμε τα A,B (κύκλωμα (a)).



Στον κόμβο A έχουμε

$$\dot{I}_1 + 3 \angle 0^\circ = \dot{I}_N$$

Εάν πάρουμε τον εξωτερικό βρόγχο, έχουμε

$$5\dot{I}_1 = 40 \angle 90^\circ \Rightarrow \dot{I}_1 = 8 \angle 90^\circ \text{ A}$$

Επομένως

$$\dot{I}_N = 8 \angle 90^\circ + 3 \angle 0^\circ = 3 + j8 = 8.544 \angle 69.444^\circ \text{ A}$$

Για το Z_N (κύκλωμα (b)), η εμπέδηση που φαίνεται από τα A,B ανοικτά, με βραχυκυκλωμένη την πηγή τάσης και ανοικτό κύκλωμα την πηγή ρεύματος είναι απλώς $Z_N = 5 \Omega$. Επαναφέρουμε το φορτίο στο ισοδύναμο Norton και έχουμε με διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I}_0 = \frac{5}{5 + 20 + j15} (3 + j8) = 1.465 \angle 38.480^\circ \text{ A}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```

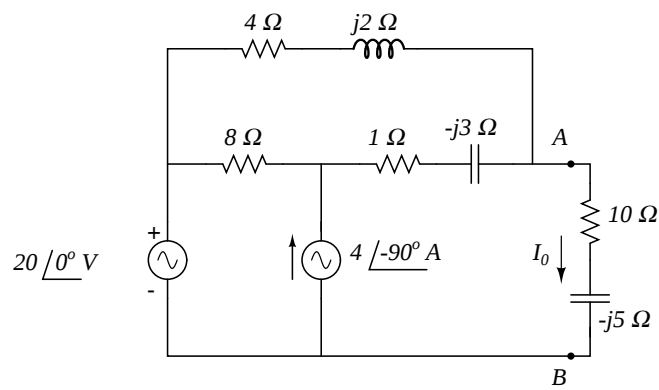
3_36
V1 5 0 ac 40 90
R1 5 1 5
R2 5 4 8
C1 4 2 0.5
I1 2 1 ac 3 0
R3 2 3 10
L1 3 0 4
R4 1 6 20
L2 6 0 15
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end

```

και μας δίνει

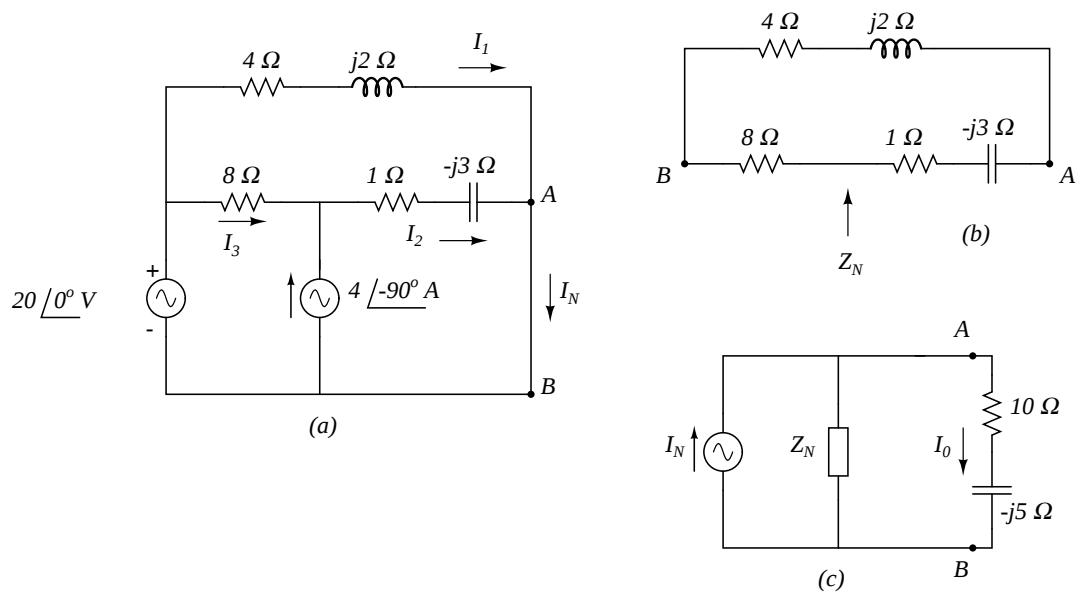
I(R4): mag: 1.46525 phase: 38.482 device_current

Άσκηση 3.37 Να βρεθεί το ρεύμα $\dot{I}_0$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Norton.



Λύση

Αφαιρούμε το φορτίο στον δεξιό κλάδο και βραχυκυκλώνουμε τα A,B (κύκλωμα (a)).



Από κανόνες του Kirchhoff έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1(4 + j2) &= 20 \\ 8\dot{I}_3 + \dot{I}_2(1 - j3) &= 20 \\ \dot{I}_3 - j4 &= \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= \dot{I}_N \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 4 - j2 \\ (8 + 1 - j3)\dot{I}_3 &= 20 + j4(1 - j3) \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_3 - j4 \\ \dot{I}_N &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 4.472 \angle -26.565^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= 3.399 \angle 25.56^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= 3.978 \angle -39.56^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_N &= 8.396 \angle -32.681^\circ \text{ A} \end{aligned} \right\}$$

Για το Z_N έχουμε το κύκλωμα (b).

$$Z_N = (4 + j2) \parallel (8 + 1 - j3) = 3.254 \angle 12.529^\circ \Omega$$

Άρα, από το κύκλωμα (c)

$$\dot{I}_0 = \frac{Z_N}{Z_N + 10 - j5} \dot{I}_N = 1.971 \angle -2.101^\circ \text{ A}$$

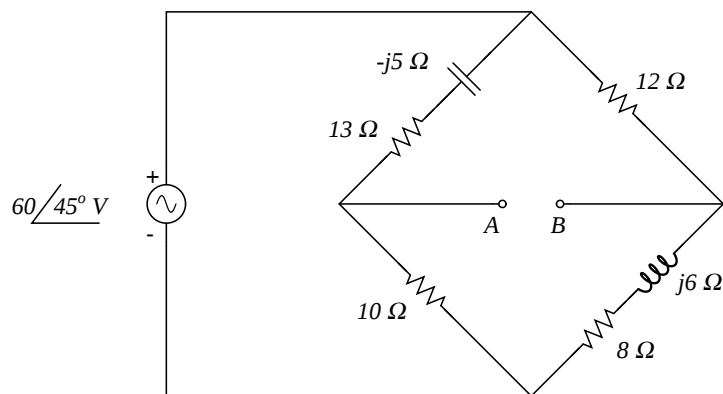
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
3_37
V1 3 0 ac 20 0
I1 0 2 ac 4 -90
R1 3 2 8
R2 2 5 1
C1 5 1 0.33333333
R3 3 4 4
L1 4 1 2
R4 1 6 10
C2 6 0 0.2
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

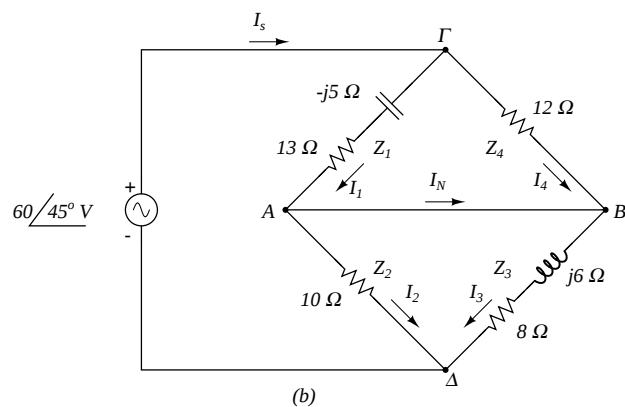
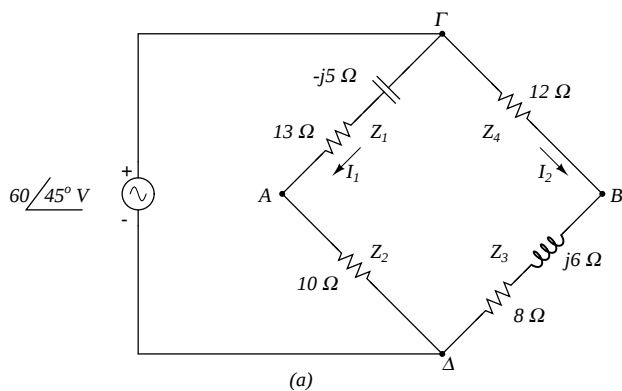
και μας δίνει

```
frequency:      0.15915 Hz
I(R4):  mag:    1.97125 phase:  -2.10378      device_current
```

Άσκηση 3.41 Να βρεθούν τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton ως προς τους ακροδέκτες A, B για το παρακάτω κύκλωμα.



Λύση



Για το ισοδύναμο Thevenin (κύκλωμα (a)) έχουμε

$$\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AB|oc} = \dot{U}_{A\Delta} + \dot{U}_{\Delta B} = \dot{I}_1 \cdot Z_2 - \dot{I}_2 \cdot Z_3 = \frac{\dot{U}_{\Gamma\Delta}}{Z_1 + Z_2} \cdot Z_2 - \frac{\dot{U}_{\Gamma\Delta}}{Z_3 + Z_4} \cdot Z_3 = 4.944 \angle -69.659^\circ \text{ V}$$

$$Z_{TH} = (Z_1 \parallel Z_2) + (Z_3 \parallel Z_4) = 5.918 \angle -8.773^\circ + 5.747 \angle 20.171^\circ = 11.294 \angle 5.483^\circ \Omega$$

Το ισοδύναμο Norton είτε μέσω του Thevenin

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{TH}}{Z_{TH}} = 0.438 \angle -75.142^\circ \text{ A}$$

είτε απευθείας (κύκλωμα (b))

$$\dot{I}_N = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{\Gamma A}}{Z_1} - \frac{\dot{U}_{A\Delta}}{Z_2}$$

$$\dot{U}_{\Gamma A} = \frac{Z_1 \parallel Z_4}{(Z_1 \parallel Z_4) + (Z_2 \parallel Z_3)} 60 \angle 45^\circ = 34.278 \angle 32.48^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{A\Delta} = \frac{Z_2 \parallel Z_3}{(Z_1 \parallel Z_4) + (Z_2 \parallel Z_3)} 60 \angle 45^\circ = 27.558 \angle 60.643^\circ \text{ V}$$

άρα

$$\dot{I}_N = 2.461 \angle 53.518^\circ - 2.756 \angle 60.643^\circ = 0.438 \angle -75.142^\circ \text{ A} \quad \text{και} \quad Z_N = Z_{TH}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για την τάση Thevenin είναι

```
3_41
Vs 2 3 ac 60 45
C1 2 4 0.2
R1 4 1 13
R2 1 3 10
R4 2 0 12
L1 0 5 6
R3 5 3 8
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.15915 Hz
V(1):   mag:      4.9433 phase:   -69.6792      voltage
```

Για το ρεύμα Norton προσθέτουμε απλώς την εντολή

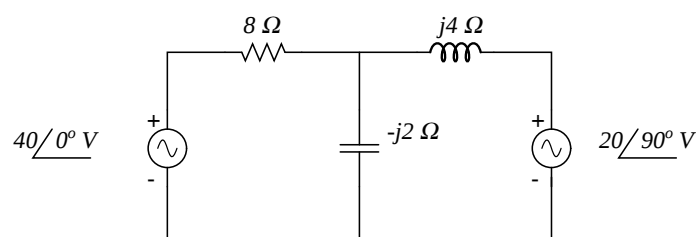
```
R0 1 0 0.001p
```

μετά την R3 (πολύ μικρή αντίσταση, άρα βραχυκύκλωμα) και μας δίνει

```
frequency:      0.15915 Hz
I(R0):   mag:      0.437662 phase:   -75.1604      device_current
```

4 Κεφάλαιο

Άσκηση 4.1 Υπολογίστε τη μέση ισχύ που παράγεται ή καταναλώνεται από κάθε στοιχείο του παρακάτω κυκλώματος.



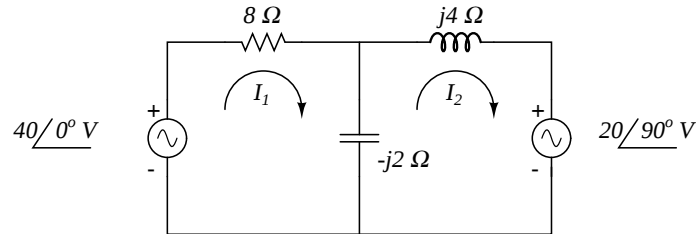
Λύση

Με μέθοδο οφθαλμών έχουμε

$$\left. \begin{aligned} (8 - j2)\dot{I}_1 - (-j2)\dot{I}_2 &= 40 \angle 0^\circ \\ -(-j2)\dot{I}_1 + (j4 - j2)\dot{I}_2 &= -20 \angle 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 3 + j4 = 5 \angle 53.1301^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= -13 - j4 = 13.6015 \angle -162.8973^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

και το ρεύμα που περνάει από τον πυκνωτή

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 16 + j8 = 17.889 \angle 26.565^\circ \text{ A}$$



Με τον ορισμό μέσης ή πραγματικής ισχύος $P = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_u - \phi_i)$ παρατηρούμε ότι

- Η πηγή τάσης $\dot{U}_1 = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$ παράγει μέση ισχύ $|\dot{U}_1| \cdot |\dot{I}_1| \cos(-53.1301) = 40 \cdot 5 \cos(-53.1301) = 120 \text{ W}$
- Η πηγή τάσης $\dot{U}_2 = 20 \angle 90^\circ \text{ V}$ καταναλώνει (ρεύμα εισέρχεται απο θετικό ακροδέκτη) μέση ισχύ $|\dot{U}_2| \cdot |\dot{I}_2| \cos(90^\circ + 162.8973^\circ) = 272.03 \cos(252.9^\circ) = -80 \text{ W}$ (πρόσημο - σημαίνει ότι παράγει)
- Η ωμική αντίσταση 8Ω καταναλώνει μέση ισχύ $|\dot{I}_1|^2 \cdot 8 = 25 \cdot 8 \cos(0^\circ) = 200 \text{ W}$
- Η επαγωγική αντίσταση $j4 \Omega$ καταναλώνει μέση ισχύ $|\dot{I}_2 \cdot (j4)| \cdot |\dot{I}_2| \cos(\phi_u - \phi_i) = |54.406 \angle -72.897^\circ| \cdot |13.6015 \angle -162.8973^\circ| \cos(-72.897^\circ + 162.8973^\circ) = -0.0038746 = 0 \text{ W}$
- Η χωρητική αντίσταση $-j2 \Omega$ καταναλώνει μέση ισχύ $|(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)(-j2)| \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2| \cos(\phi_u - \phi_i) = |35.777 \angle -63.435^\circ| \cdot |17.889 \angle 26.565^\circ| \cos(-63.435^\circ - 26.565^\circ) = 3.919 \times 10^{-14} = 0 \text{ W}$

Εναλλακτικά, με μιγαδική ισχύ όπου $P = \Re\{\dot{S}\} = \Re\{\dot{U}\dot{I}^*\}$

$$\begin{aligned} P_{\dot{U}_1} &= \Re\{\dot{U}_1 \dot{I}_1^*\} = \Re\{120 - j160\} = 120 \text{ W} \\ P_{\dot{U}_2} &= \Re\{\dot{U}_2 \dot{I}_2^*\} = \Re\{-80 - j260\} = -80 \text{ W} \\ P_R &= \Re\{\dot{I}_1 \cdot 8 \cdot \dot{I}_1^*\} = \Re\{|\dot{I}_1|^2 \cdot 8\} = 200 \text{ W} \\ P_L &= \Re\{\dot{I}_2 \cdot (j4) \cdot \dot{I}_2^*\} = \Re\{|\dot{I}_2|^2 \cdot (j4)\} = 0 \text{ W} \\ P_C &= \Re\{\dot{I}_3 \cdot (-j2) \cdot \dot{I}_3^*\} = \Re\{|\dot{I}_3|^2 \cdot (-j2)\} = 0 \text{ W} \end{aligned}$$

και όση ισχύς παράγεται, τόση καταναλώνεται.

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση των ρευμάτων, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
4_1
V1 1 0 ac 40 0
R1 1 2 8
C1 2 0 0.5
L1 2 3 4
V2 3 0 ac 20 90
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

frequency :	0.15915	Hz		
I(R1):	mag:	4.99853	phase:	53.1379 device_current
I(L1):	mag:	13.6013	phase:	-162.87 device_current
I(C1):	mag:	17.8878	phase:	26.5858 device_current

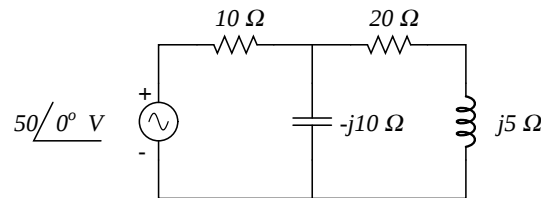
Άσκηση 4.7 Να βρεθεί η τιμή της παράλληλης χωρητικότητας που είναι αναγκαία για να διορθωθεί σε κάποιο φορτίο ο ΣΙ από την τιμή 0.85 σε υστέρηση, σε μονάδα. Το φορτίο καταναλώνει άεργο ισχύ 140 kVAR από πηγή 110 Vrms, σε συχνότητα 60 Hz.

Λύση

ΣΙ σε υστέρηση σημαίνει ότι το φορτίο είναι επαγωγικό. Καινούργιος ΣΙ=1 σημαίνει ότι η παράλληλη χωρητικότητα καταναλώνει άεργο ισχύ ίση και αντίθετη με το φορτίο. Άρα

$$Q_C = \frac{U^2}{1/(\omega C)} = \omega C U^2 = Q_L \Rightarrow C = \frac{Q_L}{\omega U^2} = \frac{140 \times 10^3}{2\pi 60 \cdot 110^2} = 30.691 \text{ mF}$$

Άσκηση 4.11 Να βρεθεί η μέση ισχύς που καταναλώνεται από κάθε στοιχείο του παρακάτω κυκλώματος.



Λύση

Ορίζουμε $Z_1 = 10 \Omega$, $Z_2 = -j10 \Omega$, $Z_3 = 20 + j5 \Omega$. Η ολική εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι

$$Z_o = Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 = 14.706 - j8.8235 = 17.15 \angle -30.964^\circ \Omega$$

Αν το ολικό ρεύμα είναι $\dot{I}_1$ και $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ είναι τα ρεύματα που διέρχονται από τις Z_2 , Z_3 αντίστοιχα, τότε

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_o} = \frac{50 \angle 0^\circ}{17.15 \angle -30.964^\circ} = 2.915 \angle 30.964^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \dot{I}_1 = 2.915 \angle 59.036^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_3 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \dot{I}_1 = 1.414 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Με τον ορισμό της μέσης ή πραγματικής ισχύος από τη μιγαδική, έχουμε

$$\begin{aligned} P_U &= \Re\{\dot{U} \dot{I}_1^*\} = \Re\{125 - j75\} = 125 \text{ W} \\ P_{R_1} &= \Re\{\dot{I}_1 \cdot 10 \cdot \dot{I}_1^*\} = \Re\{|\dot{I}_1|^2 \cdot 10\} = 85 \text{ W} \\ P_C &= \Re\{\dot{I}_2 \cdot (-j10) \cdot \dot{I}_2^*\} = \Re\{|\dot{I}_2|^2 \cdot (-j10)\} = 0 \text{ W} \\ P_{R_2} &= \Re\{\dot{I}_3 \cdot 20 \cdot \dot{I}_3^*\} = \Re\{|\dot{I}_3|^2 \cdot 20\} = 40 \text{ W} \\ P_L &= \Re\{\dot{I}_3 \cdot (j5) \cdot \dot{I}_3^*\} = \Re\{|\dot{I}_3|^2 \cdot (j5)\} = 0 \text{ W} \end{aligned}$$

Η ολική ισχύς που παράγεται είναι 125 W και η ολική ισχύς που καταναλώνεται είναι $85 + 40 = 125 \text{ W}$ (διατήρηση ισχύος).

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο ορισμός της μέσης ή πραγματικής ισχύος από τη σχέση $P = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_u - \phi_i)$ (δοκιμάστε το).

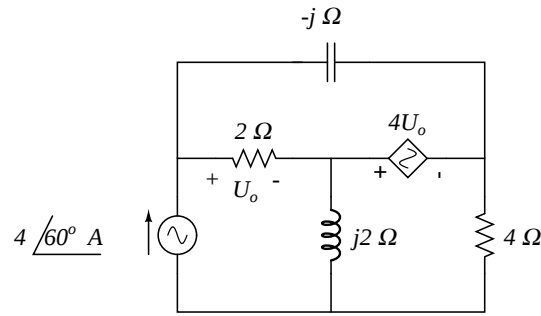
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση των ρευμάτων, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
4_11
V1 1 0 ac 50 0
R1 1 2 10
C1 2 0 0.1
R2 2 3 20
L1 3 0 5
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

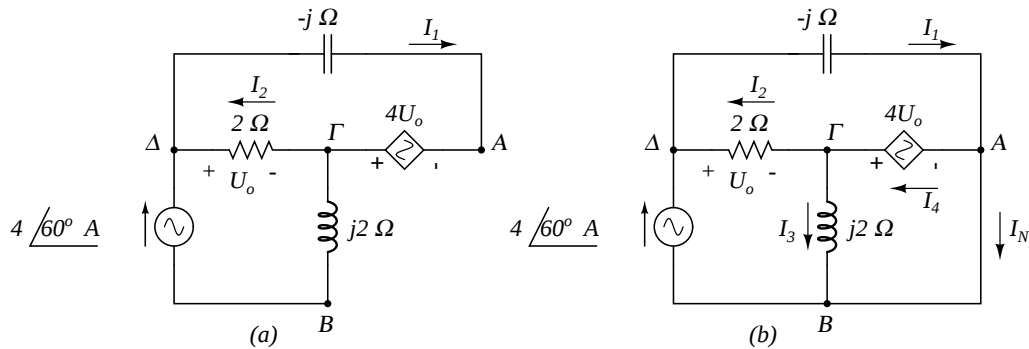
και μας δίνει

frequency :	0.15915	Hz		
I(C1):	mag:	2.91543	phase:	59.0364 device_current
I(R2):	mag:	1.41417	phase:	-44.9988 device_current
I(R1):	mag:	2.91545	phase:	30.9644 device_current

Άσκηση 4.12 Υπολογίστε τη μέση ισχύ που καταναλώνεται στον αντιστάτη $4\ \Omega$.



Λύση



Αφαιρούμε τον αντιστάτη $4\ \Omega$ και προσπαθούμε να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin. Εφόσον έχουμε εξαρτημένη πηγή χρειαζόμαστε την τάση με ανοικτούς ακροδέκτες A, B, $\dot{U}_{AB|oc} = \dot{U}_{TH}$ καθώς και το ρεύμα βραχυκυκλώσεως $\dot{I}_{AB|sc} = \dot{I}_N$. Με ανοικτούς ακροδέκτες A, B έχουμε το κύκλωμα (a). Με κανόνες Kirchhoff έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + 4\angle 60^\circ \\ (-j)\dot{I}_1 - 4\dot{U}_0 - \dot{U}_0 &= 0 \\ \dot{U}_0 &= -2\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 10\dot{I}_2 &= (j)\dot{I}_2 + (j)4\angle 60^\circ \\ j\dot{I}_1 &= 10\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{4\angle 150^\circ}{10 - j} = 0.398\angle 155.711^\circ\text{ A}$$

και

$$\dot{U}_{AB|oc} = \dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AG} + \dot{U}_{GB} = -4\dot{U}_0 + (j2)4\angle 60^\circ = 8\dot{I}_2 + 8\angle 150^\circ = 11.173\angle 151.625^\circ\text{ V}$$

Για το ρεύμα βραχυκυκλώσεως έχουμε το κύκλωμα (b). Με κανόνες Kirchhoff

$$\left. \begin{aligned} (-j)\dot{I}_1 - (j2)\dot{I}_3 - \dot{U}_0 &= 0 \\ \dot{I}_3 + \dot{I}_N &= 4\angle 60^\circ \\ 4\angle 60^\circ + \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 \\ (-j)\dot{I}_1 - 4\dot{U}_0 - \dot{U}_0 &= 0 \\ \dot{U}_0 &= -2\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (-j)\dot{I}_1 - (j2)\dot{I}_3 + 2\dot{I}_2 &= 0 \\ \dot{I}_3 + \dot{I}_N &= 4\angle 60^\circ \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 &= 4\angle 60^\circ \\ j\dot{I}_1 - 10\dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{I}_3 &= 1.592\angle -114.289^\circ\text{ A} \\ \dot{I}_N &= 5.586\angle 61.625^\circ\text{ A} \\ \dot{I}_1 &= 3.980\angle 65.711^\circ\text{ A} \\ \dot{I}_2 &= 0.398\angle 155.711^\circ\text{ A} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\dot{U}_{TH} = 11.173\angle 151.625^\circ\text{ V} \quad \text{και} \quad Z_{TH} = \frac{\dot{U}_{TH}}{\dot{I}_N} = 2\angle 90^\circ\ \Omega$$

Από το ισοδύναμο Thevenin το ρεύμα που διέρχεται από τον αντιστάτη $R = 4\ \Omega$ είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{TH}}{Z_{TH} + R} = 2.498\angle 125.06^\circ\text{ A}$$

και η μέση ή πραγματική ισχύς που καταναλώνεται σε αυτόν είναι

$$P = \Re\{\dot{I} \cdot R \cdot \dot{I}^*\} = \Re\{|\dot{I}|^2 R\} = 24.966\text{ W}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1\text{ rad/s}$ είναι

```

4.12
Is 0 3 ac 4 60
R1 3 2 2
C1 3 1 1
L1 2 0 2
E1 2 1 3 2 4
R 1 0 4
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end

```

και μας δίνει

```

frequency:      0.15915 Hz
I(R):   mag:    2.49777 phase:    125.046      device_current

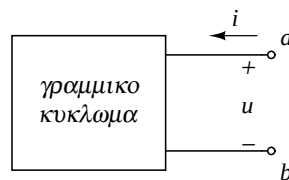
```

Εναλλακτικά, χωρίς θεώρημα Thevenin, θα μπορούσε κανείς να δουλέψει με κανόνες Kirchhoff όπως στο κύκλωμα (b) για να βρει κατευθείαν το ρεύμα που διέρχεται από τον ζητούμενο αντιστάτη και μετά την μέση ισχύ (δοκιμάστε το).

Άσκηση 4.14 Στο παρακάτω κύκλωμα υποθέστε ότι η εμπέδηση εισόδου είναι

$$Z_{ab} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \angle -\tan^{-1} \omega RC$$

Να βρεθεί η μέση ισχύ που καταναλώνεται από το κύκλωμα όταν $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 200 \text{ nF}$ και $i = 2 \sin(377t + 22^\circ) \text{ mA}$.

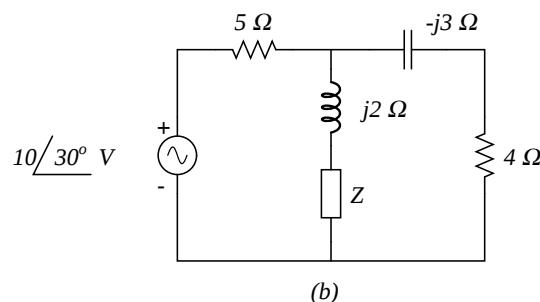
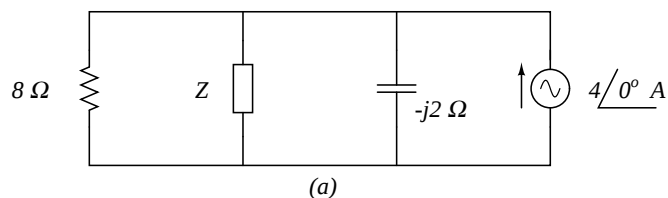


Λύση

Έχουμε $\dot{I} = (2/\sqrt{2}) \angle 22^\circ \text{ mA}$, $\omega = 377 \text{ rad/s}$ και $Z_{ab} = 7984.6 \angle -37.016^\circ \Omega$. Η μέση ή πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα είναι

$$\begin{aligned}
 P &= \Re\{(\dot{I} \cdot Z_{ab}) \cdot \dot{I}^*\} = \Re\{|\dot{I}|^2 Z_{ab}\} = \Re\left\{\frac{1}{2} \times 10^{-6} \cdot 7984.6 \angle -37.016^\circ\right\} = \\
 &= \Re\left\{\frac{1}{2} \times 10^{-6} \cdot (6375.5 - j4807.1)\right\} = 3.1877 \text{ mW}
 \end{aligned}$$

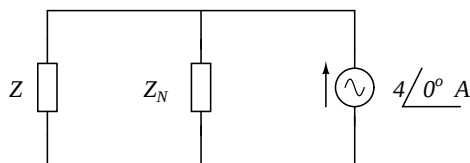
Άσκηση 4.15 Για κάθε ένα από τα παρακάτω κυκλώματα προσδιορίστε την τιμή της εμπέδησης Z για μέγιστη μεταφορά μέσης ισχύος καθώς και την μέγιστη ισχύ.



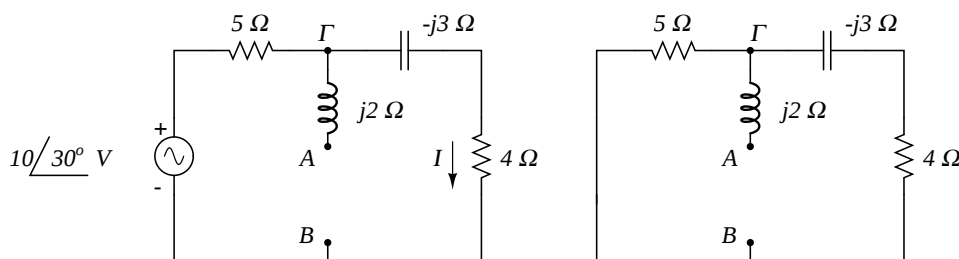
Λύση

Το κύκλωμα (a) εύκολα μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο Norton (κύκλωμα (c)) όπου $\dot{I}_N = 4 \angle 0^\circ$ A και $Z_N = 8 \parallel (-j2) = 0.47059 - j1.88235 = 1.940 \angle -75.964^\circ \Omega$. Το αντίστοιχο Thevenin έχει $\dot{U}_{TH} = \dot{I}_N Z_N = 7.761 \angle -75.964^\circ$ V και $Z_{TH} = Z_N$. Οπότε

$$Z = Z_{TH}^* = 1.940 \angle 75.964^\circ \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{U}_{TH}|^2}{4 \cdot \Re\{Z_{TH}\}} = \frac{60.235}{4 \cdot 0.47059} = 32 \text{ W}$$



(c)



(d)

(e)

Στο κύκλωμα (b) αφαιρούμε το φορτίο και έχουμε το κύκλωμα (d). Έχουμε $\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AB|oc} = \dot{U}_{AG} + \dot{U}_{GB} = 0 + \dot{U}_{GB}$. Από κανόνα βρόγχων του Kirchhoff

$$\dot{I}(5 + 4 - j3) = 10 \angle 30^\circ \Rightarrow \dot{I} = 1.054 \angle 48.435^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{GB} = \dot{I}(4 - j3) = 5.2705 \angle 11.565^\circ \text{ V}$$

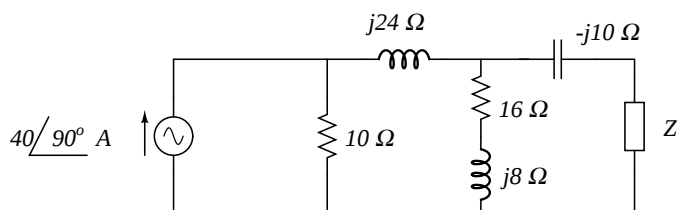
Για την Z_{TH} (κύκλωμα (e)) έχουμε

$$Z_{TH} = [5 \parallel (4 - j3)] + (j2) = 2.5 + j1.1667 = 2.759 \angle 25.017^\circ \Omega$$

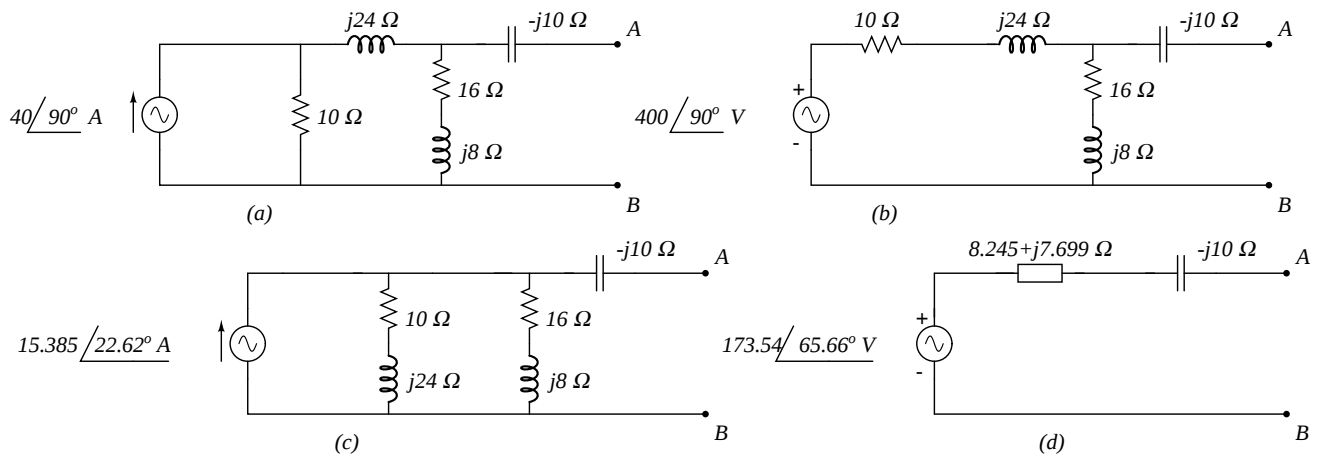
Άρα

$$Z = Z_{TH}^* = 2.759 \angle -25.017^\circ \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{U}_{TH}|^2}{4 \cdot \Re\{Z_{TH}\}} = \frac{27.778}{4 \cdot 2.5} = 2.7778 \text{ W}$$

Άσκηση 4.17 Στο παρακάτω κύκλωμα προσδιορίστε την τιμή της εμπέδησης Z για μέγιστη μεταφορά μέσης ισχύος καθώς και την μέγιστη ισχύ.



Λύση



Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς πηγών καταλήγουμε στο κύκλωμα (d) όπου $\dot{U}_{TH} = 173.544 \angle 65.659^\circ \text{ V}$ και $Z_{TH} = 8.245 - j2.301 = 8.560 \angle -15.595^\circ \Omega$. Οπότε

$$Z = Z_{TH}^* = 8.560 \angle 15.595^\circ \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{U}_{TH}|^2}{4 \cdot \Re\{Z_{TH}\}} = 913.24 \text{ W}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για την τάση Thevenin είναι

```
4_17
Is 0 4 ac 40 90
R1 4 0 10
L1 4 2 24
R2 2 3 16
L2 3 0 8
C1 2 1 0.1
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

V(1): mag: 173.55 phase: 65.6598 voltage

Για το ρεύμα Norton προσθέτουμε απλώς την εντολή

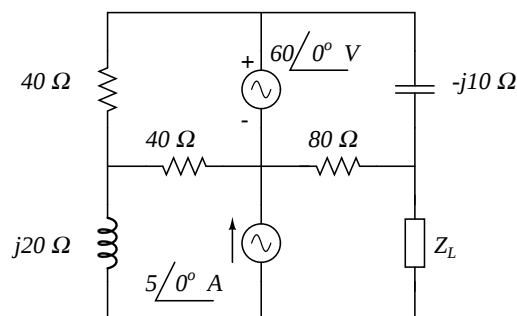
```
Rm 1 0 0.001p
```

μετά την C1 (πολύ μικρή αντίσταση, άρα βραχυκύκλωμα) και μας δίνει

I(Rm): mag: 20.2737 phase: 81.2566 device_current

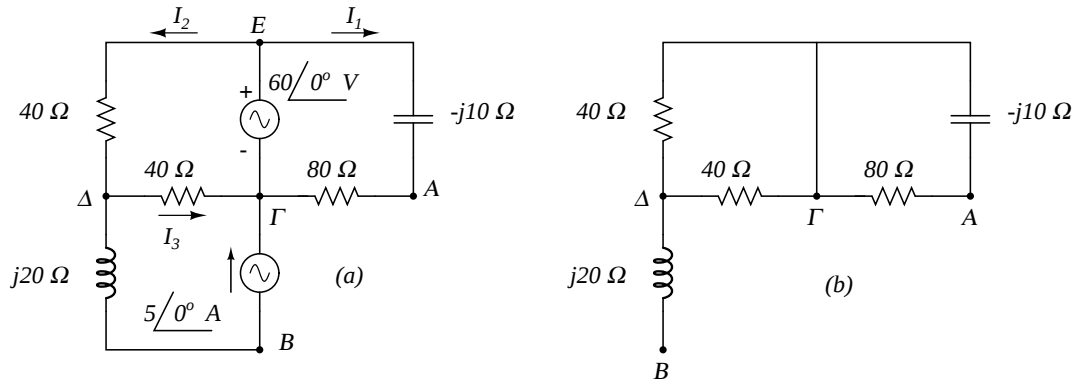
Επομένως $(173.55 \angle 65.6598^\circ) / (20.2737 \angle 81.2566^\circ) = 8.5604 \angle -15.5968^\circ$ και επιβεβαιώνεται και η Z_{TH} .

Άσκηση 4.21 Στο παρακάτω κύκλωμα προσδιορίστε την τιμή της εμπίδησης Z_L έτσι ώστε να φορτιστεί με τη μέγιστη πραγματική ισχύ καθώς και την μέγιστη αυτή ισχύ.



Λύση

Αφαιρούμε το φορτίο και έχουμε το κύκλωμα (a). Η τάση Thevenin είναι $\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AG} + \dot{U}_{\Gamma\Delta} + \dot{U}_{\Delta B}$. Με κανόνες Kirchhoff έχουμε



$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1(80 - j10) &= 60 \angle 0^\circ \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_3 + 5 \angle 0^\circ \\ 40\dot{I}_2 + 40\dot{I}_3 &= 60 \angle 0^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 0.744 \angle 7.125^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= 3.25 \angle 0^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= 1.75 \angle 180^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

και

$$\dot{U}_{TH} = \dot{U}_{AG} + \dot{U}_{\Gamma\Delta} + \dot{U}_{\Delta B} = 80\dot{I}_1 - 40\dot{I}_3 + 5(j20) = 167.906 \angle 39.759^\circ \text{ V}$$

Για την Z_{TH} από το κύκλωμα (b) έχουμε

$$Z_{TH} = [40 \parallel 40] + [80 \parallel (-j10)] + (j20) = 21.231 + j10.154 = 23.534 \angle 25.560^\circ \Omega$$

επομένως

$$Z_L = Z_{TH}^* = 23.534 \angle -25.560^\circ \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{U}_{TH}|^2}{4 \cdot \Re\{Z_{TH}\}} = 331.97 \text{ W}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για την τάση Thevenin είναι

```
4_21
Is 0 2 ac 5 0
Vs 4 2 ac 60 0
R1 1 2 80
C1 1 4 0.1
R2 4 3 40
R3 2 3 40
L1 3 0 20
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

V(1): mag: 167.908 phase: 39.7567 voltage

Για το ρεύμα Norton προσθέτουμε απλώς την εντολή

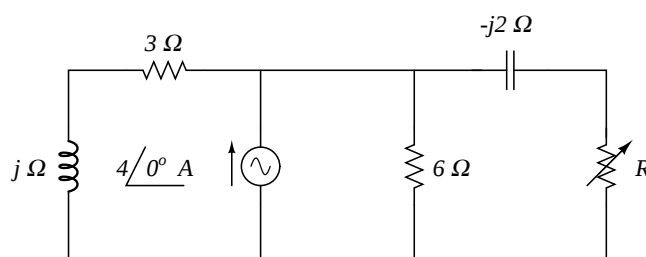
```
Rm 1 0 0.001p
```

μετά την L1 (πολύ μικρή αντίσταση, άρα βραχυκύκλωμα) και μας δίνει

I(Rm): mag: 7.13453 phase: 14.1999 device_current

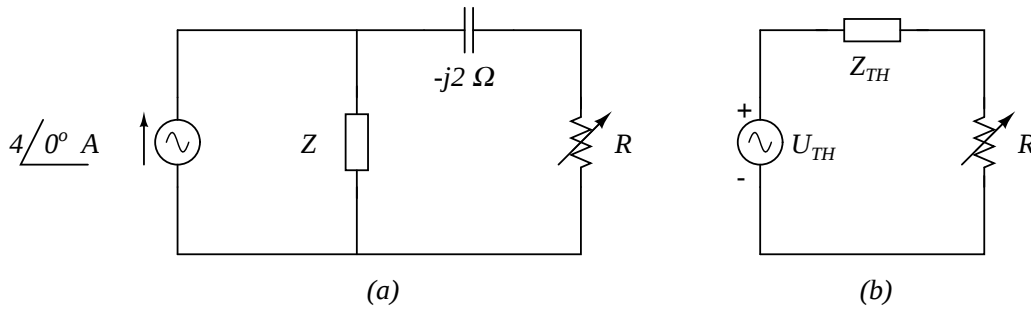
Επομένως $(167.908 \angle 39.7567^\circ) / (7.13453 \angle 14.1999^\circ) = 23.535 \angle 25.557^\circ$ και επιβεβαιώνεται και η Z_{TH} .

Άσκηση 4.22 Ποιά τιμή πρέπει να λάβει η μεταβλητή αντίσταση στο παρακάτω κύκλωμα έτσι ώστε να φορτιστεί με τη μέγιστη πραγματική ισχύ; Ποια είναι αυτή η ισχύς;



Λύση

Συνδυάζουμε τις εμπεδήσεις (κύκλωμα (a)) με $Z = 6 \parallel (3 + j) = 2.095 \angle 12.095^\circ \Omega$ και μετασχηματίζουμε την πηγή ρεύματος σε τάσης (κύκλωμα (b)) οπότε



$$\dot{U}_{TH} = (4 \angle 0^\circ) \cdot (2.095 \angle 12.095^\circ) = 8.381 \angle 12.095^\circ \text{ V} \quad \text{και} \quad Z_{TH} = Z - j2 = 2.049 - j1.561 = 2.576 \angle -37.304^\circ \Omega$$

Επομένως

$$R = |Z_{TH}| = 2.576 \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{U}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2 \cdot \Re\{Z_{TH}\}} = 7.5948 \text{ W}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ για την τάση Thevenin είναι

```
4_22
Is 0 1 ac 4 0
L1 0 2 1
R1 2 1 3
R2 1 0 6
C1 1 3 0.5
.ac lin 1 0.15959 0.15959
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
V(1):    mag:      8.38477  phase:    12.1195      voltage
```

Για το ρεύμα Norton προσθέτουμε απλώς την εντολή

```
Rm 3 0 0.001p
```

μετά την C1 (πολύ μικρή αντίσταση, άρα βραχυκύκλωμα) και μας δίνει

```
I(Rm):    mag:      3.25966  phase:    49.2985      device_current
```

Επομένως $(8.38477 \angle 12.1195^\circ) / (3.25966 \angle 49.2985^\circ) = 2.5723 \angle -37.1790^\circ$ και επιβεβαιώνεται και η Z_{TH} .

Άσκηση 4.33 Για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε την μιγαδική ισχύ, την μέση ισχύ και την άεργο ισχύ.

- $u(t) = 112 \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$, $i(t) = 4 \cos(\omega t - 50^\circ) \text{ A}$.
- $u(t) = 160 \cos(377t) \text{ V}$, $i(t) = 4 \cos(377t + 45^\circ) \text{ A}$.
- $\dot{U} = 80 \angle 60^\circ \text{ V}$, $Z = 50 \angle 30^\circ \Omega$.
- $\dot{I} = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$, $Z = 100 \angle 45^\circ \Omega$.

Λύση

- $u(t) = 112 \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$, $i(t) = 4 \cos(\omega t - 50^\circ) \text{ A}$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{112}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ \text{ V} \\ \dot{I} &= \frac{4}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{S} &= \dot{U} \cdot \dot{I}^* &= 112 + j193.99 \text{ VA} \\ P &= \Re\{\dot{S}\} &= 112 \text{ W} \\ Q &= \Im\{\dot{S}\} &= 193.99 \text{ VAR} \end{aligned}$$

2. $u(t) = 160 \cos(377t) \text{ V}$, $i(t) = 4 \cos(377t + 45^\circ) \text{ A}$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \frac{160}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ V} \\ \dot{I} &= \frac{4}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{S} &= \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 226.27 - j226.27 \text{ VA} \\ P &= \Re\{\dot{S}\} = 226.27 \text{ W} \\ Q &= \Im\{\dot{S}\} = -226.27 \text{ VAR} \end{aligned}$$

3. $\dot{U} = 80 \angle 60^\circ \text{ V}$, $Z = 50 \angle 30^\circ \Omega$.

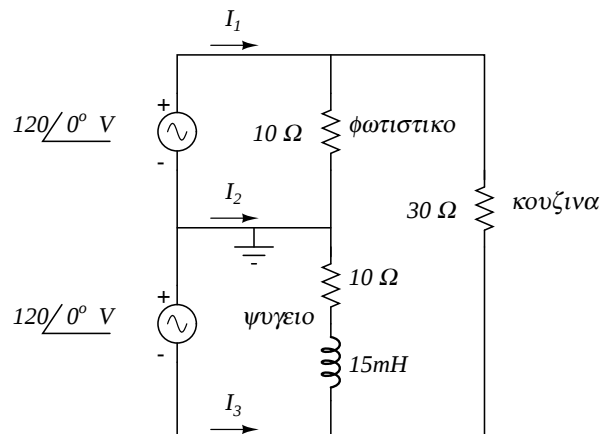
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{S} &= \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 110.85 + j64 \text{ VA} \\ P &= \Re\{\dot{S}\} = 110.85 \text{ W} \\ Q &= \Im\{\dot{S}\} = 64 \text{ VAR} \end{aligned}$$

4. $\dot{I} = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$, $Z = 100 \angle 45^\circ \Omega$.

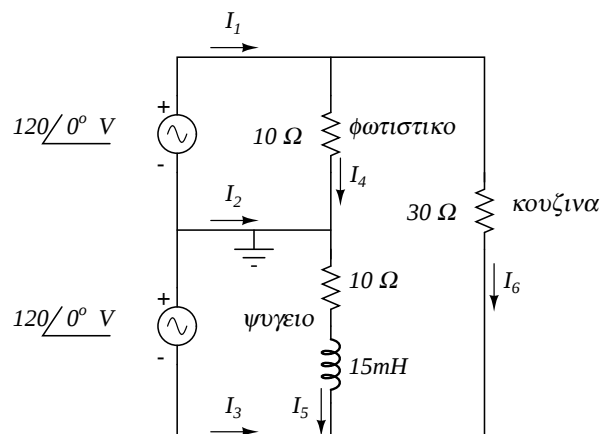
$$\dot{U} = \dot{I}Z \Rightarrow \begin{aligned} \dot{S} &= \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 7071.1 + j7071.1 \text{ VA} \\ P &= \Re\{\dot{S}\} = 7071.1 \text{ W} \\ Q &= \Im\{\dot{S}\} = 7071.1 \text{ VAR} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.41 Μια μονοφασική ηλεκτρική εγκατάσταση σε κατοικία επιτρέπει την ταυτόχρονη λειτουργία 120 V και 240 V, 60 Hz οικιακών συσκευών. Το κύκλωμα της ηλεκτρικής εγκατάστασης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υπολογίστε

- τα ρεύματα $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$.
- την ολική μιγαδική ισχύ που παρέχεται
- τον ολικό ΣΙ του κυκλώματος



Λύση



Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 2\pi 60 = 376.99 = 377 \text{ rad/s} \\ \dot{I}_4 &= \frac{120 \angle 0^\circ}{10} = 12 \angle 0^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_5 &= \frac{120 \angle 0^\circ}{10 + j5.655} = 10.445 \angle -29.488^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_6 &= \frac{240 \angle 0^\circ}{30} = 8 \angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 20 \angle 0^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_5 - \dot{I}_4 = 5.907 \angle -119.488^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= -(\dot{I}_5 + \dot{I}_6) = 17.849 \angle 163.258^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Οπότε η συνολική μιγαδική ισχύς στο ολικό φορτίο είναι

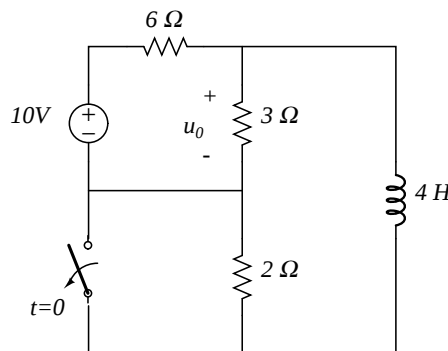
$$\dot{S} = 10|\dot{I}_4|^2 + 30|\dot{I}_6|^2 + (10 + j5.655)|\dot{I}_5|^2 = 4451.08 - j617.01 \text{ VA}$$

και

$$\Sigma I = \cos \left[\tan^{-1} \frac{Q}{P} \right] = \cos \left[\tan^{-1} \left(-\frac{617.01}{4451.08} \right) \right] = 0.99053$$

5 Κεφάλαιο

Άσκηση 5.4 Να βρεθεί η τάση $u_0(t)$ για $t > 0$ στο παρακάτω κύκλωμα.



Λύση

Καταρχήν υπολογίζουμε την αρχική συνθήκη $u_0(0)$. Για $t < 0$ έχουμε το κύκλωμα (a) που γίνεται (b) εφόσον το πηνίο στο συνεχές (υπό σταθερές συνθήκες) είναι βραχυκύκλωμα. Έχουμε $3 \parallel 2 = 1.2 \Omega$ και

$$u_0(0) = \frac{1.2}{1.2 + 6} 10 = \frac{5}{3} = 1.6667 \text{ V}$$

Όταν κλείσει ο διακόπτης την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε το κύκλωμα (c) που γίνεται (d). Επομένως, για $t > 0$, με κανόνες Kirchhoff

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ 6i_1 + 3i_2 &= 10 \\ L \frac{di_3}{dt} &= 3i_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 6(i_2 + i_3) + 3i_2 &= 9i_2 + 6i_3 = 10 \\ 4 \frac{di_3}{dt} &= 3 \left(\frac{10 - 6i_3}{9} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{2} i_3 = \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$i_3(t) = e^{-t/2} \left[C + \frac{5}{6} \int e^{t/2} dt \right] = e^{-t/2} \left[C + \frac{5}{3} e^{t/2} \right] = C e^{-t/2} + \frac{5}{3}$$

Η αρχική συνθήκη για το i_3 είναι

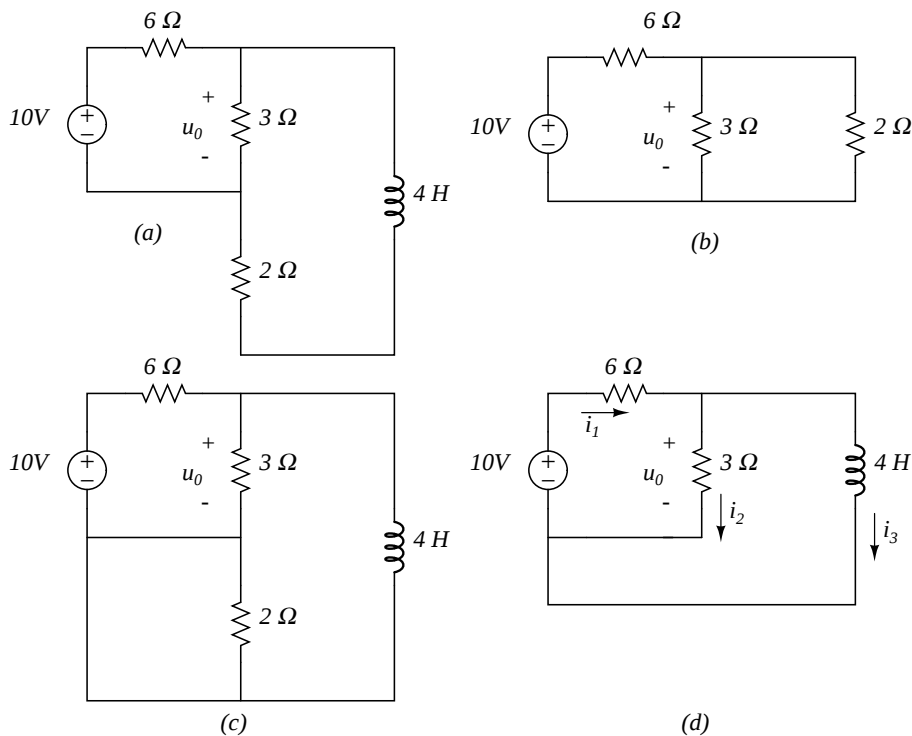
$$i_3(0) = \frac{u_0(0)}{2} = \frac{5}{6} = 0.83333 \text{ A}$$

οπότε

$$\frac{5}{6} = C + \frac{5}{3} \Rightarrow C = -\frac{5}{6} = -0.83333 \quad \text{και} \quad i_3(t) = C e^{-t/2} + \frac{5}{3} = \frac{5}{6} [2 - e^{-t/2}] \text{ A}$$

και

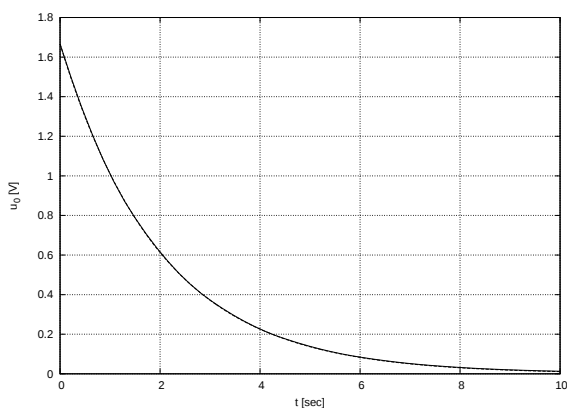
$$i_2(t) = \frac{10 - 6i_3}{9} = \frac{5}{9} e^{-t/2} \text{ A} \quad \text{και} \quad u_0(t) = 3i_2(t) = \frac{5}{3} e^{-t/2} \text{ V}$$



Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση με το LTSpice για την τάση $u_0(t)$ είναι

```
5_4b
Vs 1 0 pulse(0 10 0 1e-12 1e-12 10 20)
R1 1 2 6
R2 2 0 3
L1 2 0 4
.ic I(L1)=0.833333, V(2)=1.666666
.tran 10m 10
.print tran V(2)
.end
```

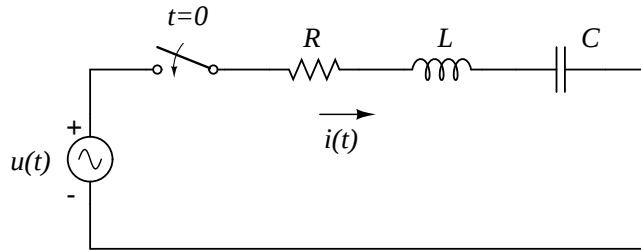
Οι αρχικές συνθήκες με την εντολή .ic είναι απαραίτητες για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα. Η παρακάτω γραφική συμπεριλαμβάνει το αποτέλεσμα του LTSpice και τη θεωρητική λύση που βρήκαμε εμείς, στην ίδια γραφική. Οι λύσεις συμπίπτουν.



Άσκηση 5.5 Σε κύκλωμα RLC εν σειρά με μηδενικές αρχικές συνθήκες φορτίου και ρεύματος, εφαρμόζεται την χρονική στιγμή $t = 0$ τάση $u = 220 \sin 2\pi 50t$ V. Να υπολογιστεί το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου όταν $L = 1$ H, $R = 3$ kΩ και $C = 4$ μF.

Λύση

Έχουμε το παρακάτω κύκλωμα.



Ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff για τον βρόγχο (αρχική τάση πυκνωτή $u_C(0) = 0$) είναι

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

Παραγωγίζοντας για να φύγει το ολοκλήρωμα

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \omega U_0 \cos(\omega t)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow m_1, m_2 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -85.786, -2914.2$$

άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$i_0(t) = Ae^{-85.786t} + Be^{-2914.2t}$$

Για την ολική λύση χρειαζόμαστε ακόμα να προσθέσουμε την επίδραση της εξωτερικής διέγερσης. Εφόσον είναι ημιτονική, δεχόμαστε μερική λύση της μορφής

$$i_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση και εξισώνοντας τους συντελεστές των $\cos \omega t$ και $\sin \omega t$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) c_1 + \omega R c_2 &= U_0 \omega \\ -\omega R c_1 + \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) c_2 &= 0 \end{aligned}$$

από όπου

$$c_1 = \frac{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) \omega U_0}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + (\omega R)^2} = 1.1477 \times 10^{-2}$$

και

$$c_2 = \frac{\omega^2 R U_0}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + (\omega R)^2} = 7.1491 \times 10^{-2}$$

Επομένως η ολική λύση είναι

$$i(t) = Ae^{-85.786t} + Be^{-2914.2t} + 1.1477 \times 10^{-2} \cos(314.16t) + 7.1491 \times 10^{-2} \sin(314.16t)$$

Έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλ. $i(t) = 0$, $di(t)/dt = 0$ για $t = 0$. Οπότε

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A + B + 1.1477 \times 10^{-2} \\ 0 &= -85.786A - 2914.2B + 314.16 \cdot 7.1491 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A + B &= -1.1477 \times 10^{-2} \\ 85.786A + 2914.2B &= 22.4595 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A &= -19.7658 \times 10^{-3} \\ B &= 8.2887 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

και τελικά

$$i(t) = -19.7658 \times 10^{-3} e^{-85.786t} + 8.2887 \times 10^{-3} e^{-2914.2t} + 1.1477 \times 10^{-2} \cos(314.16t) + 7.1491 \times 10^{-2} \sin(314.16t) \text{ A}$$

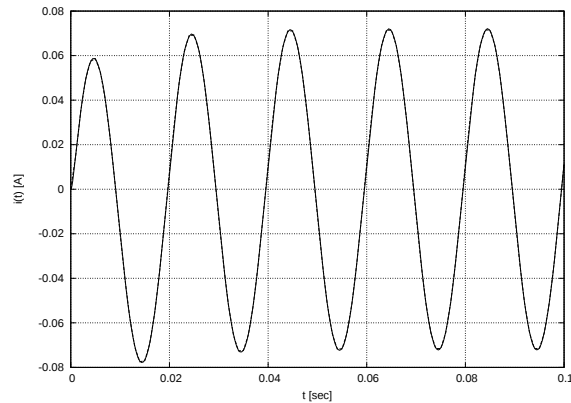
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση με το LTSpice για το ρεύμα $i(t)$ είναι

```

5_5
Vs 1 0 sin(0 220 50 0 0 0)
R1 1 2 3k
L1 2 3 1
C1 3 0 4u
.tran 1m 0.1
.print tran I(R1)
.end

```

Η παρακάτω γραφική συμπεριλαμβάνει το αποτέλεσμα του LTSpice και τη θεωρητική λύση που βρήκαμε εμείς, στην ίδια γραφική. Οι λύσεις συμπίπτουν.



6 Κεφάλαιο

Άσκηση 6.1 Συμμετρική τριφασική γεννήτρια σε συνδεσμολογία αστέρα έχει $|\dot{U}_{RS}| = 400 \text{ V}$. Να βρεθούν οι φασικές τάσεις για ορθή και ανάστροφη διαδοχή φάσεων.

Λύση

Η πολική τάση έχει μέτρο $U_\pi = 400 \text{ V}$. Επομένως, η φασική τάση έχει μέτρο $U_\phi = U_\pi / \sqrt{3} = 230.94 \text{ V}$. Για ορθή διαδοχή φάσεων έχουμε

$$\dot{U}_{RN} = 230.94 \angle 90^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_{SN} = 230.94 \angle -30^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_{TN} = 230.94 \angle -150^\circ \text{ V}$$

Και για ανάστροφη διαδοχή φάσεων έχουμε

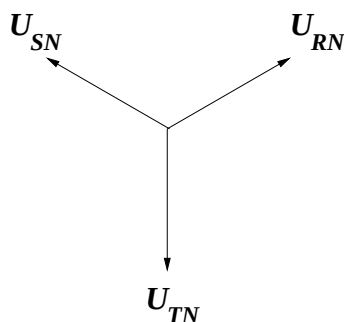
$$\dot{U}_{RN} = 230.94 \angle 90^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_{SN} = 230.94 \angle -150^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_{TN} = 230.94 \angle -30^\circ \text{ V}$$

Άσκηση 6.2 Ποιά είναι η διαδοχή των φάσεων ενός συμμετρικού τριφασικού κυκλώματος για το οποίο $\dot{U}_{RN} = 160 \angle 30^\circ \text{ V}$ και $\dot{U}_{TN} = 160 \angle -90^\circ \text{ V}$; Ποιά είναι η $\dot{U}_{SN}$;

Λύση

Όπως φαίνεται στο σχήμα η διαδοχή είναι ανάστροφη και

$$\dot{U}_{SN} = 160 \angle 30^\circ + 120^\circ = 160 \angle 150^\circ \text{ V}$$

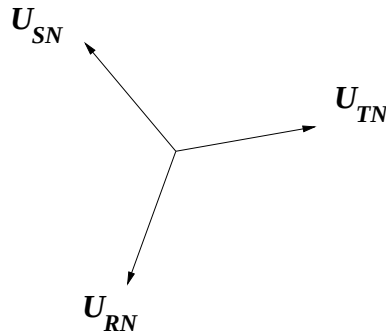


Άσκηση 6.3 Προσδιορίστε τη διαδοχή των φάσεων ενός συμμετρικού τριφασικού κυκλώματος για το οποίο $\dot{U}_{SN} = 208 \angle 130^\circ$ V και $\dot{U}_{TN} = 208 \angle 10^\circ$ V; Ποιά είναι η $\dot{U}_{RN}$;

Λύση

Όπως φαίνεται στο σχήμα η διαδοχή είναι ορθή και

$$\dot{U}_{RN} = 208 \angle 10^\circ - 120^\circ = 208 \angle -110^\circ \text{ V}$$

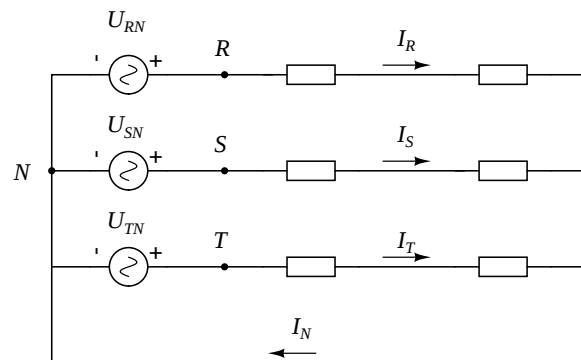


Άσκηση 6.6 Ένα συμμετρικό σύστημα, σε σύνδεση (Υ) ↔ (Υ), με τέσσερις γραμμές έχει φασικές τάσεις

$$\dot{U}_{RN} = 220 \angle 90^\circ \quad \dot{U}_{SN} = 220 \angle -30^\circ \quad \dot{U}_{TN} = 220 \angle -150^\circ$$

Η εμπέδηση φορτίου ανά φάση είναι $19 + j13 \Omega$ και η εμπέδηση γραμμής ανά φάση είναι $1 + j2 \Omega$. Να βρεθούν τα ρεύματα γραμμής καθώς και το ρεύμα του ουδετέρου.

Λύση



Οι εμπεδήσεις φορτίου και γραμμής είναι σε σειρά για κάθε φάση και έχουμε $Z = 19 + j13 + 1 + j2 = 20 + j15 \Omega$. Το ρεύμα γραμμής για τη φάση R είναι

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{RN}}{Z} = \frac{220 \angle 90^\circ}{20 + j15} = 8.8 \angle 53.13^\circ \text{ A}$$

Για τις υπόλοιπες φάσεις, εφόσον η διαδοχή είναι θετική

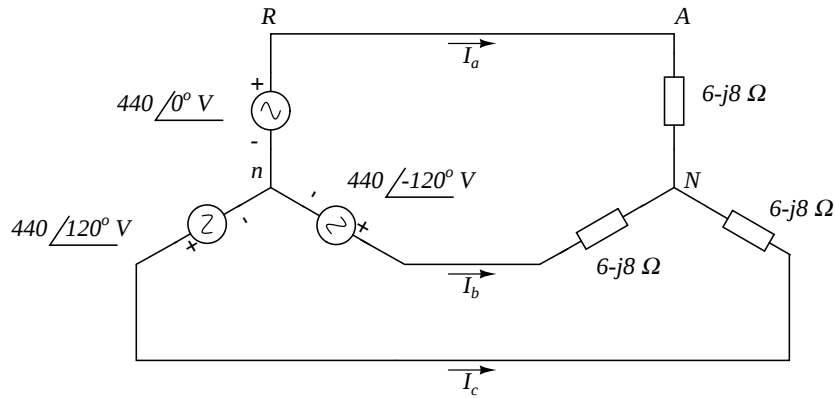
$$\dot{I}_S = \dot{I}_R \angle -120^\circ = 8.8 \angle -66.87^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_T = \dot{I}_R \angle 120^\circ = 8.8 \angle 173.13^\circ \text{ A}$$

Το ρεύμα του ουδετέρου είναι

$$\dot{I}_N = \dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 0$$

το οποίο μάλιστα αναμέναμε μιας και το σύστημα είναι συμμετρικό.

Άσκηση 6.7 Στο παρακάτω κύκλωμα να προσδιοριστούν τα ρεύματα γραμμής.



Λύση

Έχουμε

$$\dot{I}_a = \frac{440 \angle 0^\circ}{6 - j8} = 44 \angle 53.13^\circ \text{ A}$$

Για τις υπόλοιπες φάσεις, εφόσον η διαδοχή είναι θετική

$$\dot{I}_b = \dot{I}_a \angle -120^\circ = 44 \angle -66.87^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_c = \dot{I}_a \angle 120^\circ = 44 \angle 173.13^\circ \text{ A}$$

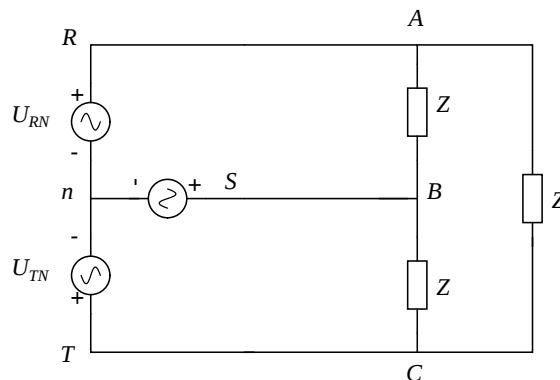
Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
6_7
Vr 2 0 ac 440 0
Vs 3 0 ac 440 -120
Vt 4 0 ac 440 120
R1 2 5 6
C1 5 1 0.125
R2 3 6 6
C2 6 1 0.125
R3 4 7 6
C3 7 1 0.125
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

frequency :	0.15915	Hz		
I(R3):	mag:	43.9991	phase:	173.131 device_current
I(R2):	mag:	43.9991	phase:	-66.869 device_current
I(R1):	mag:	43.9991	phase:	53.131 device_current

Άσκηση 6.9 Στο παρακάτω κύκλωμα $\dot{I}_{SB} = 30 \angle 60^\circ \text{ A}$ και $\dot{U}_{BC} = 220 \angle 10^\circ \text{ V}$. Να βρεθούν $\dot{U}_{Rn}$, $\dot{U}_{AB}$, $\dot{I}_{AC}$ και Z .



Λύση

Θεωρούμε θετική διαδοχή φάσεων. Οπότε

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{BC} \angle 120^\circ = 220 \angle 10^\circ + 120^\circ = 220 \angle 130^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{RN} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 130^\circ - 30^\circ = 127.02 \angle 100^\circ \text{ V}$$

Τα φασικά ρεύματα είναι

$$\dot{I}_S = 30 \angle 60^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_R = \dot{I}_S \angle 120^\circ = 30 \angle 180^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_T = \dot{I}_S \angle -120^\circ = 30 \angle -60^\circ \text{ A}$$

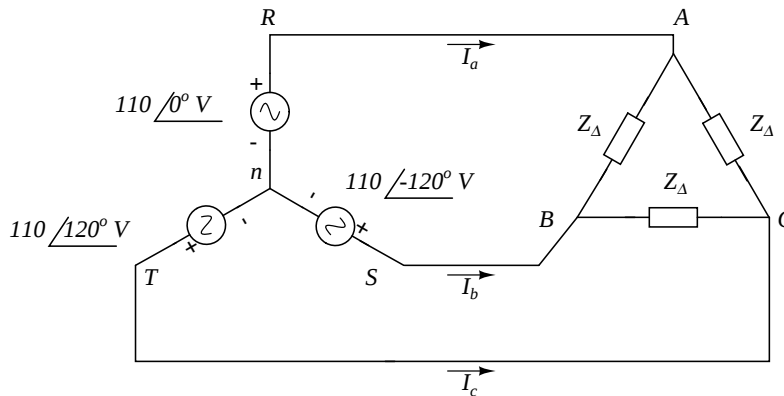
άρα

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{I}_T}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 17.321 \angle -30^\circ \Rightarrow \dot{I}_{AC} = -\dot{I}_{CA} = 17.321 \angle -30^\circ + 180^\circ = 17.321 \angle 150^\circ \text{ A}$$

και

$$Z = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{I}_{BC}} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{I}_{CA} \angle 120^\circ} = \frac{220 \angle 10^\circ}{17.321 \angle 90^\circ} = 12.701 \angle -80^\circ \Omega$$

Άσκηση 6.10 Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής στο παρακάτω κύκλωμα όταν $Z_\Delta = 60 \angle 45^\circ \Omega$



Λύση

Έχουμε θετική διαδοχή φάσεων και οι πολικές τάσεις είναι

$$\dot{U}_{RS} = \dot{U}_{RN} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 190.53 \angle 30^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_{ST} = \dot{U}_{RS} \angle -120^\circ = 190.53 \angle -90^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_{TR} = \dot{U}_{ST} \angle -120^\circ = 190.53 \angle 150^\circ \text{ V}$$

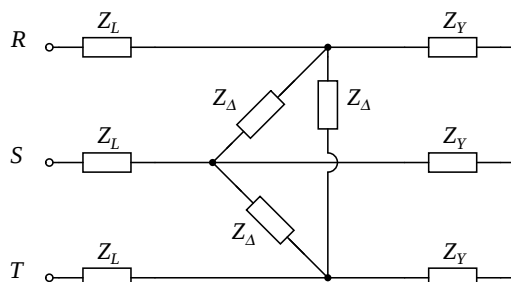
Τα πολικά ρεύματα είναι τότε

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{RS}}{Z} = 3.175 \angle -15^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{ST}}{Z} = 3.175 \angle -135^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{TR}}{Z} = 3.175 \angle 105^\circ \text{ A}$$

και τα φασικά ή ρεύματα γραμμής

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 5.5 \angle -45^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_S = \dot{I}_R \angle -120^\circ = 5.5 \angle -165^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_T = \dot{I}_R \angle 120^\circ = 5.5 \angle 75^\circ \text{ A}$$

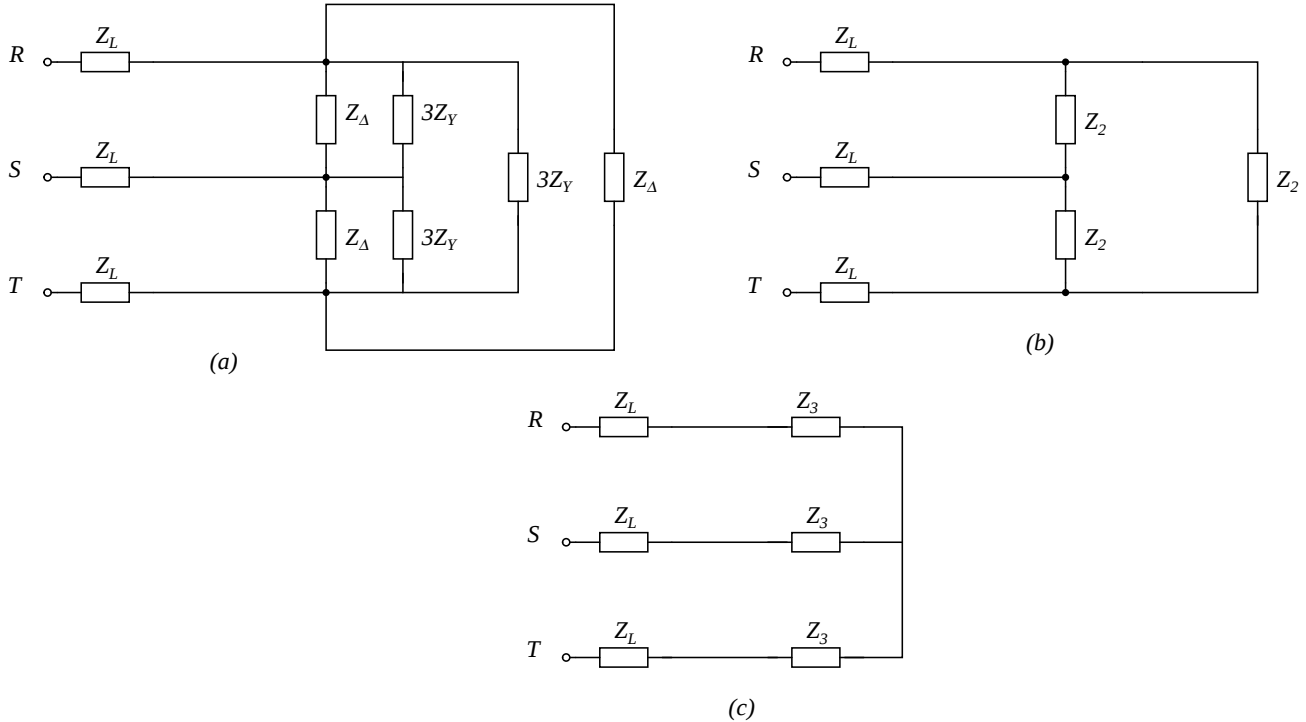
Άσκηση 6.12 Το παρακάτω δικτύωμα διεγείρεται από συμμετρική, τριφασική πηγή με τάση γραμμής 210 V. Εάν $Z_L = 1 + j \Omega$, $Z_\Delta = 24 - j30 \Omega$ και $Z_Y = 12 + j5 \Omega$, προσδιορίστε το ρεύμα γραμμής (μέτρο) στο συνολικό φορτίο.



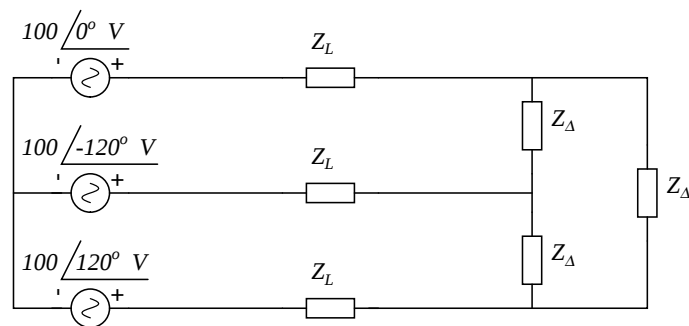
Λύση

Μετατρέπουμε τον δεξιό αστέρα σε τρίγωνο με εμπέδηση $3Z_Y$ (κύκλωμα (a)). Έχουμε τώρα δυο παράλληλα τρίγωνα τα οποία κάνουμε ένα με εμπέδηση πλευράς $Z_2 = Z_\Delta \parallel (3Z_Y) = 24.227 \angle -14.684^\circ \Omega$. Μετατρέπουμε το τρίγωνο σε αστέρα, $Z_3 = Z_2/3 = 8.075 \angle -14.684^\circ \Omega$ (κύκλωμα (c)) και σε σειρά με το Z_L έχουμε τελικά ολικό φορτίο σε σύνδεση αστέρα με εμπέδηση $Z = Z_L + Z_3 = 8.874 \angle -6.776^\circ \Omega$. Οπότε το ρεύμα γραμμής για κάθε φάση (μόνο μέτρο) είναι

$$I = \frac{220}{8.874} = 24.792 \text{ A}$$



Άσκηση 6.15 Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $Z_\Delta = 21 + j24 \Omega$ και $Z_L = 1 + j0.5 \Omega$. Να υπολογιστεί η μέση ισχύς που καταναλώνεται από το τριφασικό φορτίο.



Λύση

Το τριφασικό φορτίο είναι σε σύνδεση τριγώνου. Μετατρέποντας σε αστέρα έχουμε εμπέδηση μονοφασικού φορτίου $Z_Y = Z_\Delta/3 = 7 + j8 \Omega$. Το ρεύμα στην φάση R είναι

$$\dot{I}_R = \frac{100 \angle 0^\circ}{(1 + j0.5) + (7 + j8)} = 8.567 \angle -46.736^\circ \text{ A}$$

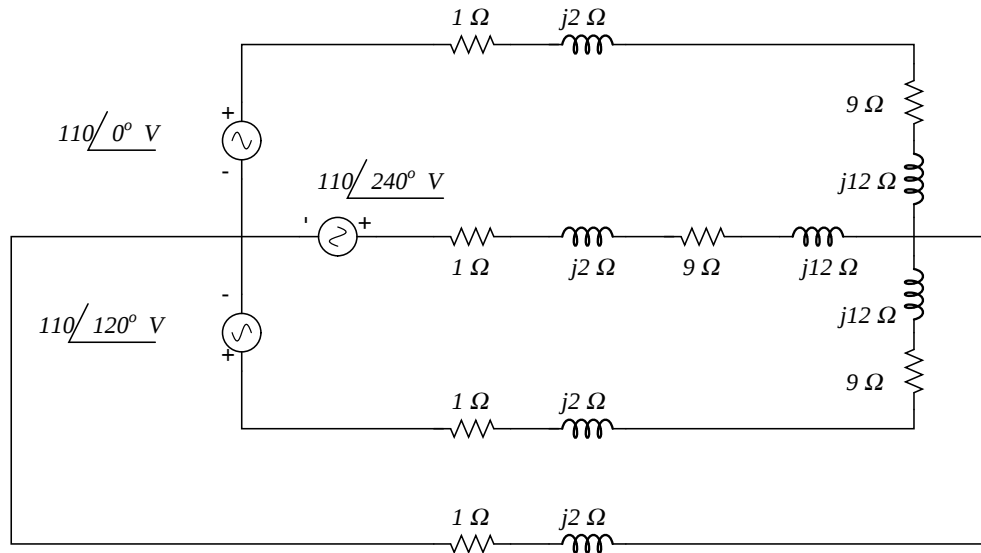
και η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο στην ίδια φάση είναι

$$\dot{S}_R = \dot{U}_{Z_Y} \cdot \dot{I}_R^* = |\dot{I}_R|^2 \cdot Z_Y = 513.76 + j587.16 \text{ VA}$$

Εφόσον στην παραπάνω σχέση εμφανίζεται μόνο το μέτρο του φασικού ρεύματος και το φορτίο είναι συμμετρικό, η μιγαδική ισχύς στις άλλες φάσεις είναι ίδια. Άρα η συνολική μιγαδική ισχύς στο φορτίο είναι $\dot{S} = 3\dot{S}_R$ και η συνολική μέση ισχύς είναι

$$P = \Re\{\dot{S}\} = 3 \cdot 513.76 = 1541.3 \text{ W}$$

Άσκηση 6.16 Να βρεθεί στο παρακάτω κύκλωμα η ολική μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται από το φορτίο.



Λύση

Έχουμε συμμετρικό τριφασικό κύκλωμα, με ανάστροφη φορά φάσης. Διακρίνουμε μονοφασικό φορτίο $9 + j12 \Omega$ και εμπέδηση γραμμής μεταφοράς $1 + j2 \Omega$. Το ρεύμα στον ουδέτερο είναι μηδέν και αρκεί να εξετάσουμε τη μια φάση, έστω την R . Έχουμε

$$\dot{I}_R = \frac{110 \angle 0^\circ}{1 + j2 + 9 + j12} = 6.394 \angle -54.462^\circ \text{ A}$$

και η μιγαδική ισχύς στο μονοφασικό φορτίο είναι $\dot{S}_R = |\dot{I}_R|^2 (9 + j12) = 367.91 + j490.54 \text{ VA}$. Εφόσον στην παραπάνω σχέση εμφανίζεται μόνο το μέτρο του φασικού ρεύματος και το φορτίο είναι συμμετρικό, η μιγαδική ισχύς στις άλλες φάσεις είναι ίδια. Άρα η συνολική μιγαδική ισχύς στο φορτίο είναι

$$\dot{S} = 3\dot{S}_R = 1103.7 + j1471.6 \text{ VA}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

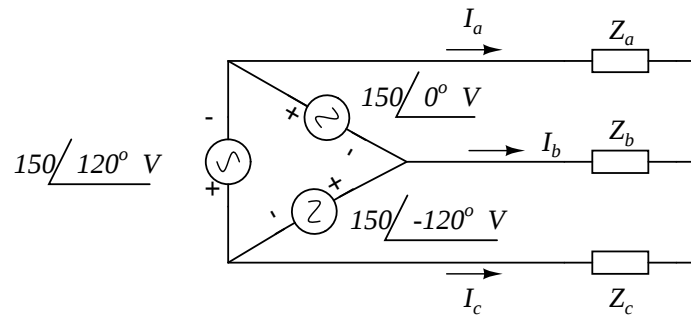
```
6_16
Vr 2 0 ac 110 0
Vs 3 0 ac 110 240
Vt 4 0 ac 110 120
R11 2 5 1
L11 5 9 2
R12 9 12 9
L12 12 1 12
R21 3 6 1
L21 6 10 2
R22 10 13 9
L22 13 1 12
R31 4 7 1
L31 7 11 2
R32 11 14 9
L32 14 1 12
R1 0 8 1
L1 8 1 2
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.15915 Hz
V(1):   mag: 8.88178e-015 phase: 126.87 voltage
I(R1):  mag: 3.97136e-015 phase: -116.541 device_current
```

I(R31):	mag:	6.39332	phase:	65.5439	device_current
I(R21):	mag:	6.39332	phase:	-174.456	device_current
I(R11):	mag:	6.39332	phase:	-54.4561	device_current

Άσκηση 6.17 Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $Z_a = 6 - j8 \Omega$, $Z_b = 12 + j9 \Omega$ και $Z_c = 15 \Omega$. Να βρεθούν τα ρεύματα γραμμής I_a , I_b και I_c .



Λύση

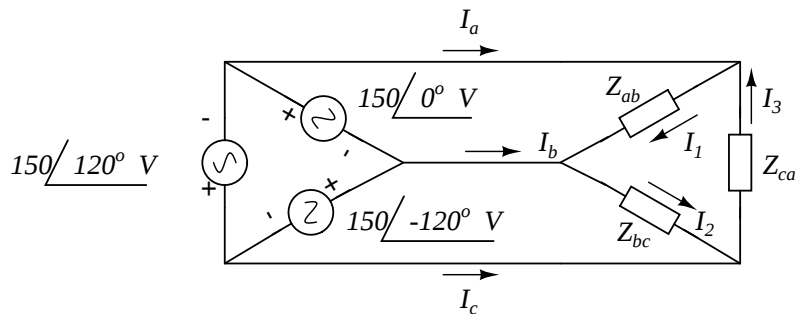
Κάνοντας ένα μετασχηματισμό αστέρα-τριγώνου

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} = 27.6 - j1.8 \Omega$$

$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} = 27 + j31.5 \Omega$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} = 21 - j18 \Omega$$

έχουμε το παρακάτω κύκλωμα



και

$$\dot{I}_1 = \frac{150 \angle 0^\circ}{Z_{ab}} = 5.423 \angle 3.731^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = \frac{150 \angle -120^\circ}{Z_{bc}} = 3.616 \angle -169.399^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_3 = \frac{150 \angle 120^\circ}{Z_{ca}} = 5.423 \angle 160.601^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_a = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 10.626 \angle -7.834^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_b = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = 9.023 \angle -173.521^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_c = \dot{I}_3 - \dot{I}_2 = 2.919 \angle 122.339^\circ \text{ A}$$

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
6_17
V1 2 1 ac 150 0
V2 1 3 ac 150 -120
V3 3 2 ac 150 120
R1 2 4 6
C1 4 0 0.125
```

```

R2 1 5 12
L2 5 0 9
R3 3 0 15
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end

```

και μας δίνει

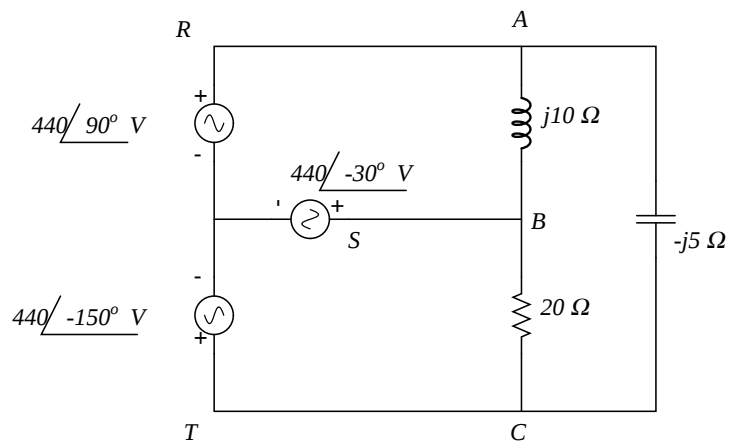
```

frequency:      0.15915 Hz
I(R3):  mag:    2.91936 phase:    122.339      device_current
I(R2):  mag:    9.02277 phase:   -173.519      device_current
I(R1):  mag:   10.6259 phase:   -7.83283      device_current

```

Άσκηση 6.19 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν

1. τα ρεύματα γραμμής
2. η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο
3. η ολική μιγαδική ισχύς που παρέχεται από την πηγή



Λύση

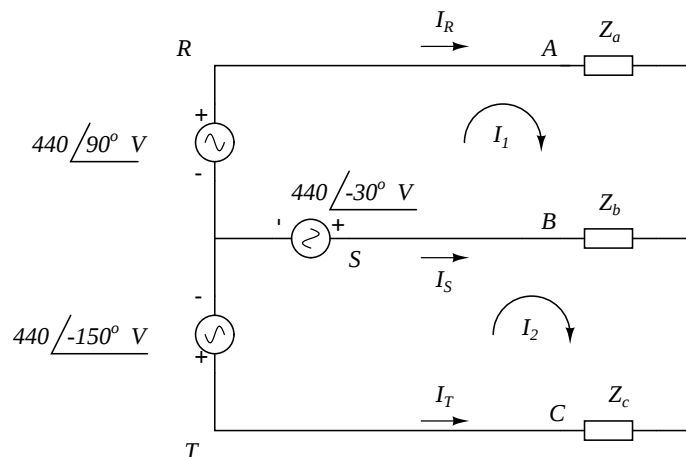
Κάνοντας ένα μετασχηματισμό τριγώνου-αστέρα

$$Z_a = \frac{j10(-j5)}{20 + j10 - j5} = 2.425 \angle -14.036^\circ \Omega$$

$$Z_b = \frac{20(j10)}{20 + j10 - j5} = 9.701 \angle 75.964^\circ \Omega$$

$$Z_c = \frac{20(-j5)}{20 + j10 - j5} = 4.851 \angle -104.036^\circ \Omega$$

έχουμε το παρακάτω κύκλωμα.



Το φορτίο δεν είναι συμμετρικό άρα εργαζόμαστε με μέθοδο οφθαλμών και έχουμε

$$\left. \begin{aligned} (Z_a + Z_b)\dot{I}_1 - Z_b\dot{I}_2 &= -440 \angle -30^\circ + 440 \angle 90^\circ \\ -Z_b\dot{I}_1 + (Z_b + Z_c)\dot{I}_2 &= 440 \angle -30^\circ - 440 \angle -150^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 132 \angle 120^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= 120.93 \angle 140.94^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\dot{I}_R = \dot{I}_1 = 132 \angle 120^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_S = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = 47.224 \angle -126.206^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_T = -\dot{I}_2 = 120.931 \angle -39.065^\circ \text{ A}$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι

$$\dot{S}_\phi = |\dot{I}_R|^2 \cdot Z_a + |\dot{I}_S|^2 \cdot Z_b + |\dot{I}_T|^2 \cdot Z_c = 2.904 \times 10^4 - j5.808 \times 10^4 \text{ VA}$$

και η πραγματική ισχύς είναι

$$P = \Re\{\dot{S}_\phi\} = 2.904 \times 10^4 \text{ W}$$

Η ολική μιγαδική ισχύς που παρέχεται από την πηγή είναι

$$\dot{S}_\pi = (440 \angle 90^\circ) \cdot \dot{I}_R^* + (440 \angle -30^\circ) \cdot \dot{I}_S^* + (440 \angle -150^\circ) \cdot \dot{I}_T^* = 2.904 \times 10^4 - j5.808 \times 10^4 \text{ VA}$$

ίση με αυτήν που καταναλώνεται.

Ένα κατάλληλο netlist για επιβεβαίωση, με $\omega = 1 \text{ rad/s}$ είναι

```
6_19
Vr 2 0 ac 440 90
Vs 1 0 ac 440 -30
Vt 3 0 ac 440 -150
L 2 1 10
R 3 1 20
C 2 3 0.2
.ac lin 1 0.15915 0.15915
.print ac
.end
```

και μας δίνει

```
frequency:      0.15915 Hz
I(Vt):  mag:    120.926  phase:    140.935      device_current
I(Vs):  mag:    47.2294  phase:     53.8013      device_current
I(Vr):  mag:    132.004  phase:   -60.0021      device_current
```

Τα παραπάνω ρεύματα που μας δίνει το LTSpice είναι αντίθετα με τα ρεύματα γραμμής. Αντιστρέφοντας έχουμε (μέτρο και φάση)

```
132.004    119.998
 47.229    -126.199
120.926    -39.065
```

σε καλή συμφωνία με αυτά που υπολογίσαμε εμείς.