Μεταβατικά

Εισαγωγή σε μεταβατικά φαινόμενα

Α. Δροσόπουλος

28-03-2024

1 Μεταβατικά φαινόμενα

Υπενθυμίζονται οι σχέσεις τάσης / ρεύματος για τα στοιχεία R,L,C

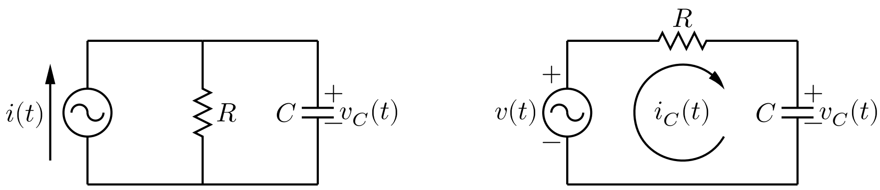
$$v(t) = Ri(t) \qquad i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Εφαρμόζουμε κανόνες Kirchhoff και όλες τις άλλες τεχνικές ανάλυσης κυκλωμάτων σχηματίζοντας έτσι διαφορικές εξισώσεις για τις τάσεις ή τα ρεύματα σε κάποιο κύκλωμα που περιέχει RLC στοιχεία και καταλήγουμε σε λύσεις που περιέχουν την πλήρη εξέλιξη στον χρόνο των τάσεων ή ρευμάτων στο κύκλωμα (πλήρη εικόνα μεταβατικών φαινομένων).

1.1 Ανάλυση κυκλωμάτων RC



Σχήμα 1: RC κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Με μετασχηματισμό πηγών οι μορφές είναι ισοδύναμες.

Στο Σχ. 1 βλέπουμε ένα RC κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Οι μορφές αυτές μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής θεωρημάτων Thevenin ή Norton σε σύνθετα κυκλώματα. Με μετασχηματισμό πηγών οι μορφές είναι ισοδύναμες.

Ο κανόνας ρευμάτων Kirchhoff στη παράλληλη μορφή δίνει

$$i(t) = \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{i(t)}{C} \tag{1}$$

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε κανόνα ρευμάτων στο εν σειρά κύκλωμα στο σημείο (κόμβο) μεταξύ αντίστασης και πυκνωτή. Η συσσώρευση ρεύματος δεν είναι δυνατή οπότε

$$\frac{v_C - u}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{v(t)}{RC} \tag{2}$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να πάμε από τη μια σχέση στην άλλη απλώς μέσω της $v(t) = i(t)R$.

Η βασική εξίσωση (1 ή 2) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση είναι άθροισμα της λύσης στο ομογενές πρόβλημα (homogeneous solution) και της λύσης στο μη-ομογενές πρόβλημα (particular solution). Ομογενές πρόβλημα έχουμε όταν η συνάρτηση οδήγησης είναι μηδενική. Στην περίπτωσή μας

$$\frac{dv_{CH}}{dt} + \frac{v_{CH}}{RC} = 0 \tag{3}$$

Δεχόμαστε ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$v_{CH}(t) = Ae^{st}$$

γιατί η λύση στο ομογενές πρόβλημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είναι πάντα αυτής της μορφής. Αντικαθιστούμε στην (3) και έχουμε

$$Ase^{st} + \frac{Ae^{st}}{RC} = 0 \;\Rightarrow\; Ae^{st}\left(s + \frac{1}{RC}\right) = 0$$

Έχουμε μη μηδενική λύση για

$$s = -\frac{1}{RC}$$

Το γινόμενο RC έχει μονάδες χρόνου και ορίζεται σαν σταθερά χρόνου του κυκλώματος, $\tau = RC$. Η ομογενής λύση είναι

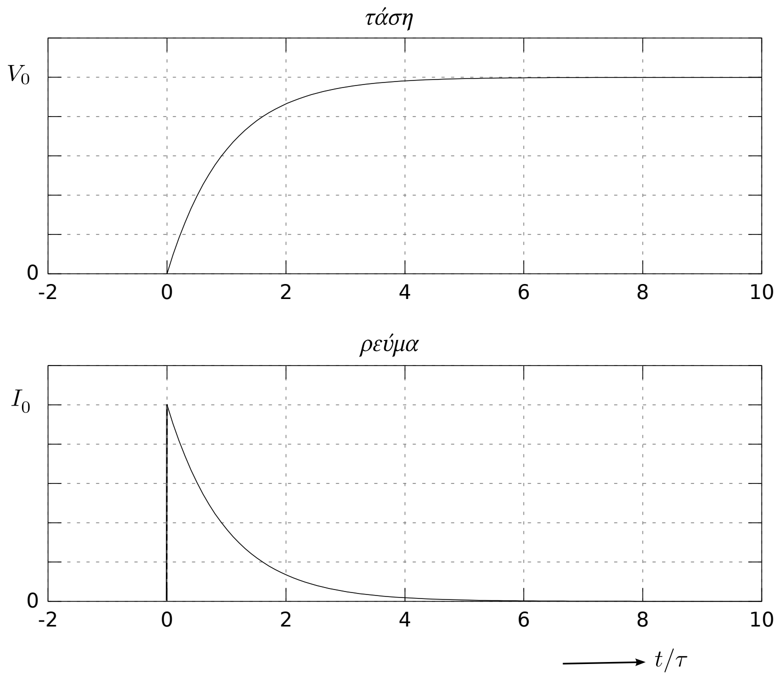
$$v_{CH}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Για το μη ομογενές πρόβλημα έχουμε

$$\frac{dv_{CP}}{dt} + \frac{v_{CP}}{RC} = f(t)$$

όπου $f(t) = i(t)/C$ ή $f(t) = v(t)/(RC)$ και η γενική λύση είναι το άθροισμα των δυο παραπάνω, $v_{CH} + v_{CP}$. Οι αρχικές συνθήκες μας οδηγούν κατόπιν στον προσδιορισμό των σταθερών.

1.2 Φόρτιση πυκνωτή



Σχήμα 2: Φόρτιση πυκνωτή από μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τάση (επάνω) και ρεύμα (κάτω).

Για την περίπτωση όπου η διέγερση είναι μια πηγή συνεχούς τάσης ή ρεύματος που ενεργοποιείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ (κλείσιμο κάποιου διακόπτη)

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ V_0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad i(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ I_0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

δεχόμαστε ότι η λύση για $t \geq 0$ είναι κάποια σταθερά

$$v_{CP}(t) = K$$

Αντικαθιστώντας στην (1) ή (2) έχουμε

$$K = I_0 R \qquad \text{ή} \qquad K = V_0$$

Επομένως η ολική λύση είναι το άθροισμα της v_{CH} και v_{CP}

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau} + V_0$$

Στον πυκνωτή όπου το ρεύμα που τον διαρρέει ορίζεται σαν η παράγωγος της τάσης στα άκρα του, η τάση $v_C(t)$ πρέπει να είναι συνεχής. Τυχόν ασυνέχεια υπονοείται ότι δημιουργείται από αιχμή ρεύματος απείρου πλάτους που είναι φυσικώς μη αποδεκτό. Με αρχικές συνθήκες $v_C(t) = 0$, $i(t) = 0$ για $t < 0$ και $i(t) = I_0$, $v(t) = V_0$ για $t \geq 0$ έχουμε

$$0 = A + V_0 \;\Rightarrow\; A = -V_0$$

και η γενική λύση για την τάση στα άκρα του πυκνωτή για $t \geq 0$ είναι

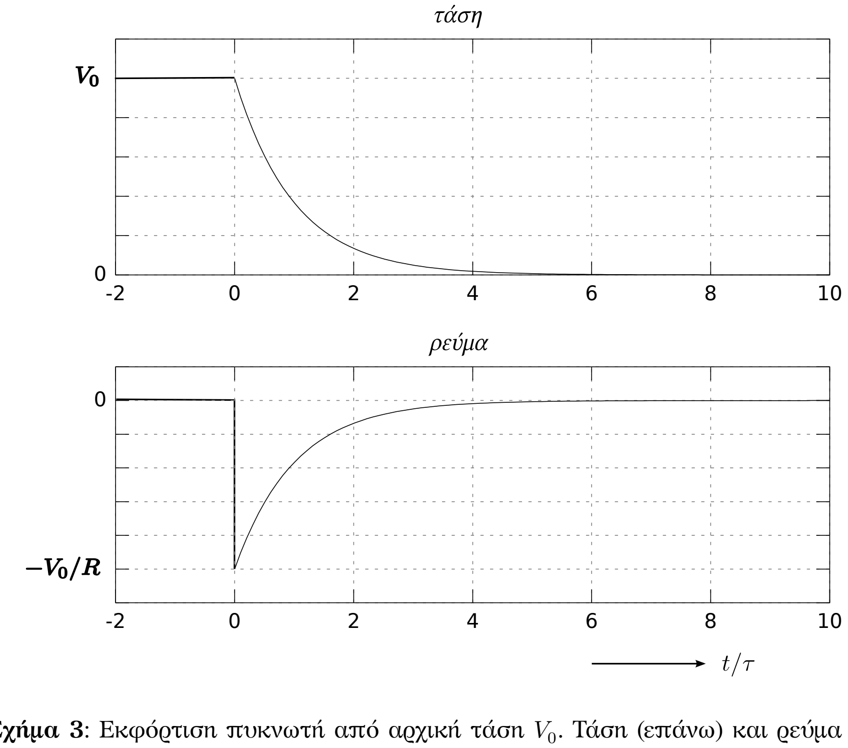
$$v_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ενώ η γενική λύση για το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή για $t \geq 0$ είναι

$$i_C(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Στο Σχ. 2 βλέπουμε τη φόρτιση του πυκνωτή (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου. Βλέπουμε την τάση να ξεκινά από το μηδέν (άρα βραχυκύκλωμα) και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) να είναι πρακτικά στην τελική τιμή V_0. Αντίστοιχα για το ρεύμα, βλέπουμε πεπερασμένη αιχμή για $t = 0$ όπου περνά όλο το ρεύμα της πηγής και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) το ρεύμα είναι πρακτικά μηδέν (διακόπτης/ανοικτό κύκλωμα).

1.3 Εκφόρτιση πυκνωτή



Σχήμα 3: Εκφόρτιση πυκνωτή από αρχική τάση V_0. Τάση (επάνω) και ρεύμα (κάτω).

Έστω τώρα ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος την χρονική στιγμή $t = 0$ στην τάση V_0 και βγαίνει εκτός η πηγή στο Σχ. 1. Ο πυκνωτής θα αρχίσει να εκφορτίζεται μέσω της αντίστασης R. Η εξίσωση που περιγράφει την εκφόρτιση είναι

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

όμοια με την ομογενή προηγουμένως, επομένως η λύση θα είναι

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Με την αρχική συνθήκη $v_C(t) = V_0$ για $t = 0$ έχουμε $A = V_0$, οπότε η τελική λύση είναι

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

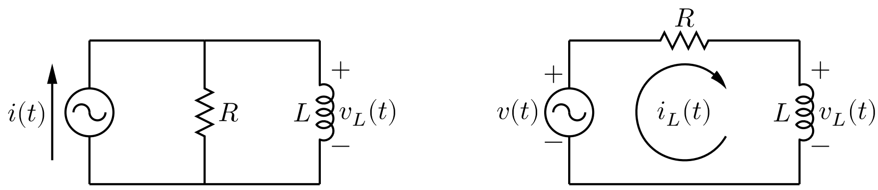
για την τάση, και

$$i_C(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

για το ρεύμα.

Στο Σχ. 3 βλέπουμε την εκφόρτιση του πυκνωτή μέσω της αντίστασης (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου. Βλέπουμε την τάση να ξεκινά από την τιμή V_0 και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται. Βλέπουμε επίσης το ρεύμα από την τιμή μηδέν (βραχυκύκλωμα) να έχει μια πεπερασμένη αιχμή $-V_0/R$ (το $-$ απλώς σημαίνει ροή ρεύματος εκφόρτισης αντιθέτου φοράς από το ρεύμα φόρτισης) και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται πάλι.

1.4 Ανάλυση κυκλωμάτων RL



Σχήμα 4: RL κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Με μετασχηματισμό πηγών οι μορφές είναι ισοδύναμες.

Στο Σχ. 4 βλέπουμε ένα RL κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Οι μορφές αυτές μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής θεωρημάτων Thevenin ή Norton σε σύνθετα κυκλώματα. Αν έχουμε την παράλληλο μορφή είναι πιο βολικό να κάνουμε ένα μετασχηματισμό $v(t) = i(t)R$ για να έρθουμε στην εν σειρά.

Ο κανόνας τάσεων Kirchhoff στην εν σειρά μορφή δίνει

$$i_L R + v_L = v(t) \;\Rightarrow\; L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = v(t) \;\Rightarrow\; \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{v(t)}{L} \tag{4}$$

Η βασική εξίσωση (4) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση είναι άθροισμα της λύσης στο ομογενές πρόβλημα (homogeneous solution) και της λύσης στο μη-ομογενές πρόβλημα (particular solution). Ομογενές πρόβλημα έχουμε όταν η συνάρτηση οδήγησης είναι μηδενική. Στην περίπτωσή μας

$$\frac{di_{LH}}{dt} + \frac{R}{L} i_{LH} = 0 \tag{5}$$

Δεχόμαστε ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$i_{LH}(t) = Ae^{st}$$

γιατί η λύση στο ομογενές πρόβλημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είναι πάντα αυτής της μορφής. Αντικαθιστούμε στην (5) και έχουμε

$$Ase^{st} + \frac{R}{L}\; As^{st} = 0 \;\Rightarrow\; Ae^{st}\left(s + \frac{R}{L}\right) = 0$$

Έχουμε μη μηδενική λύση για

$$s = -\frac{R}{L}$$

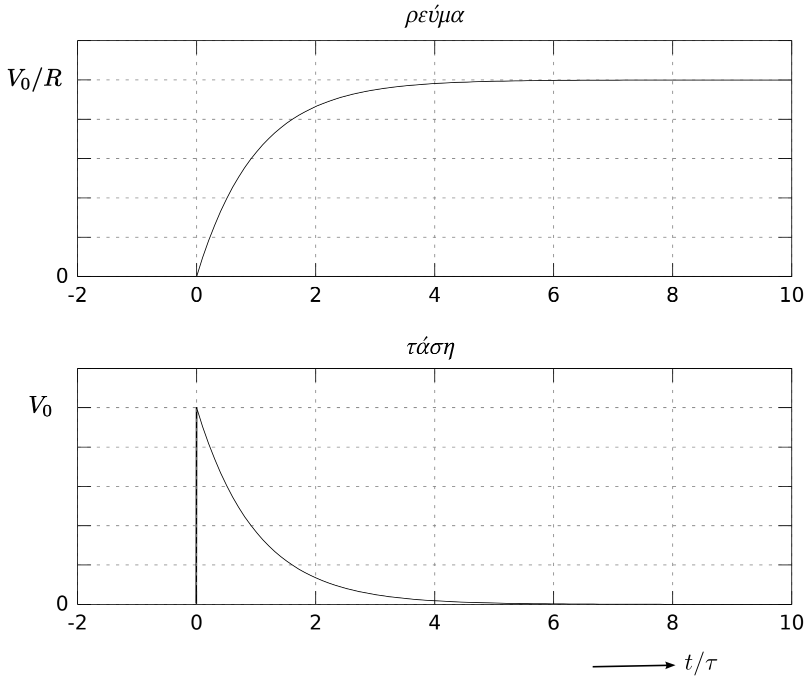
Το πηλίκο L/R έχει μονάδες χρόνου και ορίζεται σαν σταθερά χρόνου του κυκλώματος, $\tau = L/R$. Η ομογενής λύση είναι

$$i_{LH}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Για το μη ομογενές πρόβλημα έχουμε

$$\frac{di_{LP}}{dt} + \frac{R}{L} i_{LP} = f(t)$$

όπου $f(t) = v(t)/L$ και η γενική λύση είναι το άθροισμα των δυο παραπάνω, $i_{LH} + i_{LP}$. Οι αρχικές συνθήκες μας οδηγούν κατόπιν στον προσδιορισμό των σταθερών.



Σχήμα 5: Φόρτιση πηνίου από μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ρεύμα (επάνω) και τάση (κάτω).

1.5 Φόρτιση πηνίου

Για την περίπτωση όπου η διέγερση είναι μια πηγή συνεχούς τάσης που ενεργοποιείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ (κλείσιμο κάποιου διακόπτη)

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ V_0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

δεχόμαστε ότι η λύση για $t \geq 0$ είναι κάποια σταθερά

$$i_{LP}(t) = K$$

Αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε

$$K = \frac{V_0}{R}$$

Επομένως η ολική λύση είναι το άθροισμα της i_{LH} και i_{LP}

$$i_L(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_0}{R}$$

Στον πηνίο όπου η τάση στα άκρα του ορίζεται σαν η παράγωγος του ρεύματος που το διαρρέει, το ρεύμα $i_L(t)$ πρέπει να είναι συνεχές. Τυχόν ασυνέχεια υπονοείται ότι δημιουργείται από αιχμή τάσης απείρου πλάτους που είναι φυσικώς μη αποδεκτό. Με αρχικές συνθήκες $i_L(t) = 0$ για $t < 0$ και $v(t) = V_0$ για $t \geq 0$ έχουμε

$$0 = A + \frac{V_0}{R} \;\Rightarrow\; A = -\frac{V_0}{R}$$

και η γενική λύση για το ρεύμα του διαρρέει το πηνίο για $t \geq 0$ είναι

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ενώ η γενική λύση για την τάση στα άκρα του πηνίου για $t \geq 0$ είναι

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = V_0 e^{-t/\tau}$$

Στο Σχ. 5 βλέπουμε τη φόρτιση του πηνίου (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου.

Βλέπουμε το ρεύμα να ξεκινά από το μηδέν (άρα διακόπτης) και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) να είναι πρακτικά στην τελική τιμή V_0/R. Αντίστοιχα για τη τάση, βλέπουμε πεπερασμένη αιχμή για $t = 0$ όπου το πηνίο αντιτίθεται στη μεταβολή της κατάστασής του εμφανίζοντας τάση εξ αυτεπαγωγής αντίθετη με την αιχμή της πηγής και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) η τάση είναι πρακτικά μηδέν (βραχυκύκλωμα).

1.6 Εκφόρτιση πηνίου

Έστω τώρα ότι το πηνίο είναι φορτισμένο την χρονική στιγμή $t = 0$ με κάποιο ρεύμα $I_0 = V_0/R$ και βγαίνει εκτός η πηγή στο Σχ. 4. Το πηνίο θα αρχίσει να εκφορτίζεται μέσω της αντίστασης R. Η εξίσωση που περιγράφει την εκφόρτιση είναι

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0$$

όμοια με την ομογενή προηγουμένως, επομένως η λύση θα είναι

$$i_L(t) = Ae^{-t/\tau}$$

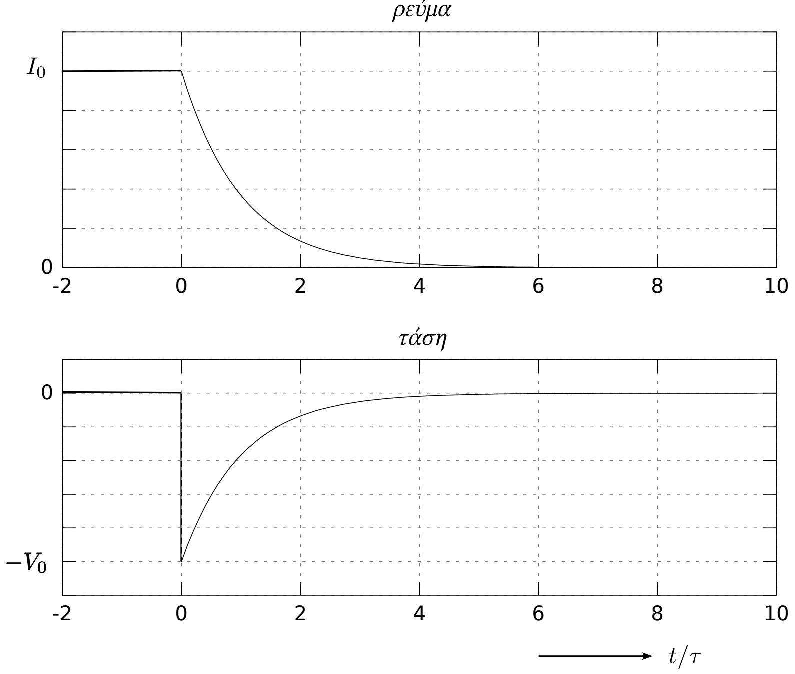
Με την αρχική συνθήκη $i_L(t) = I_0$ για $t = 0$ έχουμε $A = I_0$, οπότε η τελική λύση είναι

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

για το ρεύμα, και

$$v_L(t) = -V_0 e^{-t/\tau}$$

για τη τάση.



Σχήμα 6: Εκφόρτιση πηνίου από αρχικό ρεύμα I_0. Ρεύμα (επάνω) και τάση (κάτω).

Στο Σχ. 6 βλέπουμε την εκφόρτιση του πηνίου μέσω της αντίστασης (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου. Βλέπουμε το ρεύμα να ξεκινά από την τιμή I_0 και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται. Βλέπουμε επίσης την τάση από την τιμή μηδέν (βραχυκύκλωμα) να έχει μια πεπερασμένη αιχμή $-V_0$ (το $-$ απλώς σημαίνει την εξ αυτεπαγωγής αντίδραση του πηνίου στην απότομη εξαφάνιση της πηγής) και μετά από περίπου 5τ (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται πάλι.

1.7 Σύνοψη για RC, RL

Στα παραπάνω είδαμε τις διαδικασίες φόρτισης και εκφόρτισης κυκλωμάτων RC και RL. Και οι δυο διαδικασίες περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξεως με εξωτερική διέγερση μια πηγή συνεχούς τάσης που ενεργοποιείται με διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Στη γενική περίπτωση η ενεργοποίηση του διακόπτη γίνεται τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Έχουμε τότε:

RC κύκλωμα	
Σταθερά χρόνου:	$\tau = RC$
Τάση:	$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(t_0) - v_C(\infty)] \exp\left[-(t - t_0)/\tau \right]$
Ρεύμα:	$i_C(t) = C \dfrac{dv_C(t)}{dt}$

Όπου $v_C(t_0)$ η αρχική κατάσταση του πυκνωτή και $v_C(\infty)$ η τελική. Υπενθυμίζεται ότι $v_C(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση και ότι ο πυκνωτής στη σταθερή κατάσταση στο συνεχές δρα σαν διακόπτης.

RL κύκλωμα	
Σταθερά χρόνου:	$\tau = L/R$
Ρεύμα:	$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(t_0) - i_L(\infty)] \exp\left[-(t - t_0)/\tau \right]$
Τάση:	$v_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt}$

Όπου $i_L(t_0)$ η αρχική κατάσταση του πηνίου και $i_L(\infty)$ η τελική. Υπενθυμίζεται ότι $i_L(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση και ότι το πηνίο στη σταθερή κατάσταση στο συνεχές δρα σαν βραχυκύκλωμα.

1.8 Για μη σταθερά εξωτερική διέγερση

Υπενθυμίζεται ότι οι διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξεως στη γενική τους μορφή είναι

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$$

με λύση

$$y(x) = \exp\left[-\int \alpha(x)dx\right] \cdot \left[K + \int \beta(x) \exp\left[\int \alpha(x)dx\right] dx\right]$$

όπου η σταθερά K προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Για $\alpha(x) = \alpha$, σταθερά, ανεξάρτητη του x

$$y(x) = e^{-\alpha x}\left[K + \int \beta(x)e^{\alpha x}dx\right]$$

όπου η σταθερά K προσδιορίζεται πάλι από τις αρχικές συνθήκες.

Στις παραπάνω εξισώσεις αντικαταστήστε όπου x το t, όπου y την τάση ή το ρεύμα του αντίστοιχου πυκνωτή ή πηνίου και όπου β την εξωτερική διέγερση.

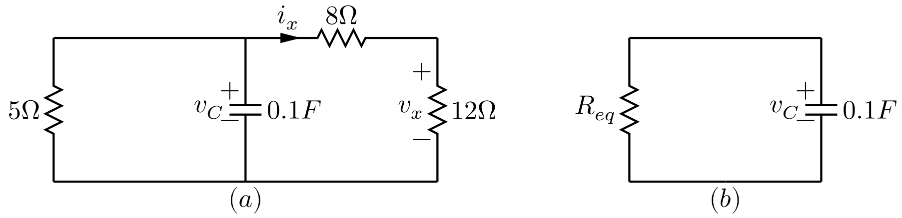
1.9 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1. *Έστω $v_C(0) = 15$ V στο παρακάτω κύκλωμα (a). Να βρεθούν τα μεγέθη $v_C(t), u_x(t)$ και $i_x(t)$ για $t > 0$.*

Στην περίπτωση αυτή έχουμε απλώς εκφόρτιση πυκνωτή. Στόχος μας είναι να βρούμε πρώτα την τάση $v_C(t)$ στα άκρα του και μετά τα υπόλοιπα μεγέθη.

Η ολική αντίσταση που βλέπει ο πυκνωτής είναι

$$R_{eq} = (8 + 12) \parallel 5 = \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} = 4 \ \Omega$$



Σχήμα 7: Αρχικό κύκλωμα αριστερά. Το ισοδύναμο Thevenin ως προς τον πυκνωτή δεξιά.

επομένως το ισοδύναμο κύκλωμα είναι το (b) και η σταθερά χρόνου είναι $\tau = R_{eq}C = 4 \cdot 0.1 = 0.4$ s. Επομένως

$$v_C(t) = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.4} = 15e^{-2.5t} \text{ V}$$

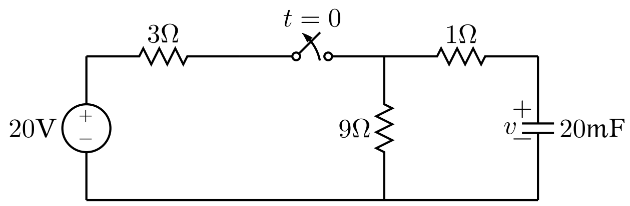
Ο πυκνωτής στην εκφόρτισή του συμπεριφέρεται σαν πηγή τάσης επομένως με διαιρέτη τάσης

$$u_x(t) = \frac{12}{12+8}\ v_C(t) = 0.6 \cdot 15e^{-2.5t} = 9e^{-2.5t} \text{ V}$$

και

$$i_x(t) = \frac{u_x(t)}{12} = 0.75e^{-2.5t} \text{ A}$$

Παράδειγμα 1.2. *Ο διακόπτης στο παρακάτω κύκλωμα ήταν κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα και ανοίγει την χρονική στιγμή $t = 0$. Προσδιορείστε την τάση $v(t)$ για $t \geq 0$.*



Σχήμα 8: Αρχικό κύκλωμα.

Στο συνεχές ρεύμα ο πυκνωτής δρα σαν διακόπτης. Επομένως ο δεξιός κλάδος για $t < 0$ είναι εκτός και η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$v(t) = \frac{9}{9+3}\ 20 = 15 \text{ V}$$

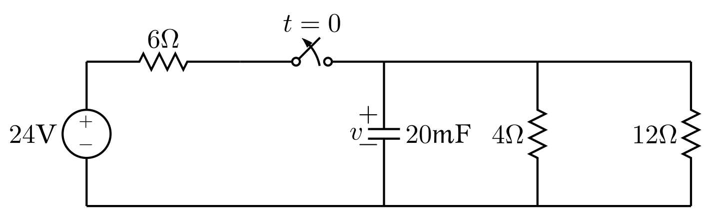
Εφόσον η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αλλάξει ακαριαία (τάση συνεχής) έχουμε για την αλλαγή από $t = 0^-$ σε $t = 0$

$$v(0) = 15 \text{ V}$$

Για $t = 0$, ο διακόπτης ανοίγει και ο αριστερός κλάδος βγαίνει εκτός. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται στην ολική αντίσταση $R_{eq} = 9 + 1 = 10$ Ω. Η σταθερά χρόνου είναι $\tau = R_{eq}C = 10 \cdot 20 \times 10^{-3} = 0.2$ s. Οπότε, για $t \geq 0$ έχουμε

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.2} = 15e^{-5t} \text{ V}$$

Παράδειγμα 1.3. *Εάν στο παρακάτω κύκλωμα ο διακόπτης ανοίγει την χρονική στιγμή $t = 0$, υπολογείστε την τάση $v(t)$ για $t \geq 0$.*



Σχήμα 9: Αρχικό κύκλωμα.

Και εδώ για $t = 0^-$, ο πυκνωτής είναι διακόπτης και η τάση στα άκρα του είναι η τάση στον παράλληλο συνδυασμό $4 \parallel 12 = 3$ Ω. Με διαιρέτη τάσης

$$v(0^-) = \frac{3}{3+6}24 = 1.125 \text{ V}$$

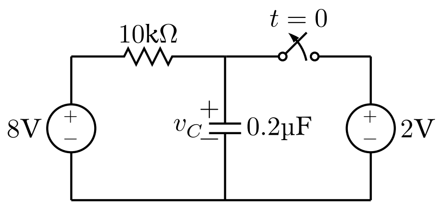
Εφόσον η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αλλάξει ακαριαία (τάση συνεχής) έχουμε για την αλλαγή από $t = 0^-$ σε $t = 0$

$$v(0) = 1.125 \text{ V}$$

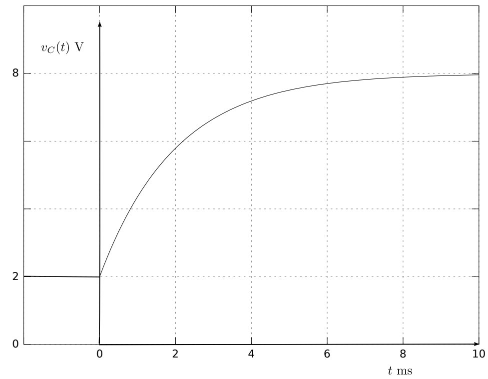
Για $t = 0$, ο διακόπτης ανοίγει και ο αριστερός κλάδος βγαίνει εκτός. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται στην αντίσταση $R = 3\ \Omega$. Η σταθερά χρόνου είναι $\tau = RC = 3 \cdot 20 \times 10^{-3} = 0.06$ s. Οπότε, για $t \geq 0$ έχουμε

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} = 1.125e^{-t/0.06} \text{ V}$$

Παράδειγμα 1.4. *Στο παρακάτω κύκλωμα ο διακόπτης είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγει. Ποια είναι η τάση $v_C(t)$ για $-\infty < t < \infty$; Εκτός από την αναλυτική έκφραση φτιάξτε και ένα σκίτσο της τάσης. Ποια είναι η τιμή της τάσης την χρονική στιγμή $t = 5$ ms;*



Σχήμα 10: Αρχικό κύκλωμα.



Σχήμα 11: Σκίτσο τάσης.

Εφόσον ο διακόπτης είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα ο πυκνωτής είναι στη σταθερή κατάσταση και λειτουργεί σαν διακόπτης (ανοικτό κύκλωμα). Η τάση στα άκρα του μέχρι και $t = 0$ είναι επομένως $v_C(0) = 2$ V.

Όταν ανοίγει ο διακόπτης ο δεξιός κλάδος βγαίνει εκτός. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται (;) στην αντίσταση 10 kΩ με σταθερά χρόνου $\tau = RC = 2$ ms

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 8 + (8-2)e^{t/\tau} = 8 - 6e^{-t/\tau} \text{ V}$$

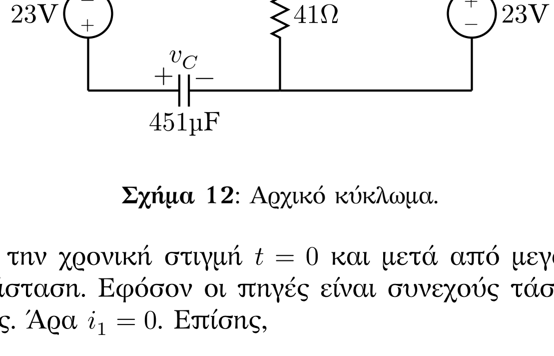
εφόσον στη νέα τελική κατάσταση ο πυκνωτής έχει στα άκρα του την τάση της πηγής των 8 V. Η πλήρης αναλυτική έκφραση είναι επομένως:

$$v_C(t) = \begin{cases} 2 & \text{για } t < 0 \\ 8 - 6e^{-t/\tau} & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

Το σκίτσο της τάσης φαίνεται στο Σχ. 11. Βλέπουμε ότι ο πυκνωτής φορτίζεται από τα 2 V στα 8 V.

Την χρονική στιγμή $t = 5$ ms έχουμε $v_C(5 \text{ ms}) = 7.507$ V.

Παράδειγμα 1.5. *Στο παρακάτω κύκλωμα για $t = 0$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ποια θα είναι τα ρεύματα i_1, i_2, i_3 καθώς και η τάση $v_C(t)$ στα άκρα του πυκνωτή; Πόσο χρόνο θα πάρει έτσι ώστε η τάση στα άκρα του πυκνωτή να είναι 3/4 της μέγιστης τιμής της;*



Σχήμα 12: Αρχικό κύκλωμα.

Ο πυκνωτής ξεκινά αφόρτιστος την χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα καταλήγει σε μια καινούργια σταθερή κατάσταση. Εφόσον οι πηγές είναι συνεχούς τάσης, η καινούργια κατάσταση του πυκνωτή θα είναι σαν διακόπτης. Άρα $i_1 = 0$. Επίσης,

$$i_2 = i_3 = \frac{23}{2 \cdot 41} = 0.28 \text{ A} \qquad \text{και} \qquad v_C = 23 + i_3 \cdot 41 = 34.5 \text{ V}$$

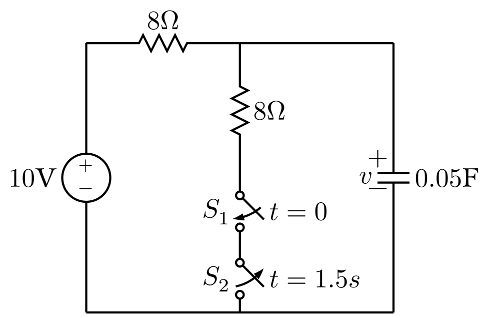
Στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα έχουμε

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 34.5[1 - e^{-t/\tau}]$$

όπου $v_C(0) = 0$, $v_C(\infty) = 34.5$ και $\tau = RC = 27.7$ ms εφόσον $R = 41 + (41 \parallel 41) = 61.5\ \Omega$. Προφανώς, $v_{C\max} = 34.5$ V. Οπότε η χρονική στιγμή $t = t_0$ όπου $v_C = (3/4)v_{C\max}$ υπολογίζεται από

$$v_C(t_0) = \frac{3}{4}v_{C\max} = v_{C\max}[1 - e^{-t_0/\tau}] \ \Rightarrow\ t_0 = \tau\ln(4) = 38.4 \text{ ms}$$

Παράδειγμα 1.6. *Στο κύκλωμα του Σχ. 13 ο διακόπτης S_1 είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει. Μετά από 1.5 s ο διακόπτης S_2 ανοίγει. Ποια είναι η τάση $v(t)$ για $t > 0$;*



Σχήμα 13: Κύκλωμα παραδείγματος 1.6.

Εφόσον ο διακόπτης S_1 ήταν ανοικτός, δεν περνούσε ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο. Επίσης, εφόσον ο πυκνωτής δρα σαν διακόπτης, στη σταθερή κατάσταση, στο συνεχές, δεν έχουμε ρεύμα και στον εξωτερικό βρόγχο. Επομένως, $v(0) = 10$ V.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης S_1, άρα περνάει ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο. Αλλάζει επίσης η τάση στα άκρα του πυκνωτή άρα έχουμε και εκεί ρεύμα και ο πυκνωτής φορτίζεται/εκφορτίζεται (;) Η τελική κατάσταση εδώ, με τον διακόπτη S_1 κλειστό (διαιρέτης τάσης) είναι

$$v(\infty) = \frac{8}{8+8}10 = 5 \text{ V}$$

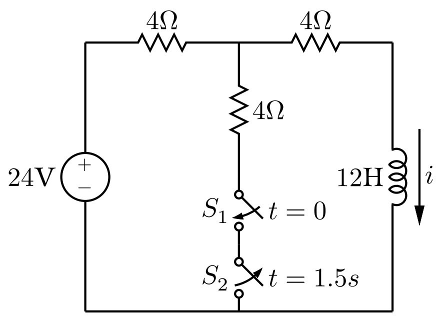
Η αντίσταση που βλέπει ο πυκνωτής είναι $8 \parallel 8 = 4\ \Omega$ άρα η σταθερά χρόνου είναι $\tau_1 = RC = 0.2$ s. Η τάση για το διάστημα $0 < t < 1.5$ είναι

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau_1} = 5 + (10-5)e^{-t/\tau_1} = 5 + 5e^{-5t} \text{ V}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1.5$ s ανοίγει ο διακόπτης S_2. Η τιμή της τάσης είναι $v(1.5) = 5.003$ V. Όταν περάσει αρκετός χρόνος η τάση θα γίνει $v(\infty) = 10$ V. Η αντίσταση που βλέπει ο πυκνωτής τώρα είναι 8 Ω άρα η σταθερά χρόνου είναι $\tau_2 = RC = 0.4$ s. Η τάση για το διάστημα $t > 1.5$ είναι

$$v(t) = v(\infty) + [v(1.5) - v(\infty)]e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 10 + (5.003 - 10)e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 10 - 4.997e^{-2.5(t-1.5)} \text{ V}$$

Παράδειγμα 1.7. *Στο κύκλωμα του Σχ. 14 ο διακόπτης S_1 είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει. Μετά από 1.5 s ο διακόπτης S_2 ανοίγει. Ποιο είναι το ρεύμα $i(t)$ για $t > 0$;*



Σχήμα 14: Κύκλωμα παραδείγματος 1.7.

Εφόσον ο διακόπτης S_1 ήταν ανοικτός, δεν περνούσε ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο. Επίσης, εφόσον το πηνίο δρα σαν βραχυκύκλωμα, στη σταθερή κατάσταση, στο συνεχές, το ρεύμα στον εξωτερικό βρόγχο είναι $i(0) = 24/8 = 3$ A.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης S_1, άρα περνάει ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο και αλλάζει το ρεύμα που περνά από το πηνίο. Η τελική κατάσταση εδώ, με τον διακόπτη S_1 κλειστό είναι

$$i(\infty) = \frac{8}{4} = 2 \text{ A}$$

όπου τα 8 V είναι η τάση στα άκρα του δεξιού κλάδου. Η αντίσταση που βλέπει το πηνίο είναι 6 Ω άρα η σταθερά χρόνου είναι $\tau_1 = L/R = 2$ s. Το ρεύμα για το διάστημα $0 < t < 1.5$ είναι

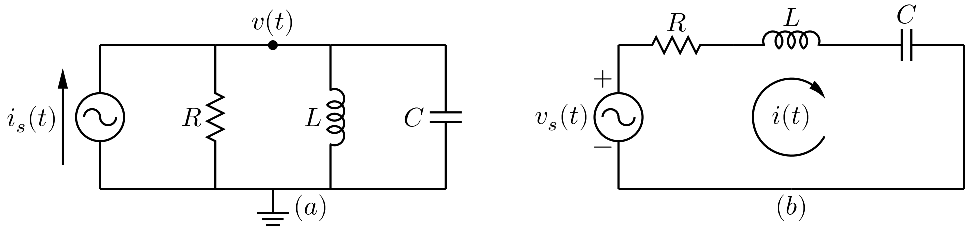
$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau_1} = 2 + (3-2)e^{-t/\tau_1} = 2 + e^{-0.5t} \text{ A}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1.5$ s ανοίγει ο διακόπτης S_2. Η τιμή του ρεύματος είναι $i(1.5) = 2.4724$ A. Όταν περάσει αρκετός χρόνος το ρεύμα θα γίνει $i(\infty) = 3$ A. Η αντίσταση που βλέπει το πηνίο τώρα είναι 8 Ω άρα η σταθερά χρόνου είναι $\tau_2 = L/R = 1.5$ s. Το ρεύμα για το διάστημα $t > 1.5$ είναι

$$i(t) = i(\infty) + [i(1.5) - i(\infty)]e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 3 + (2.4724 - 3)e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 3 - 0.523e^{-0.667(t-1.5)} \text{ A}$$

1.10 Συστήματα 2ας τάξης, με ένα βαθμό ελευθερίας

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας είναι τα συστήματα που μπορούν να περιγραφούν πλήρως με μια μεταβλητή (π.χ.\ τάση ή ρεύμα). Μια διαφορική εξίσωση αρκεί για την μαθηματική περιγραφή τους. 2ας τάξης είναι τα συστήματα με δυο στοιχεία ικανά να αποθηκεύσουν ενέργεια, δηλ. ένα πηνίο και ένα πυκνωτή, δυο πηνία ή δυο πυκνωτές. Στα παρακάτω θα δούμε την πρώτη περίπτωση, ένα πηνίο και ένα πυκνωτή σε παράλληλη ή εν σειρά συνδεσμολογία.



Σχήμα 15: Κύκλωμα 2ας τάξης RLC παράλληλο (a) και σε σειρά (b).

Στο κύκλωμα (a) για παράδειγμα, ο κανόνας Kirchhoff των ρευμάτων για τον επάνω κόμβο γίνεται

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_L(t_0) + C\frac{dv(t)}{dt} = i_s(t)$$

Ομοίως, για το κύκλωμα (b), ο κανόνας Kirchhoff των τάσεων για τον βρόγχο γίνεται

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_C(t_0) + L\frac{di(t)}{dt} = v_s(t)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παραγωγίζονται ως προς τον χρόνο για να φύγει το ολοκλήρωμα, διαιρούνται και με το συντελεστή της δευτέρας παραγώγου για να καταλήξουν αντίστοιχα

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{LC} = \frac{1}{C}\frac{di_s(t)}{dt}$$

και

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = \frac{1}{L}\frac{dv_s(t)}{dt}$$

Και οι δυο παραπάνω εξισώσεις είναι της μορφής

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t) \tag{6}$$

όπου $x(t)$ η μεταβλητή που χαρακτηρίζει το σύστημα (τάση ή ρεύμα), α, ο συντελεστής απόσβεσης, ω_0, η φυσική συχνότητα του συστήματος και $f(t)$, η εξωτερική διέγερση. Η φυσική συχνότητα και για τις δυο δομές είναι

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

γνωστή από το συντονισμό, ενώ ο συντελεστής απόσβεσης είναι

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \text{και} \qquad \alpha = \frac{R}{2L}$$

για την παράλληλο και εν σειρά δομή αντίστοιχα.

Η πλήρης λύση της εξίσωσης 6 είναι το άθροισμα της λύσης για το ομογενές πρόβλημα, $x_H(t)$, όπου $f(t) = 0$ και της μερικής λύσης, $x_P(t)$, όπου $f(t) \neq 0$.

1.11 Ομογενές πρόβλημα

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Δεχόμαστε λύση της μορφής Ae^{st} και έχουμε

$$Ae^{st}(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2) = 0 \;\Rightarrow\; s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

εφόσον $A \neq 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση: $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$, έχει ρίζες: $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

Όταν $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, οι ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους και η λύση είναι της μορφής

$$x_H(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Όταν $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$, έχουμε διπλή, πραγματική ρίζα $s_{1,2} = -\alpha$, και η λύση είναι της μορφής

$$x_H(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

Όταν $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, έχουμε δυο μιγαδικές συζυγείς ρίζες και η λύση είναι της μορφής

$$x_H(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right] \qquad \text{όπου} \qquad \omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

Και στις τρεις περιπτώσεις οι σταθερές A_1, A_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 1.8. *Να βρεθεί η λύση του ομογενούς προβλήματος, για $t > 0$, για την παράλληλη δομή RLC, όταν $R = 2/3$ Ω, $L = 1$ H, $C = 1/2$ F και οι αρχικές συνθήκες είναι $v(0) = 10$ V, $i_L(0) = 2$ A.*

Έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 1.5 \;\Rightarrow\; \alpha^2 = 2.25 \qquad \text{και} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2$$

Οπότε εφόσον $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0.25 > 0$ έχουμε ισχυρή απόσβεση με δυο ρίζες πραγματικές: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$. Η λύση επομένως του ομογενούς προβλήματος για την τάση είναι

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

Μια από τις αρχικές συνθήκες είναι $i_L(0) = 2$. Η σχέση μεταξύ των $i_L(t)$ και $v(t)$ είναι $v(t) = L\, di_L(t)/dt$. Οπότε

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt = \int \left(A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}\right) dt = -A_1 e^{-t} - \frac{A_2}{2} e^{-2t}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποφύγουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C\frac{dv(t)}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; i_L(t) = A_1 e^{-t}\left(C - \frac{1}{R}\right) + A_2 e^{-2t}\left(2C - \frac{1}{R}\right) = -A_1 e^{-t} - \frac{A_2}{2} e^{-2t}$$

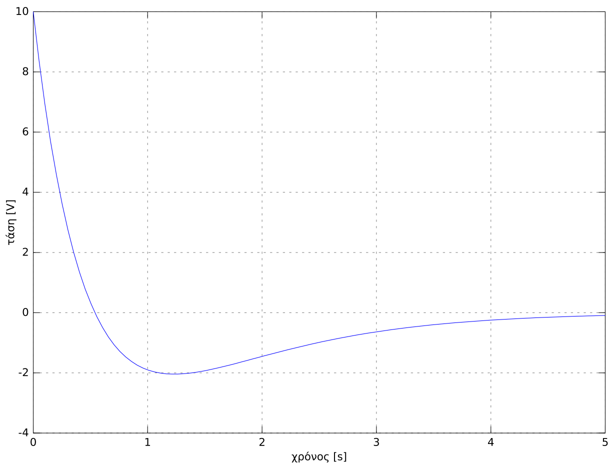
με ίδιο αποτέλεσμα. Οπότε

$$\left.\begin{array}{rcl} v(0) & = & A_1 + A_2 \\ i_L(0) & = & -A_1 - A_2/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 10 & = & A_1 + A_2 \\ 2 & = & -A_1 - A_2/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 10 & = & A_1 + A_2 \\ 12 & = & A_2/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} A_1 & = & -14 \\ A_2 & = & 24 \end{array}$$

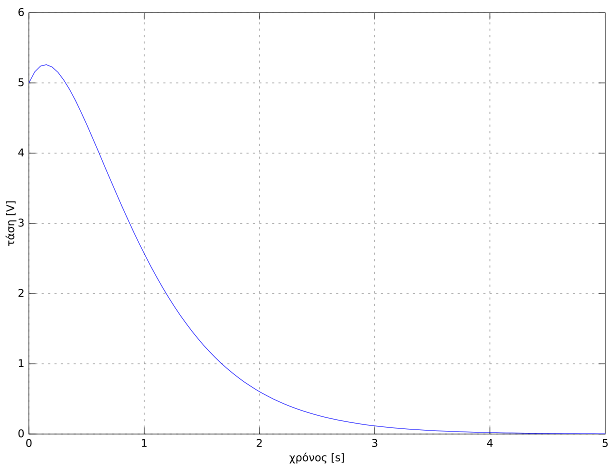
και η λύση είναι

$$v(t) = -14e^{-t} + 24e^{-2t} \text{ V}$$

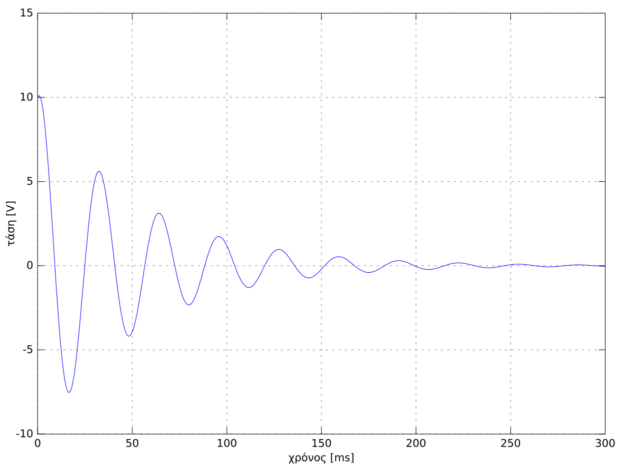
Παράδειγμα 1.9. *Να βρεθεί η λύση του ομογενούς προβλήματος, για $t > 0$, για την παράλληλη δομή RLC, όταν $R = 1$ Ω, $L = 1$ H, $C = 1/4$ F και οι αρχικές συνθήκες είναι $v(0) = 5$ V, $i_L(0) = -6$ A.*



Σχήμα 16: Απόκριση του κυκλώματος 1.8.



Σχήμα 17: Απόκριση του κυκλώματος 1.9.



Σχήμα 18: Απόκριση του κυκλώματος 1.10.

Έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2 \;\Rightarrow\; \alpha^2 = 4 \qquad \text{και} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 4$$

Οπότε εφόσον $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$ έχουμε κρίσιμη απόσβεση με μια διπλή ρίζα: $s_1 = -2$. Η λύση επομένως του ομογενούς προβλήματος για την τάση είναι

$$v(t) = e^{-2t}(A_1 t + A_2)$$

Μια από τις αρχικές συνθήκες είναι $i_L(0) = -6$. Η σχέση μεταξύ των $i_L(t)$ και $v(t)$ είναι $v(t) = L\; di_L(t)/dt$. Οπότε

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt = \int (A_1 t + A_2)\, e^{-2t} dt = \cdots = -\left(\frac{2t+1}{4}A_1 + \frac{1}{2}A_2\right) e^{-2t}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποφύγουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C\frac{dv(t)}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; i_L(t) = \cdots = -\left(\frac{2t+1}{4}A_1 + \frac{1}{2}A_2\right) e^{-2t}$$

με ίδιο αποτέλεσμα. Οπότε

$$\left.\begin{array}{rcl} v(0) & = & A_2 \\ i_L(0) & = & -A_1/4 - A_2/2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rcl} A_1 & = & 14 \\ A_2 & = & 5 \end{array}$$

και η λύση είναι

$$v(t) = e^{-2t}(14t + 5)\ \mathrm{V}$$

Παράδειγμα 1.10. *Να βρεθεί η λύση του ομογενούς προβλήματος, για $t > 0$, για την παράλληλη δομή RLC, όταν $R = 9\ \Omega$, $L = 8.4$ mH, $C = 3$ mF και οι αρχικές συνθήκες είναι $v(0) = 10$ V, $i_L(0) = -2$ A.*

Έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 18.52 \;\Rightarrow\; \alpha^2 = 342.9 \qquad \text{και} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 39683$$

Οπότε εφόσον $\alpha^2 - \omega_0^2 = -39340 < 0$ έχουμε δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες. Μας ενδιαφέρει η συχνότητα απόσβεσης $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 198.3$ rad/s και η λύση του ομογενούς προβλήματος για την τάση είναι

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]$$

Μια από τις αρχικές συνθήκες είναι $i_L(0) = -2$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C\frac{dv(t)}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; i_L(t) = -\frac{v(t)}{R} - C\frac{dv(t)}{dt} =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha t}\left[A_1\cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]}{R} - Ce^{-\alpha t}\left[(-\alpha A_1 + \omega_d A_2)\cos(\omega_d t) - (\alpha A_2 + \omega_d A_1)\sin(\omega_d t)\right]$$

Οπότε

$$\left.\begin{array}{rcl} v(0) & = & 10 \;=\; A_1 \\ i_L(0) & = & -2 \;=\; \left(C\alpha - \dfrac{1}{R}\right)A_1 - C\omega_d A_2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rcl} A_1 & = & 10 \\ A_2 & = & 2.43 \end{array}$$

και η λύση είναι

$$v(t) = e^{-18.52t}\Big[10\cos(198.3t) + 2.43\sin(198.3t)\Big]\ \mathrm{V}$$

1.12 Μη ομογενές πρόβλημα

Στο μη ομογενές πρόβλημα δοκιμάζουμε λύση ίδιας μορφής με τη διέγερση. Π.χ. αν $v_s(t) = V_0\cos(\omega_s t)$ δοκιμάζουμε λύση της μορφής $v_P(t) = B_1\cos(\omega_s t) + B_2 \sin(\omega_s t)$, προσδιορίζουμε τους συντελεστές και προσθέτουμε την $v_P(t)$ στην $v_H(t)$ για να έχουμε την ολική λύση. Η διαδικασία είναι επίπονη γιαυτό έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που την κάνουν πιο απλή. Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στον μετασχηματισμό Laplace που μετατρέπει διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές σε απλές αλγεβρικές λαμβάνοντας αυτόματα υπόψη τις αρχικές συνθήκες.