Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

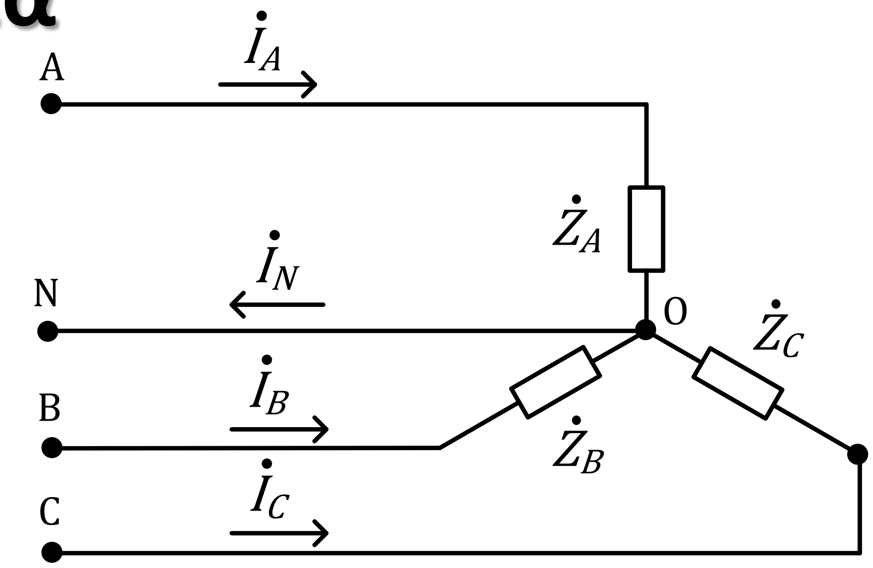
Διάλεξη 10

Α. Δροσόπουλος

23-05-2024

Outline

Στιγμιαία ισχύς σε συμμετρικά τριφασικά κυκλώματα



- Έστω ότι το φορτίο είναι συμμετρικό και είναι συνδεδεμένο σε Y.
- Οι συναρτήσεις των τάσεων των τριών φάσεων είναι

$$u_A(t) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t + 90°)$$

$$u_B(t) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t - 30°)$$

$$u_C(t) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t - 150°) = U_\varphi\sqrt{2}\cos(\omega t + 210°)$$

- Τότε τα ρεύματα που παράγονται από την τριφασική πηγή είναι

$$i_A(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + 90° - \varphi)$$

$$i_B(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - 30° - \varphi)$$

$$i_C(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + 210° - \varphi)$$

Στιγμιαία ισχύς σε συμμετρικά τριφασικά κυκλώματα

- Η στιγμιαία ισχύς που παράγεται από την πηγή είναι

$$\begin{aligned} p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) &= u_A(t)i_A(t) + u_B(t)i_B(t) + u_C(t)i_C(t) \\ &= 2U_\varphi I[\cos(\omega t + 90°)\cos(\omega t + 90° - \varphi) \\ &+ \cos(\omega t - 30°)\cos(\omega t - 30° - \varphi) \\ &+ \cos(\omega t + 210°)\cos(\omega t + 210° - \varphi)] \end{aligned}$$

- Επειδή όμως $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} p(t) = U_\varphi I[&\cos\varphi + \cos(2\omega t - \theta + 180°) + \cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi - 60°) \\ &+ \cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi + 60°)] = 3U_\varphi I\cos\varphi \end{aligned}$$

- Δηλαδή η συνολική στιγμιαία ισχύς είναι σταθερή και όχι μεταβαλλόμενη όπως είναι η στιγμιαία ισχύς της κάθε φάσης. Αυτό ισχύει είτε το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε Y είτε σε Δ.

Ενεργός ισχύς

- Έστω ότι το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε Y.
- Η ενεργός ισχύς γενικά είναι

$$P = U_A I_A \cos\varphi_A + U_B I_B \cos\varphi_B + U_C I_C \cos\varphi_C$$

όπου φ_A, φ_B, φ_C οι γωνίες μεταξύ φασικών τάσεων και των αντίστοιχων ρευμάτων των κλάδων του αστέρα, που είναι ίδια με τα ρεύματα των γραμμών. Είναι επίσης οι γωνίες των συνθέτων αντιστάσεων $\dot{Z}_A$, $\dot{Z}_B$ και $\dot{Z}_C$.

- Η πηγή θεωρείται συμμετρική, επομένως

$$U_A = U_B = U_C = U_\varphi = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

- Αν το φορτίο είναι επίσης συμμετρικό, τότε

$$I_A = I_B = I_C = I$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$$

- Επομένως

$$P = 3U_\varphi I \cos\varphi = 3\frac{U}{\sqrt{3}} I \cos\varphi = \sqrt{3} U I \cos\varphi$$

Ενεργός ισχύς

- Έστω τώρα ότι το φορτίο είναι συνδεδεμένο σε Δ.
- Η ενεργός ισχύς γενικά είναι

$$P = U_{AB} I_{AB} \cos \varphi_{AB} + U_{BC} I_{BC} \cos \varphi_{BC} + U_{CA} I_{CA} \cos \varphi_{CA}$$

  όπου φ_{AB}, φ_{BC}, φ_{CA} οι γωνίες μεταξύ πολικών τάσεων και των αντίστοιχων ρευμάτων των κλάδων του Δ, που είναι οι γωνίες των $\dot{Z}_{AB}$, $\dot{Z}_{BC}$ και $\dot{Z}_{CA}$.
- Η πηγή θεωρείται συμμετρική, επομένως

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U$$

- Αν το φορτίο είναι επίσης συμμετρικό, τότε

$$I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_{\Delta} = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA} = \varphi$$

- Επομένως

$$P = 3UI_{\Delta} \cos \varphi = 3U \frac{I}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

Άεργος, φαινομένη, μιγαδική ισχύς

- Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι στην περίπτωση του συμμετρικού Υ η άεργος είναι

$$Q = 3U_\varphi I \sin\varphi = \sqrt{3}UI \sin\varphi$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

$$S = 3U_\varphi I = \sqrt{3}UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = 3\dot{U}_A \dot{I}_A^{\,*} = P + jQ = 3U_\varphi I\angle\varphi = \sqrt{3}UI\angle\varphi$$

- Στην περίπτωση του συμμετρικού Δ η άεργος είναι

$$Q = 3UI_\Delta \sin\varphi = \sqrt{3}UI \sin\varphi$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

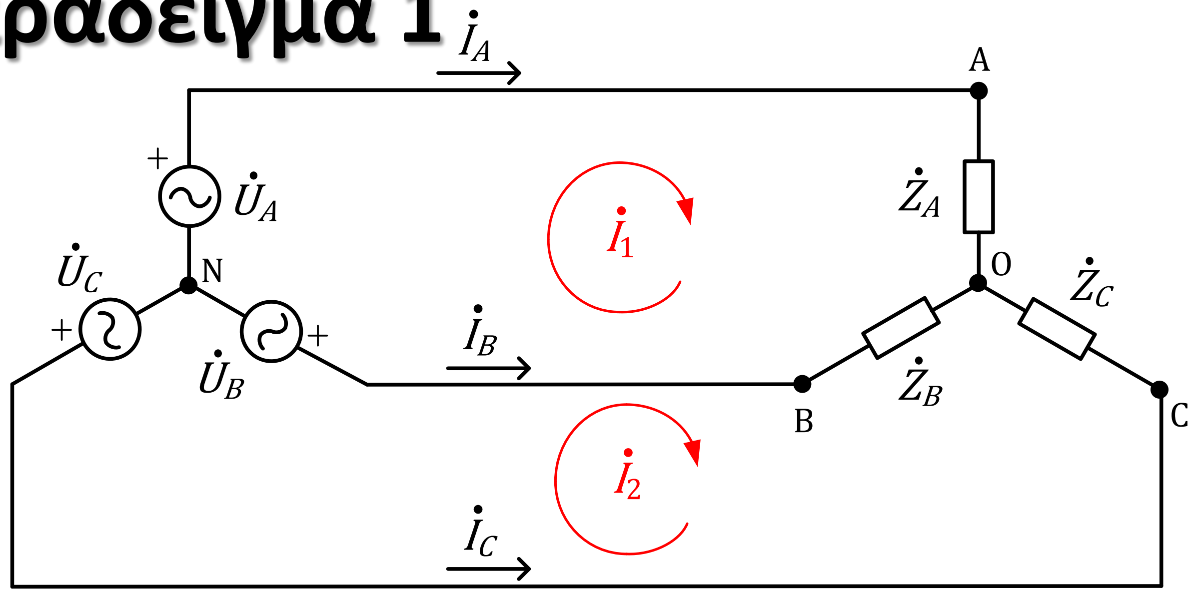
$$S = 3I_\Delta I = \sqrt{3}UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = 3\dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB}^{\,*} = P + jQ = 3UI_\Delta\angle\varphi = \sqrt{3}UI\angle\varphi$$

Παράδειγμα 1

- Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $U_\varphi = 230$ V, $\dot{Z}_A = 20 + j15\ \Omega$, $\dot{Z}_B = 15 + j10\ \Omega$, $\dot{Z}_C = 10 - j18\ \Omega$.
- Να βρεθεί η μιγαδική ισχύς που απορροφά το φορτίο.



- Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.

Απάντηση:

- Έχουν υπολογιστεί τα εξής (Παράδειγμα 7 μαθήματος 7):

$$\dot{U}_{AO} = \dot{I}_A \dot{Z}_A = 250.8\angle 123.4°\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{BO} = \dot{I}_B \dot{Z}_B = 148.8\angle(-65.8°)\ \text{V}$$

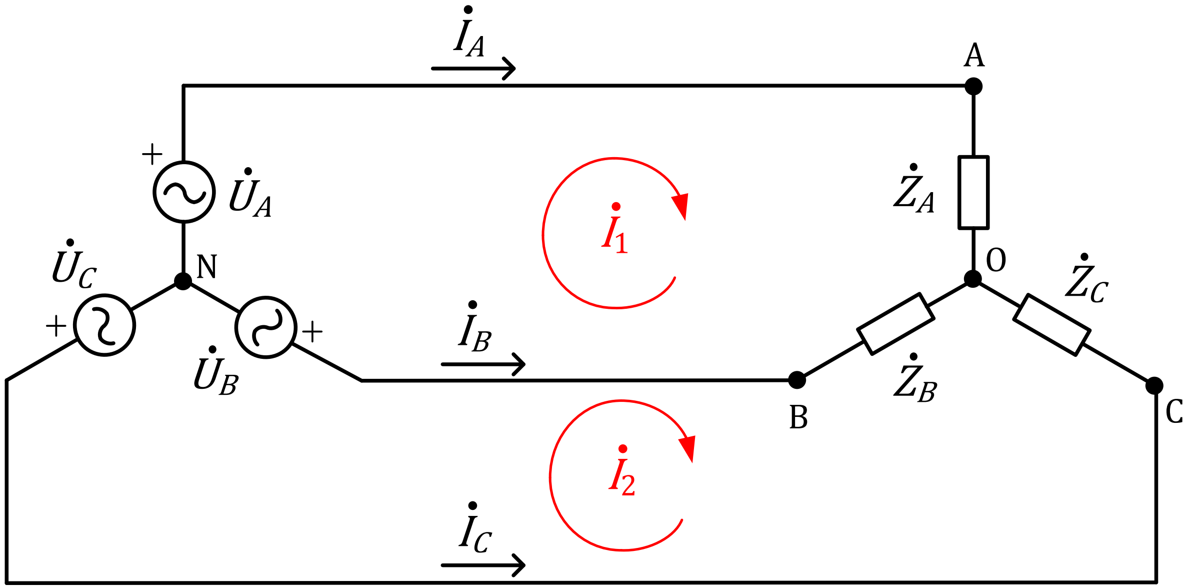
$$\dot{U}_{CO} = \dot{I}_C \dot{Z}_C = 363.6\angle(-158.1°)\ \text{V}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = 10.032\angle 86.6°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_B = (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 8.252\angle(-99.5°)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_2 = 2.02\angle(-68.1°)\ \text{A}$$

Παράδειγμα 1



- Η μιγαδική ισχύς του φορτίου είναι

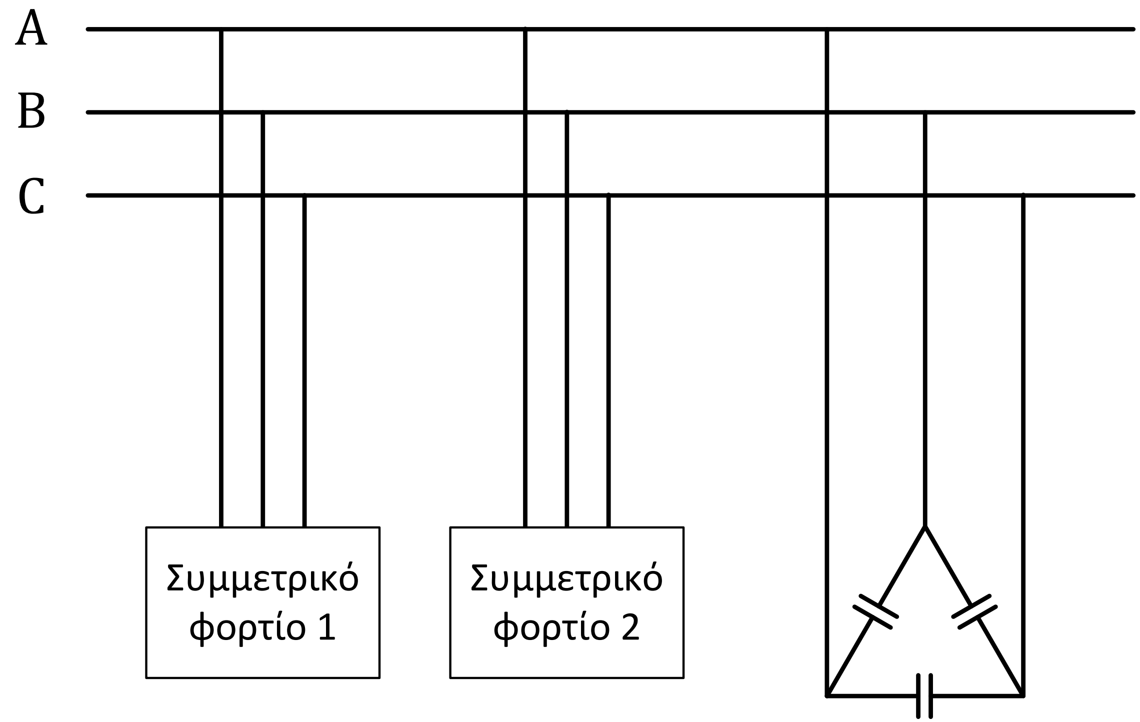
$$\dot{S} = \dot{S}_A + \dot{S}_B + \dot{S}_C = \dot{U}_{AO}\dot{I}_A{}^* + \dot{U}_{BO}\dot{I}_B{}^* + \dot{U}_{CO}\dot{I}_C{}^* = 3034 + j1456 \text{ VA}$$

- Η μιγαδική ισχύς της πηγής είναι

$$\dot{S}' = \dot{S}_A{}' + \dot{S}_B{}' + \dot{S}_C{}' = \dot{U}_{AN}\dot{I}_A{}^* + \dot{U}_{BN}\dot{I}_B{}^* + \dot{U}_{CN}\dot{I}_C{}^* = 3034 + j1456 \text{ VA}$$

Παράδειγμα 2

- Δύο συμμετρικά τριφασικά φορτία συνδέονται σε γραμμή $400\ \mathrm{V}$, $50\ \mathrm{Hz}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το φορτίο 1 απορροφά $9\ \mathrm{kW}$ με συντελεστή ισχύος 0.8 επαγωγικό και το φορτίο 2 απορροφά $15\ \mathrm{kVar}$ με συντελεστή ισχύος 0.7 επαγωγικό.



- Παράλληλα στα φορτία συνδέεται συστοιχία πυκνωτών συνδεδεμένων σε Δ για αύξηση του συνολικού συντελεστή ισχύος σε 0.93 επαγωγικό.
- Να βρεθεί το ρεύμα γραμμής, η συνολική ενεργός και άεργος ισχύς του φορτίου και η τιμή της χωρητικότητας κάθε πυκνωτή της συστοιχίας. Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.

Παράδειγμα 2

Απάντηση:

- Όταν δίνεται τιμή τάσης χωρίς να διευκρινίζεται αν είναι πολική ή φασική τότε θεωρούμε ότι είναι πολική.
- Για το φορτίο 1 η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης – ρεύματος σε κάθε κλάδο είναι

$$\varphi_1 = \cos^{-1}0.8 = 36.9°$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_1} = 11.3 \text{ kVA}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S}_1 = 11.3\angle 36.9° = 9 + j6.8 \text{ kVA}$$

- Το ρεύμα είναι

$$I_1 = \frac{S_1}{\sqrt{3}U} = 16.2 \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = 16.2\angle(-36.9°) \text{ A}$$

Παράδειγμα 2

- Για το φορτίο 2:

$$\varphi_2 = \cos^{-1} 0.7 = 45.6°$$

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin \varphi_2} = 21 \text{ kVA}$$

$$\dot{S}_2 = 21\angle 45.6° = 14.7 + j15 \text{ kVA}$$

$$I_2 = \frac{S_2}{\sqrt{3}U} = 30.3 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 30.3\angle(-45.6°) \text{ A}$$

- Το συνολικό ρεύμα γραμμής θα είναι

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 34.2 - j31.4 = 46.4\angle(-42.5°) \text{ A}$$

- Η συνολική μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = 23.7 + j21.8 = 32.2\angle 42.5° \text{ kVA}$$

- Επομένως η διαφορά φάσης για το **συνολικό φορτίο** είναι $42.5°$.
- Η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = 23.7 \text{ kW}$$

Παράδειγμα 2

- Η γωνία του διορθωμένου συντελεστή ισχύος του συνολικού φορτίου πρέπει να είναι

$$\varphi' = \cos^{-1}(0.93) = 21.6°$$

- Άρα οι πυκνωτές πρέπει να παράγουν

$$Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi') = 23.7(\tan 42.5° - \tan 21.6°) = 12.4\ \text{kVar}$$

- Ο κάθε πυκνωτής πρέπει να παράγει

$$Q_{C1} = \frac{Q_C}{3} = 4.13\ \text{kVar}$$

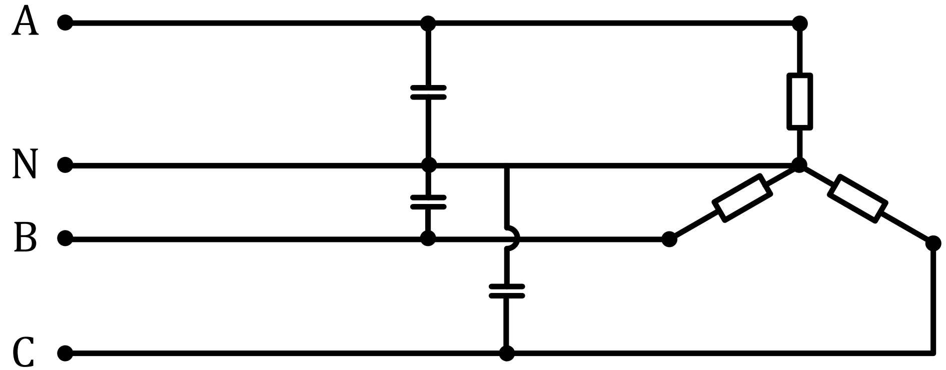
- Και επειδή η τάση στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι η πολική τάση της πηγής U πρέπει ο κάθε πυκνωτής να έχει χωρητικότητα

$$C = \frac{Q_{C1}}{2\pi f U^2} = 82\ \mu\text{F}$$

- Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό ρεύμα γραμμής στην περίπτωση αυτή. Προσοχή: Δεν προστίθενται αλγεβρικά τα επιμέρους ρεύματα.

Παράδειγμα 3

- Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεσμολογίας Y 4 αγωγών τροφοδοτείται από πηγή $U = 40\ \mathrm{kV}$, $50\ \mathrm{Hz}$. Η φαινομένη ισχύς του φορτίου είναι $3.5\ \mathrm{kVA}$ και ο συντελεστής ισχύος του 0.72 επαγωγικός. Να βρεθεί η χωρητικότητα των πυκνωτών που πρέπει να συνδεθούν παράλληλα στο φορτίο ώστε ο συντελεστής ισχύος να γίνει 0.94 επαγωγικός. Να θεωρήσετε ότι οι πυκνωτές συνδέονται επίσης σε Y, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Απάντηση:

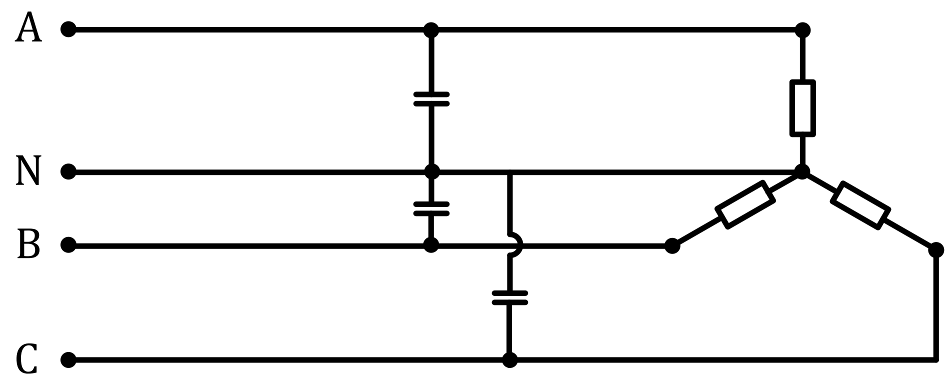
- Η γωνία του αρχικού συντελεστή ισχύος είναι

$$\varphi = \cos^{-1} 0.72 = 43.9°$$

- Η γωνία του διορθωμένου συντελεστή ισχύος είναι

$$\varphi' = \cos^{-1} 0.94 = 19.9°$$

Παράδειγμα 3



- Η ενεργός ισχύς του φορτίου είναι

$$P = 0.72 \cdot 3500 = 2520 \text{ W}$$

- Η άεργος της συστοιχίας των πυκνωτών πρέπει να είναι

$$Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi') = 1514 \text{ Var}$$

- Ο κάθε πυκνωτής της συστοιχίας θα παράγει

$$Q_{C1} = \frac{Q_C}{3} = 504.8 \text{ Var}$$

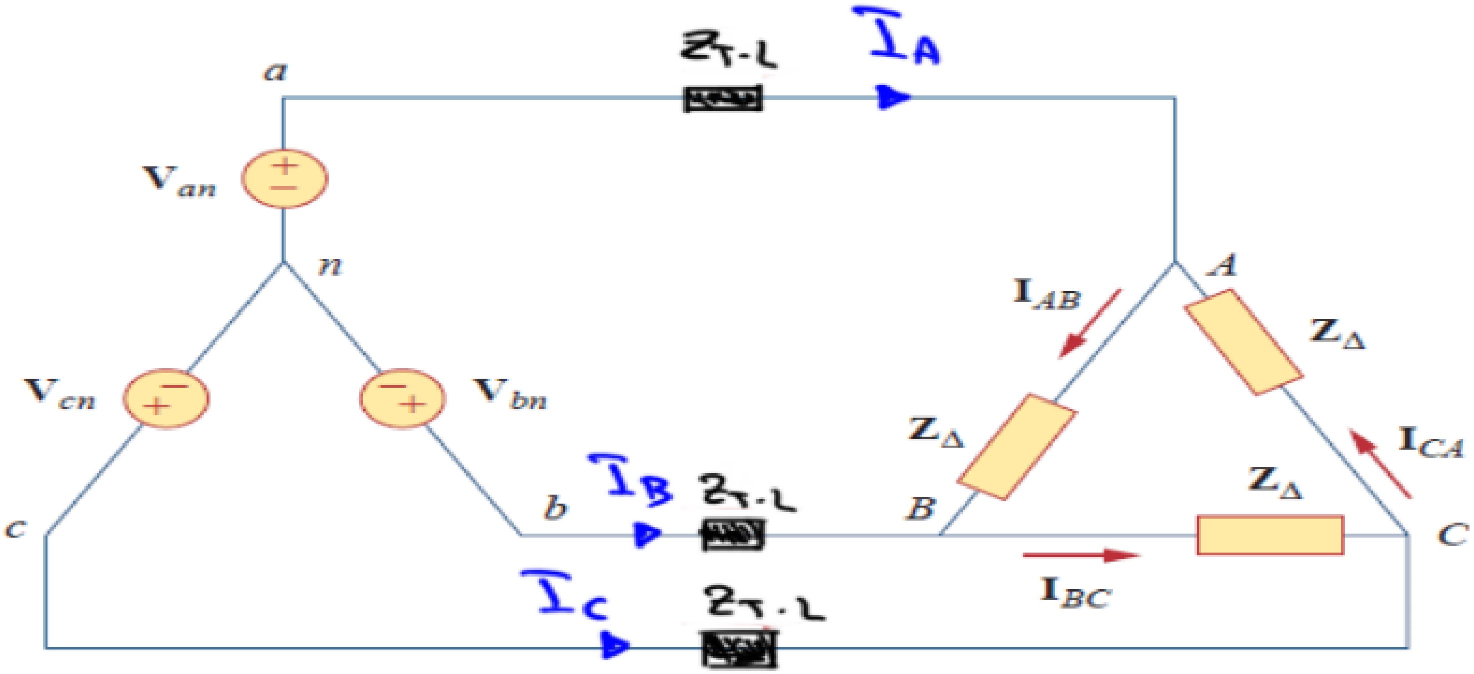
- Η τάση στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι ίση με τη φασική τάση της πηγής. Άρα η χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή πρέπει να είναι

$$C = \frac{Q_{C1}}{2\pi f\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2} = 30.1 \text{ μF}$$

Παράδειγμα

Συμμετρικό τριφασικό σύστημα με θετική διαδοχή φάσεων σε σύνδεση Υ-Δ έχει πολική τάση πηγής μέτρου 400 V. Οι εμπεδήσεις του φορτίου είναι $Z_{\Delta} = 60 + j40\ \Omega$ και της γραμμής μεταφοράς $Z_{TL} = 1 + j4\ \Omega$. Να υπολογιστούν:

1. Φασικά ρεύματα φορτίου και γραμμής.
2. Φασικές τάσεις φορτίου.
3. Μιγαδική ισχύς φορτίου και πηγής καθώς και συντελεστής ισχύος πηγής.



Παράδειγμα

$$V_{ab} = 400 \text{ V} \qquad \dot{V}_{an} = \frac{400}{\sqrt{3}}\underline{/0^\circ} = 230.94\underline{/0^\circ} \text{ V}$$

$$Z_\Delta = 60 + j40 = 72.11\underline{/33.7^\circ}\ \Omega \qquad Z_{TL} = 1 + j4 = 4.12\underline{/75.96^\circ}\ \Omega$$

Μετατρέποντας το φορτίο σε αστέρα έχουμε $Z_\Upsilon = Z_\Delta/3$ και από το πρώτο μονοφασικό και τη διαδοχή φάσεων

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{an}}{Z_{TL} + Z_\Upsilon} = 8.48\underline{/-39.5^\circ} \text{ A} \qquad \dot{I}_{AB} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}}\underline{/30^\circ} = 4.89\underline{/-9.53^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A\underline{/-120^\circ} = 8.48\underline{/-159.5^\circ} \text{ A} \qquad \dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB}\underline{/-120^\circ} = 4.89\underline{/-129.5^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A\underline{/120^\circ} = 8.48\underline{/80.5^\circ} \text{ A} \qquad \dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB}\underline{/120^\circ} = 4.89\underline{/110.5^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{V}_{AB} = \dot{I}_{AB} Z_\Delta = 353.1\underline{/24.1^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{AB}\underline{/-120^\circ} = 353.1\underline{/-95.8^\circ} \text{ V} \qquad \dot{V}_{CA} = \dot{V}_{AB}\underline{/120^\circ} = 353.1\underline{/144.1^\circ} \text{ V}$$

Παράδειγμα

Μιγαδική ισχύς φορτίου

$$\dot{S}_{3\phi} = 3\dot{V}_{\phi}\dot{I}_{\phi}^{*} = 3\dot{V}_{AB}\dot{I}_{AB}^{*} = 4315.9 + j2877.3 = 5187.1\underline{/33.7^{\circ}} \text{ VA}$$

Μιγαδική ισχύς γραμμής μεταφοράς

$$\dot{S}_{TL} = 3I_A^2 Z_{TL} = 215.79 + j863.18 = 889.75\underline{/75.96^{\circ}} \text{ VA}$$

Μιγαδική ισχύς πηγής

$$\dot{S} = \dot{S}_{3\phi} + \dot{S}_{TL} = 4531.7 + j3740.4 = 5876\underline{/39.5^{\circ}} \text{ VA}$$

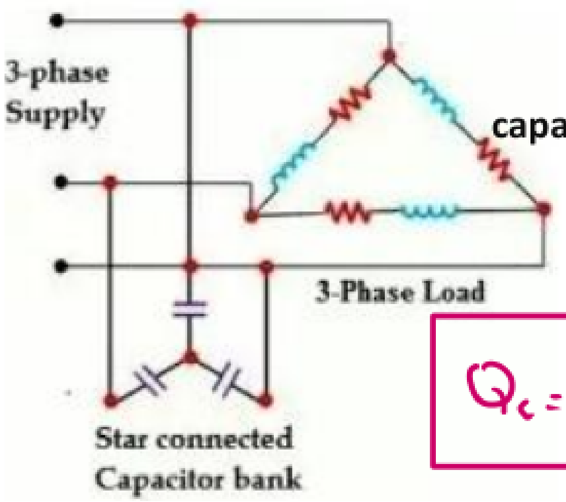
Συντελεστής ισχύος πηγής

$$\text{pf} = \frac{P}{S} = 0.771 \qquad \text{επαγωγικός}$$

Διόρθωση pf

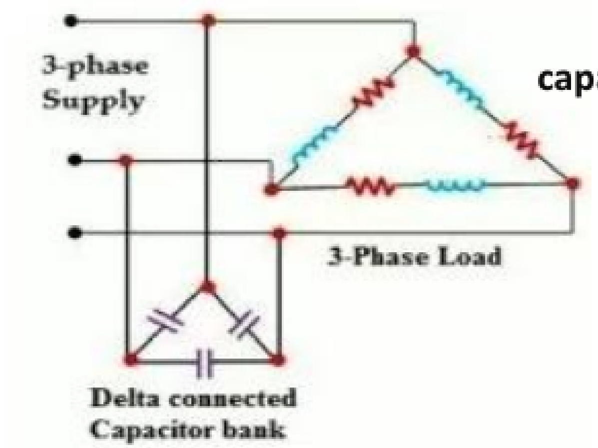
P.F Correction in 3-Phase Circuits

The capacitor bank may be connected star or delta



Star capacitor bank

$$\boxed{Q_c = P_{3\phi}\left[\tan\phi_1 - \tan\phi_2\right]}$$



Delta capacitor bank

$* \; Q_c = 3V_{ph}^2 \omega C$

$V_{ph} = V_L/\sqrt{3}$

$* \; Q_c = 3V_{ph}^2 \omega C$

$V_{ph} = V_L$

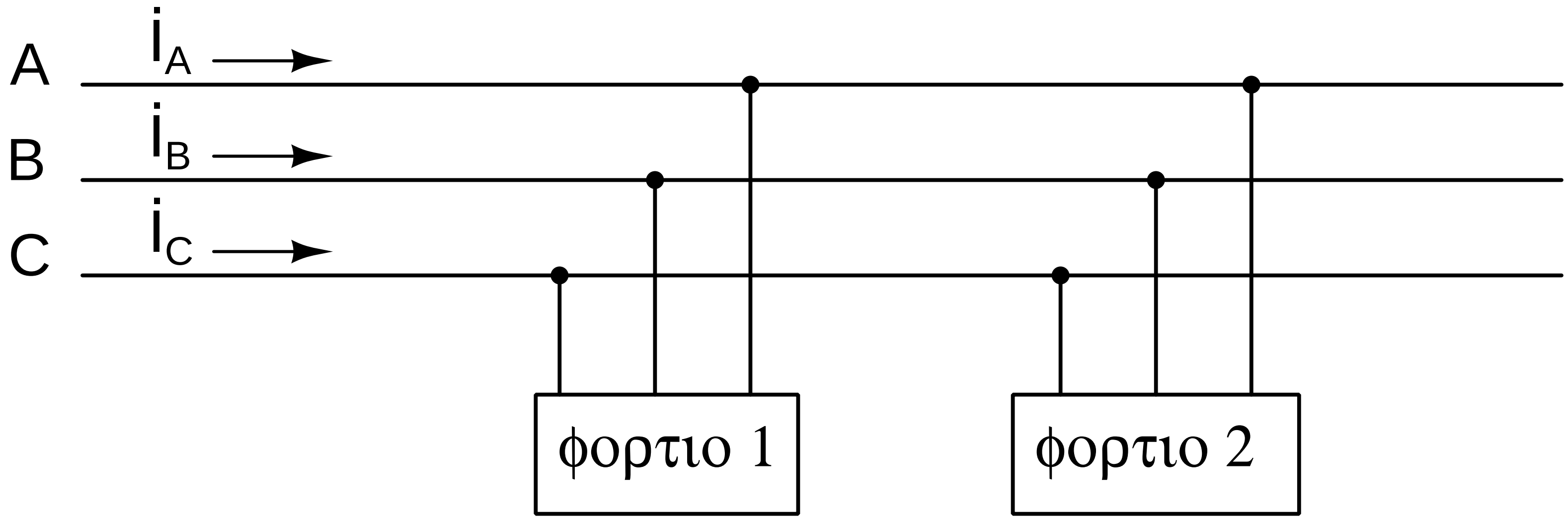
Παράδειγμα

Δυο παράλληλα συμμετρικά φορτία συνδέονται σε δίκτυο 240 kV, 60 Hz.

Φορτίο 1: 30 kW, pf 0.6 επαγωγικός
Φορτίο 2: 45 kVAR, pf 0.8 επαγωγικός

Να βρεθούν:

1. Μιγαδική, ενεργός και άεργος ισχύς για το συνολικό φορτίο.
2. Ρεύματα γραμμής για το ολικό φορτίο.
3. Άεργος ισχύς συστοιχίας πυκνωτών σε σύνδεση Δ για διόρθωση ολικού συντελεστού ισχύος σε 0.9 επαγωγικό. Ποια η χωρητικότητα κάθε φάσης;



Παράδειγμα

Φορτίο 1

$$P_1 = 30 \text{ kW}, \qquad \text{pf}_1 = 0.6, \qquad \phi_1 = \cos^{-1}(0.6) = 53.13^\circ$$

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos(\phi_1)} = 50 \text{ kVA} \qquad \dot{S}_1 = 50\underline{/53.13^\circ} \text{ kVA}$$

Φορτίο 2

$$Q_2 = 45 \text{ kVAR}, \qquad \text{pf}_2 = 0.8, \qquad \phi_2 = \cos^{-1}(0.8) = 36.87^\circ$$

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin(\phi_2)} = 75 \text{ kVA} \qquad \dot{S}_2 = 75\underline{/36.87^\circ} \text{ kVA}$$

Μιγαδική ισχύς ολικού φορτίου

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = 90 + j85 = 123.8\underline{/43.36^\circ} \text{ kVA}$$

Επίσης για $\dot{V}_L$, $\dot{I}_L$, μια πολική τάση και αντίστοιχο ρεύμα γραμμής

$$\dot{S} = \sqrt{3}\dot{V}_L \dot{I}_L^* = \sqrt{3}\dot{V}_{AB}\dot{I}_A^* \Rightarrow \dot{I}_A^* = \frac{90 + j85}{\sqrt{3} \cdot 240\underline{/0^\circ}} = 0.298\underline{/43.36^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_A = 0.298\underline{/-43.36^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A\underline{/-120^\circ} = 0.298\underline{/-163.36^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A\underline{/120^\circ} = 0.298\underline{/76.64^\circ} \text{ A}$$

Παράδειγμα

$$Q_c = P\Big[\tan(\phi_{\text{αρχ}}) - \tan(\phi_{\text{τελ}})\Big]$$

$$P = 90 \text{ kW}, \qquad \phi_{\text{αρχ}} = 43.36^\circ, \qquad \phi_{\text{τελ}} = \cos^{-1}(0.9) = 25.84^\circ$$

$$Q_c = 41.4 \text{ kVAR}$$

οπότε

$$Q_c = 3V_\phi^2 \omega C \Rightarrow C = 635.7 \text{ pF}$$