Ηλεκτρικά Κυκλώματα ΙΙ

Διάλεξη 05

Α. Δροσόπουλος

04-04-2024

Outline

Topic

1 Μεταβατικά

2 Laplace

Επίλυση ασκήσεων

- Έστω ότι ένα κύκλωμα περιλαμβάνει έναν επαγωγό ή πυκνωτή και τροφοδοτείται από σταθερή πηγή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγει ή κλείνει ένας διακόπτης σε κάποιο σημείο του κυκλώματος.
- Ζητείται η συνάρτηση που περιγράφει την τάση ή το ρεύμα $x(t)$ σε κάποιο στοιχείο του κυκλώματος.

Απάντηση:

- Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

- Θα περιγράψουμε έναν τρόπο για την εύρεση των K_1, K_2, τ. Προσοχή: Ισχύει μόνο για σταθερές πηγές.

Βήμα 1ο:

- Θεωρούμε ότι το κύκλωμα βρισκόταν στη μόνιμη κατάσταση πριν αλλάξει η θέση του διακόπτη. Πρόκειται για κύκλωμα με σταθερές πηγές. Αρκεί dc ανάλυση.

Επίλυση ασκήσεων

- Σχεδιάζουμε το κύκλωμα για αυτή την κατάσταση λειτουργίας αντικαθιστώντας τον πυκνωτή με ανοιχτοκύκλωμα και το πηνίο με βραχυκύκλωμα.
- Από αυτό το κύκλωμα βρίσκουμε την τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή $u_C(0^-)$ ή του ρεύματος στο πηνίο $i_L(0^-)$ πριν τη μετακίνηση του διακόπτη.

Βήμα 2ο:

- Σχεδιάζουμε το κύκλωμα όταν $t = 0^+$ με τους διακόπτες στη νέα τους θέση.
- Η τάση στα άκρα πυκνωτή και το ρεύμα σε πηνίο δεν μπορούν να μεταβληθούν ακαριαία. Άρα $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- Αντικαθιστούμε τον πυκνωτή με μια πηγή τάσης με τιμή $u_C(0^-)$ και το πηνίο με πηγή ρεύματος $i_L(0^-)$.
- Το κύκλωμα αυτό ισχύει μόνο για $t = 0^+$. Αμέσως μετά οι τιμές θα αρχίσουν να μεταβάλλονται.
- Μέσω αυτού του νέου κυκλώματος βρίσκουμε την αρχική τιμή $x(0^+)$ της μεταβλητής που ψάχνουμε.

Επίλυση ασκήσεων

Βήμα 3ο:

- Θεωρούμε ότι το κύκλωμα έχει φθάσει στη νέα μόνιμη κατάσταση ($t > 5\tau$), οπότε ο πυκνωτής δρα πάλι ως ανοιχτοκύκλωμα και το πηνίο ως βραχυκύκλωμα. Και πάλι αρκεί dc ανάλυση.
- Λύνουμε για να βρούμε την τιμή της $x(t)$ στη νέα μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Όταν $t \to \infty$, $e^{-at} \to 0$ και $x(\infty) = K_1$.

Βήμα 4ο:

- Βρίσκουμε τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος. Για να βρεθεί απαιτείται η ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin R_{th} στους ακροδέκτες του πυκνωτή (ή πηνίου). Θα είναι $\tau = R_{th}C$ για RC κύκλωμα και $\tau = L/R_{th}$ για RL κύκλωμα.
- Τελικά η συνολική λύση που ψάχνουμε θα είναι

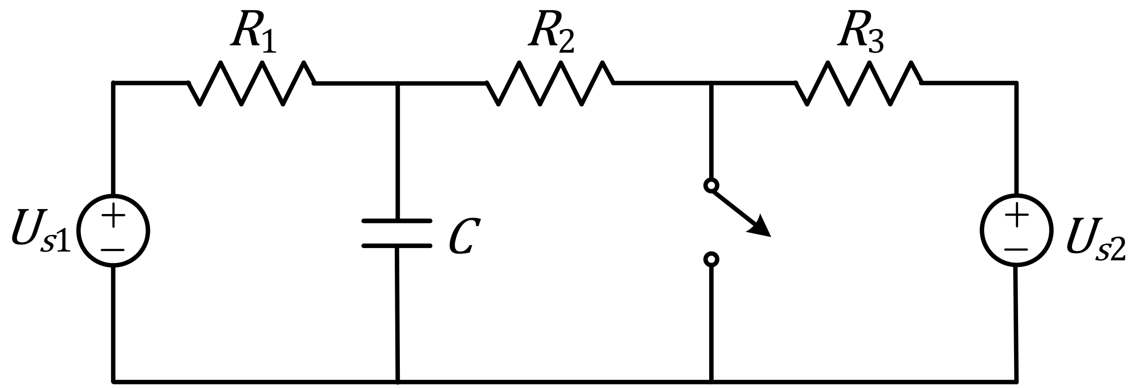
$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

όπου

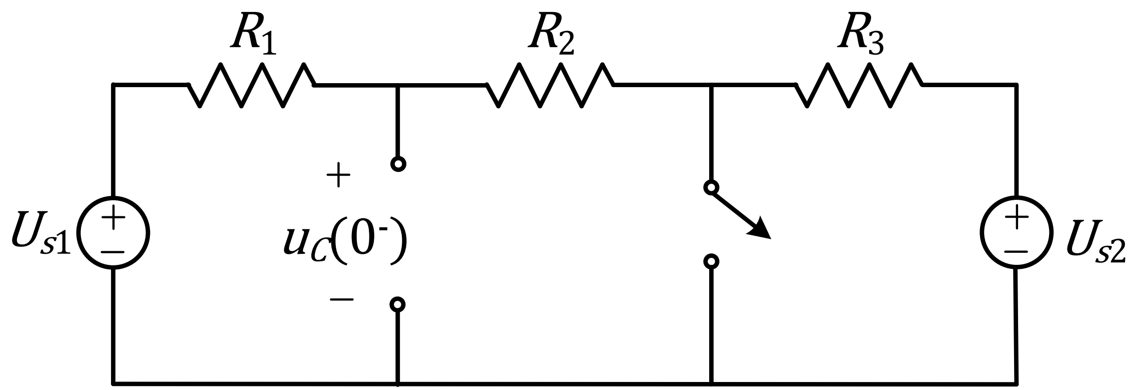
$$K_2 = x(0^+) - x(\infty)$$
$$K_1 = x(\infty)$$

Παράδειγμα 2

- Στο κύκλωμα (α) του σχήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης. Να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση R_2.
- Δίνονται: $U_{s1} = 24$ V, $U_{s2} = 12$ V $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 4$ kΩ, $R_3 = 6$ kΩ, $C = 0.1$ mF.



(α)



(β)

Απάντηση:

- Θεωρούμε ότι το ρεύμα έχει τη μορφή

$$i_{R2}(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

- Η αρχική τάση στα άκρα του πυκνωτή υπολογίζεται από το κύκλωμα (β).
- Το ρεύμα στο κύκλωμα αυτό βρίσκεται με εφαρμογή KVL ως εξής:

$$-U_{s1} + i(t)(R_1 + R_2 + R_3) + U_{s2} = 0 \Rightarrow i(t) = 1 \text{ mA}$$

Παράδειγμα 2

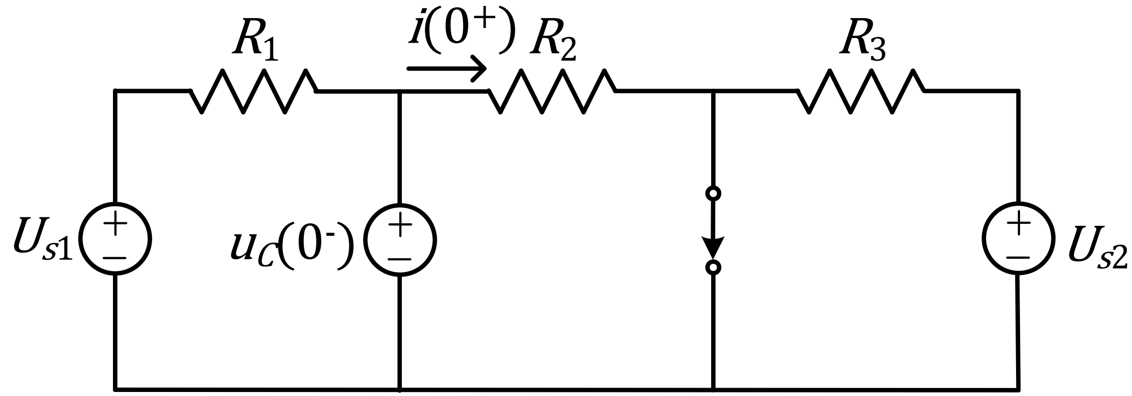
- Επομένως για $t = 0^-$ η τάση στον πυκνωτή είναι

$$u_C(0^-) = U_{s1} - i(t)R_1 = 24 - 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 22 \text{ V}$$

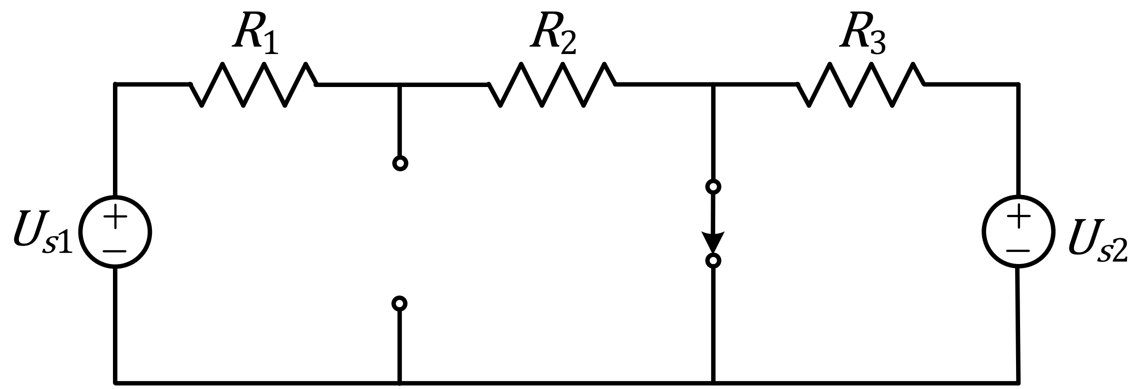
- Θεωρούμε τώρα ότι κλείνει ο διακόπτης.
- Η τιμή του ρεύματος που ζητείται τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ βρίσκεται από το κύκλωμα (γ).
- Παρατηρούμε ότι στα άκρα της αντίστασης αυτής η τάση είναι $u_C(0^-)$. Άρα

$$i(0^+) = \frac{u_C(0^-)}{R_2} = \frac{22}{4} = 5.5 \text{ mA}$$

- Βρήκαμε δηλαδή την αρχική τιμή του.
- Η τελική τιμή του (όταν $t \to \infty$) βρίσκεται από το κύκλωμα (δ).



(γ)

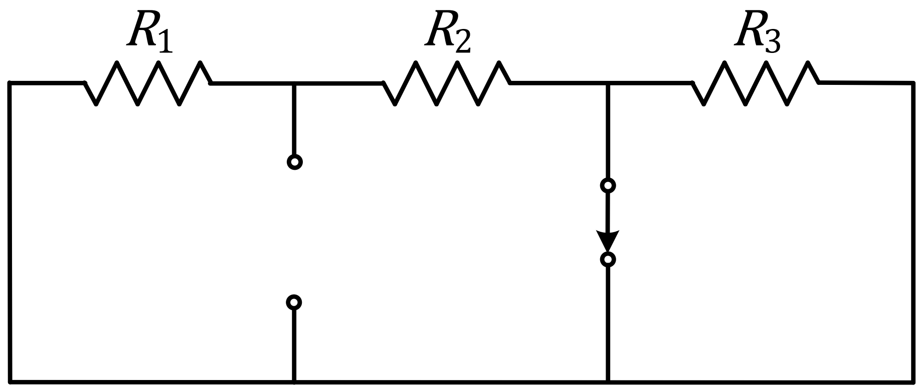


(δ)

Παράδειγμα 2

- Η τιμή αυτή θα είναι

$$i(\infty) = \frac{U_{s1}}{R_1 + R_2} = \frac{24}{6} = 4\ \mathrm{mA}$$



(ε)

- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος βρίσκεται αφού πρώτα βρούμε τη R_{th} από το κύκλωμα (ε).

- Ο πυκνωτής «βλέπει» αντίσταση

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3}\ \mathrm{k\Omega}$$

- Άρα

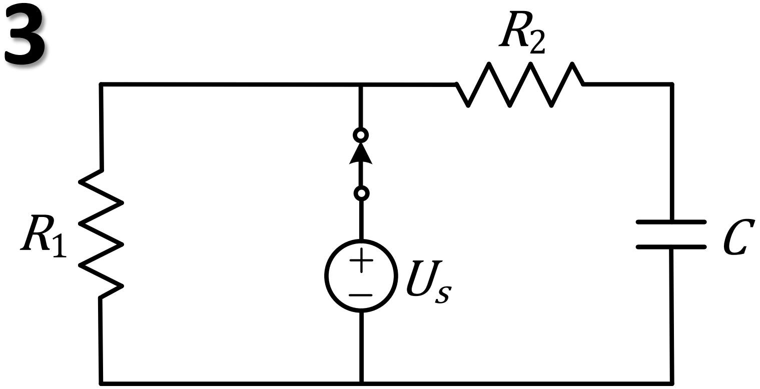
$$\tau = R_{th}C = 0.133\ \mathrm{s}$$

- Επομένως η συνάρτηση που εκφράζει το ζητούμενο ρεύμα θα είναι

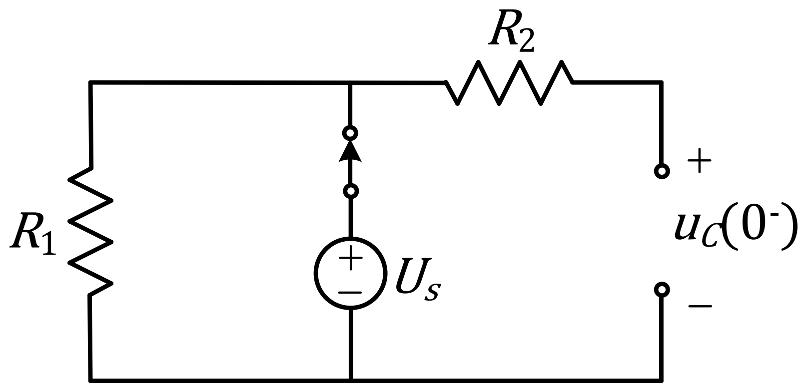
$$i(t) = i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]e^{-t/\tau} = 4 + (5.5 - 4)e^{-7.5t} = 4 + 1.5e^{-7.5t}\ \mathrm{A}$$

Παράδειγμα 3

- Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης ανοίγει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να βρεθεί η τάση στα άκρα του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = 200\ \mathrm{ms}$.
- Δίνονται: $U_s = 9\ \mathrm{V}$, $R_1 = 2\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 4\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 0.01\ \mathrm{mF}$.



(α)



(β)

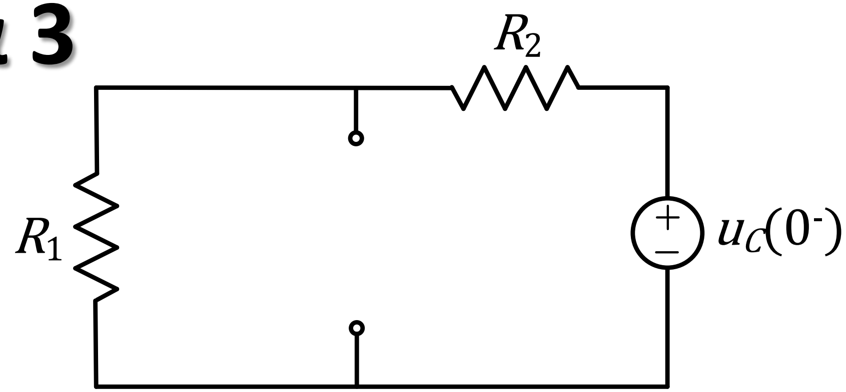
Απάντηση:

- Θεωρούμε ότι πριν το άνοιγμα του διακόπτη το κύκλωμα ήταν στη μόνιμη κατάσταση.
- Από το σχήμα (β) βρίσκουμε την τάση στην οποία είχε φορτιστεί ο πυκνωτής.
- Επειδή ο πυκνωτής λειτουργούσε ως ανοιχτοκύκλωμα θα είναι

$$u_C(0^-) = U_s$$

Παράδειγμα 3

- Τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης το κύκλωμα έχει τη μορφή του σχήματος (γ).



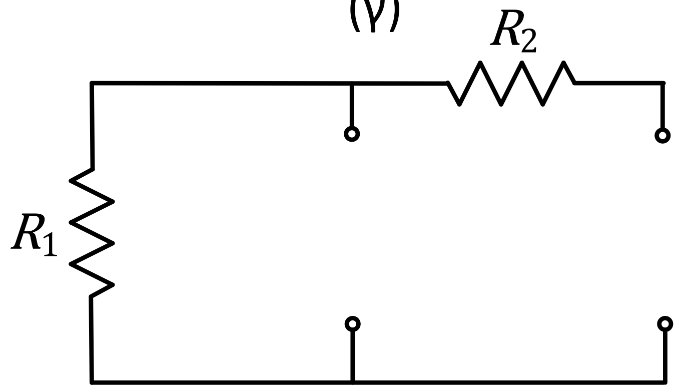
(γ)

- Η τιμή της τάσης του πυκνωτή εξακολουθεί να είναι

$$u_C(0^-) = U_s$$

- Όταν $t \to \infty$ το κύκλωμα έχει τη μορφή του σχήματος (δ), δηλαδή

$$u_C(\infty) = 0$$



(δ)

- Ο πυκνωτής «βλέπει» αντίσταση $R_{th} = R_1 + R_2$, άρα

$$\tau = (R_1 + R_2)C = 0.06\ \mathrm{s}$$

- Επομένως η συνάρτηση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή μετά το κλείσιμο του διακόπτη θα είναι

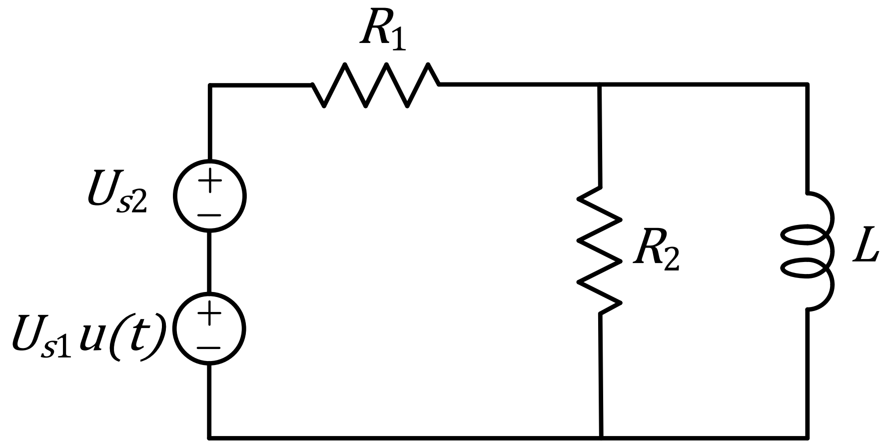
$$u_c(t) = U_s e^{-t/0.06} = 9e^{-t/0.06}\ \mathrm{V}$$

- Τη χρονική στιγμή $t_1 = 200\ \mathrm{ms}$ θα είναι

$$u_c(t_1) = 0.321\ \mathrm{V}$$

Παράδειγμα 4

- Στο κύκλωμα του σχήματος (α) είναι $U_{s1} = 20\ \mathrm{V}$, $U_{s2} = 60\ \mathrm{V}$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $L = 0.006\ \mathrm{H}$.
- Να βρεθεί το ρεύμα στον επαγωγό για κάθε χρονική στιγμή.

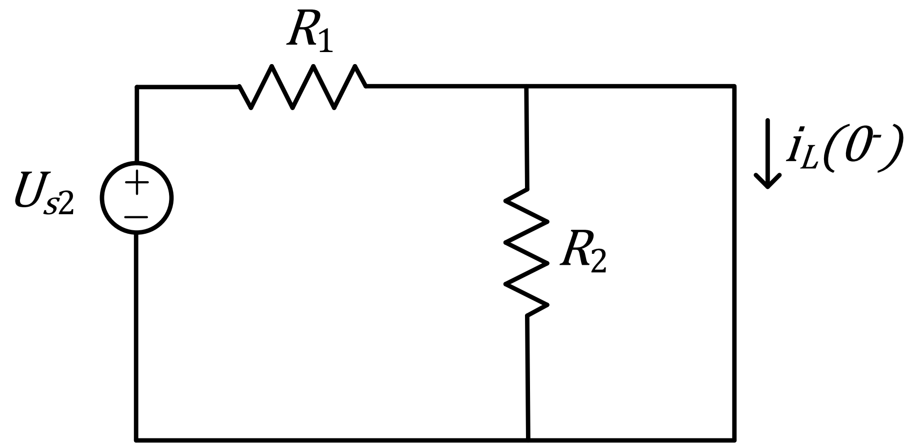


(α)

Απάντηση:

- Για $t < 0$ ο επαγωγός λειτουργεί ως βραχυκύκλωμα (σχήμα (β)) και

$$i_L(0^-) = \frac{U_{s2}}{R_1} = 30\ \mathrm{A}$$



(β)

- Αυτό θα είναι το ρεύμα στον επαγωγό και όταν $t = 0^+$. Το κύκλωμα τότε έχει τη μορφή του σχήματος (γ).

Παράδειγμα 4

- Όταν $t \to \infty$ ο επαγωγός θα λειτουργεί πάλι ως βραχυκύκλωμα και το ρεύμα σε αυτόν θα είναι

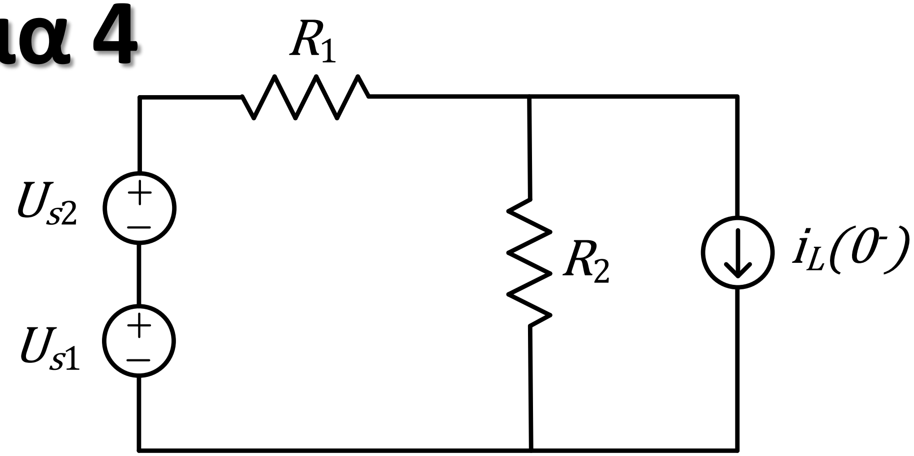
$$i_L(\infty) = \frac{U_{s1} + U_{s2}}{R_1} = 40 \text{ A}$$

- Για τη σταθερά χρόνου βρίσκουμε την αντίσταση που βλέπει ο επαγωγός ως εξής

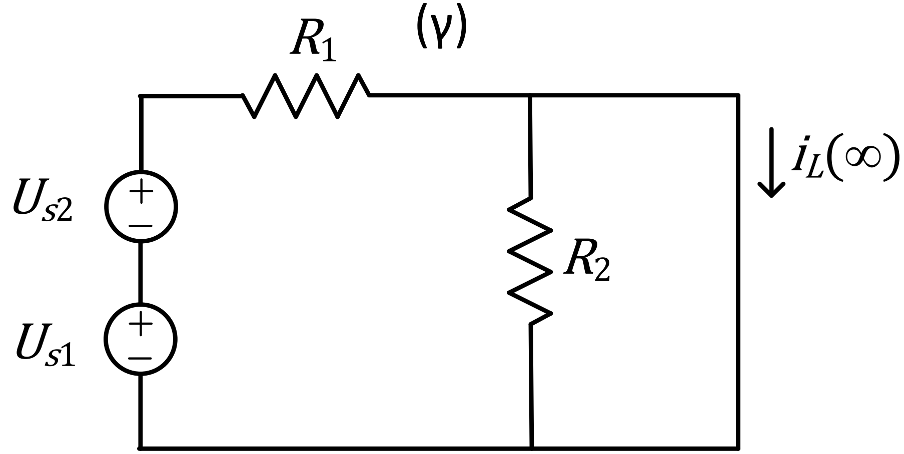
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.5 \ \Omega$$

- Άρα η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι

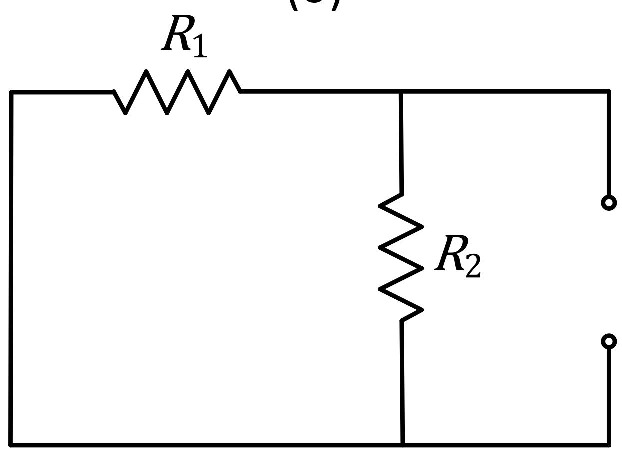
$$\tau = \frac{L}{R} = 4 \text{ ms}$$



(γ)



(δ)



(ε)

Παράδειγμα 4

- Άρα για $t > 0$

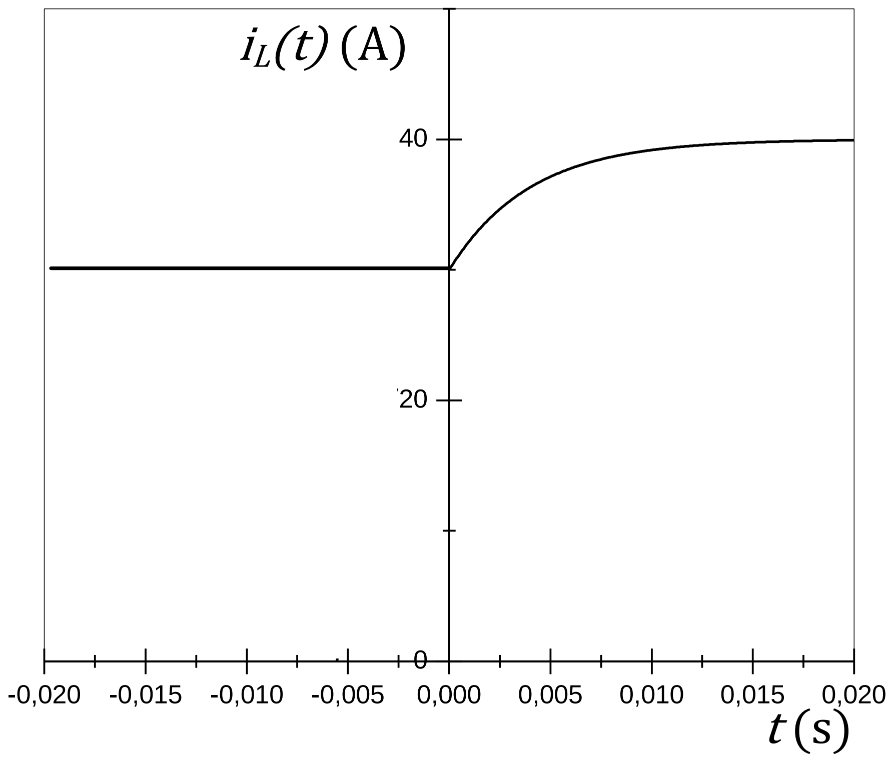
$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$= 40 + (30 - 40)e^{-250t}$$
$$= 40 - 10e^{-250t} \text{ A}$$

- Μπορούμε να γράψουμε μια έκφραση για κάθε t αν παρατηρήσουμε ότι για $t < 0$

$$i_L(t) = 30 \text{ A}$$

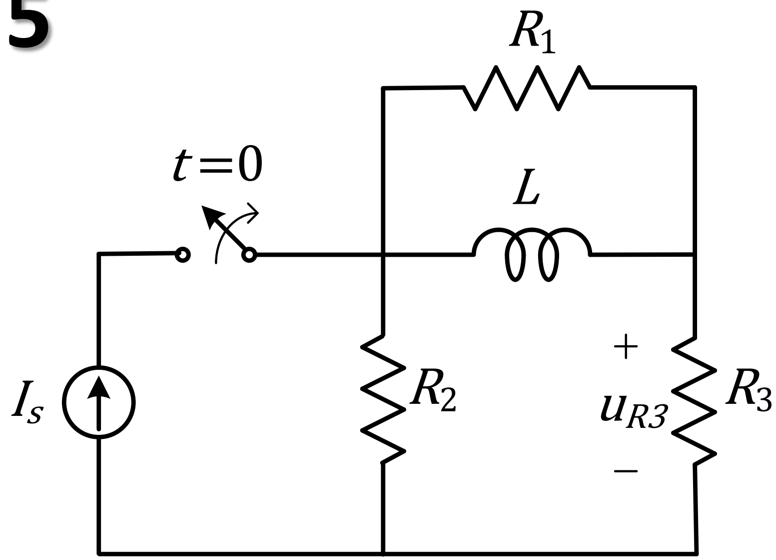
- Οπότε μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω συνάρτηση ως εξής

$$i_L(t) = 30 + 10(1 - e^{-250t})u(t) \text{ A}$$



Παράδειγμα 5

- Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης ανοίγει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να βρεθεί η τάση στα άκρα της αντίστασης R_3 για κάθε t.
- Δίνονται: $I_s = 24$ A, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $L = 1$ H.

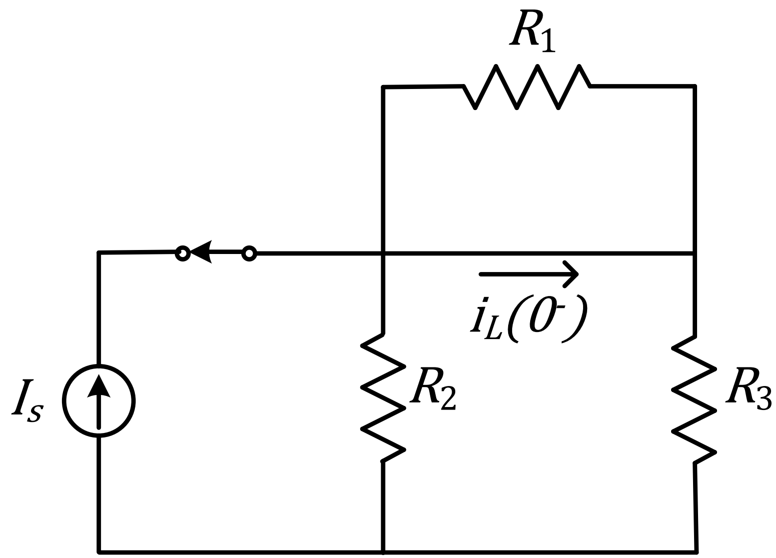


(α)

Απάντηση:

- Όταν $t < 0$ ο επαγωγός συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα, όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Άρα δεν ρέει ρεύμα μέσω της R_1.
- Το ρεύμα στον κλάδο του επαγωγού βρίσκεται μέσω διαιρέτη ρεύματος ως εξής:

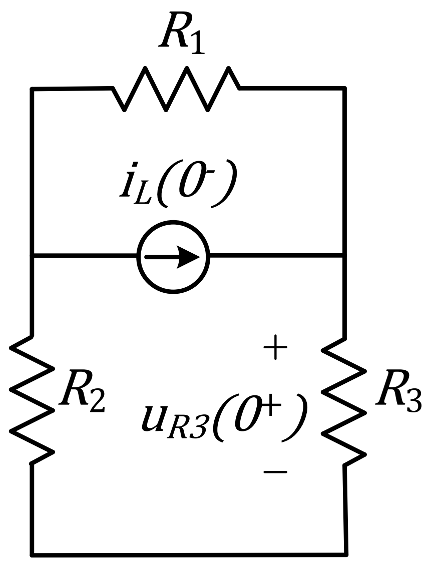
$$i_L(0^-) = I_s \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_3} = 16 \text{ A}$$



(β)

Παράδειγμα 5

- Άρα για $t < 0$ η τάση στην αντίσταση είναι
$$u_{R3}(0^-) = i_L(0^-)R_3 = 32 \text{ V}$$
- Τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ το ρεύμα στο πηνίο θα είναι ακόμη $i_L(0^-)$.
- Τότε το κύκλωμα έχει τη μορφή του σχήματος (γ).



(γ)

- Το ρεύμα στην αντίσταση προκύπτει μέσω διαιρέτη ρεύματος ότι είναι
$$i_{R3}(0^+) = i_L(0^-)\frac{\frac{(R_2+R_3)R_1}{R_2+R_3+R_1}}{R_2+R_3} = \frac{16}{3} \text{ A}$$
- Η τάση στην αντίσταση R_3 θα είναι
$$u_{R3}(0^+) = i_{R3}(0^+)R_3 = 10.667 \text{ V}$$
- Η τάση αυτή θα φθίνει στη συνέχεια μέχρι να μηδενιστεί όταν μηδενίζεται και το ρεύμα του πηνίου.

Παράδειγμα 5

- Για να βρούμε πώς φθίνει χρειάζεται η σταθερά χρόνου του κυκλώματος.
- Η αντίσταση που βλέπει ο επαγωγός βρίσκεται από το κύκλωμα (δ) και είναι

$$R_{th} = \frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_2 + R_3 + R_1} = 2\ \Omega$$

- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = 0.5\ s$$

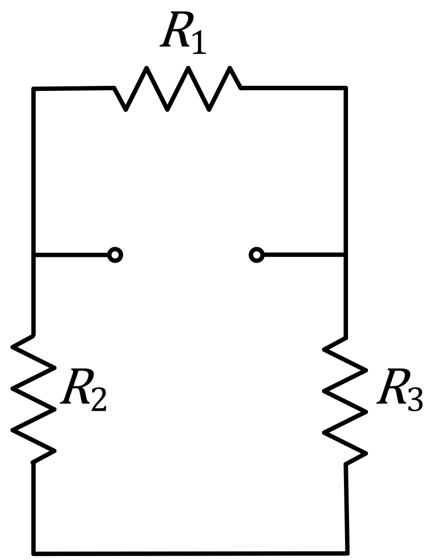
- Επομένως

➢ Όταν $t < 0$

$$u_{R3}(t) = 32\ \mathrm{V}$$

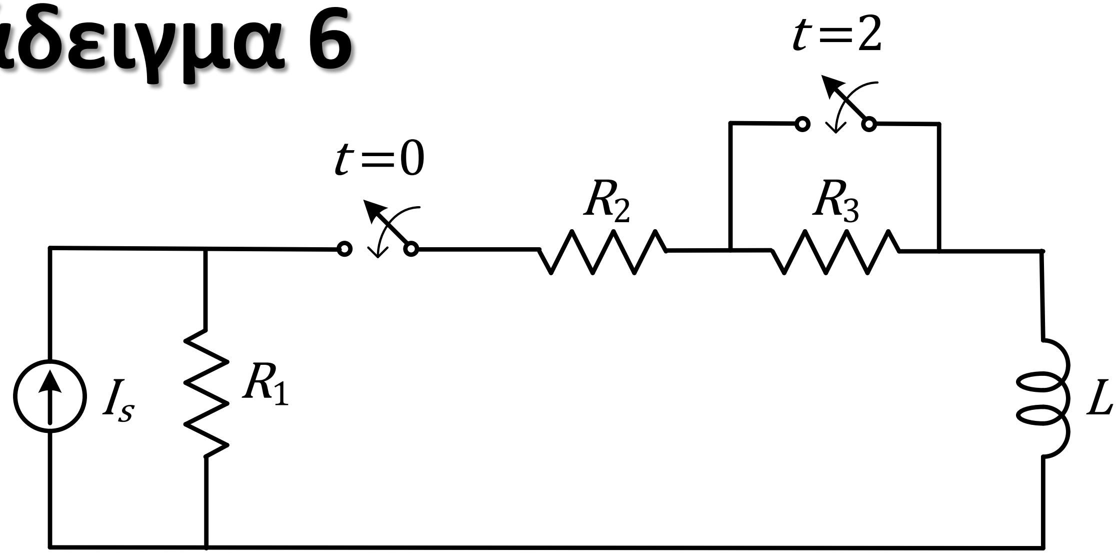
➢ Και όταν $t > 0$

$$u_{R3}(t) = 10.667e^{-2t}\ \mathrm{V}$$



(δ)

Παράδειγμα 6



(α)

- Στο κύκλωμα του σχήματος (α) ο ένας διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή $t_1 = 0$ και ο άλλος τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$. Να βρεθεί το ρεύμα του επαγωγού για κάθε t.
- Δίνονται: $I_s = 6$ A, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $L = 5$ H.

Απάντηση:

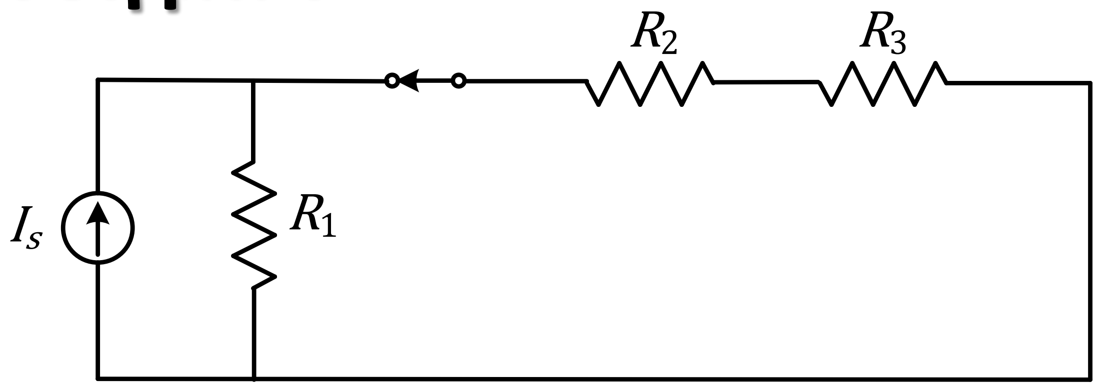
- Για $t < 0$ δεν ρέει ρεύμα στον επαγωγό.
- Τη στιγμή που κλείνει ο πρώτος διακόπτης θα είναι

$$i_{L1}(0^+) = i_{L1}(0^-) = 0$$

- Θεωρούμε ότι το κύκλωμα θα μείνει σε αυτή την κατάσταση αρκετό χρόνο ώστε ο επαγωγός να φθάσει στη μόνιμη κατάσταση. Έστω $i_{L1}(\infty)$ το ρεύμα του τότε.

Παράδειγμα 6

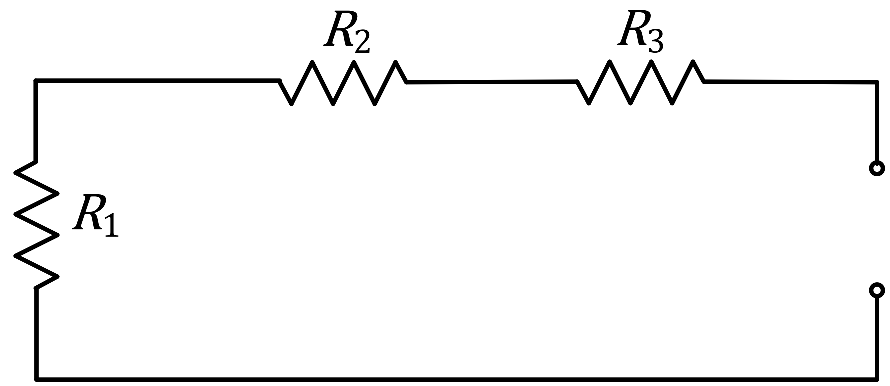
- Το ρεύμα αυτό υπολογίζεται από το κύκλωμα (β), όπου ο επαγωγός έχει αντικατασταθεί από βραχυκύκλωμα.



(β)

- Μέσω διαιρέτη ρεύματος προκύπτει:

$$i_{L1}(\infty) = I_s \frac{\frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_2 + R_3 + R_1}}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A}$$



(γ)

- Η σταθερά χρόνου βρίσκεται μέσω του σχήματος (γ).
- Η αντίσταση που βλέπει ο επαγωγός είναι

$$R_{th} = R_1 + R_2 + R_3 = 45\ \Omega$$

- Άρα

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{1}{9}\ \text{s}$$

Παράδειγμα 6

- Επομένως το ρεύμα για $0 < t < 2$ θα είναι

$$i_L(t) = i_{L1}(\infty) + [i_{L1}(0^+) - i_{L1}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 + (0 - 2)e^{-9t}$$

- Παρατηρούμε ότι

$$5\tau = \frac{5}{9} = 0.555 \text{ s} < 2 \text{ s}$$

- Δηλαδή όταν θα κλείσει ο δεύτερος διακόπτης το κύκλωμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι θα βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση και το ρεύμα στον επαγωγό θα είναι 2 A.
- Τη στιγμή $t = 2$ που κλείνει και ο δεύτερος διακόπτης μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι

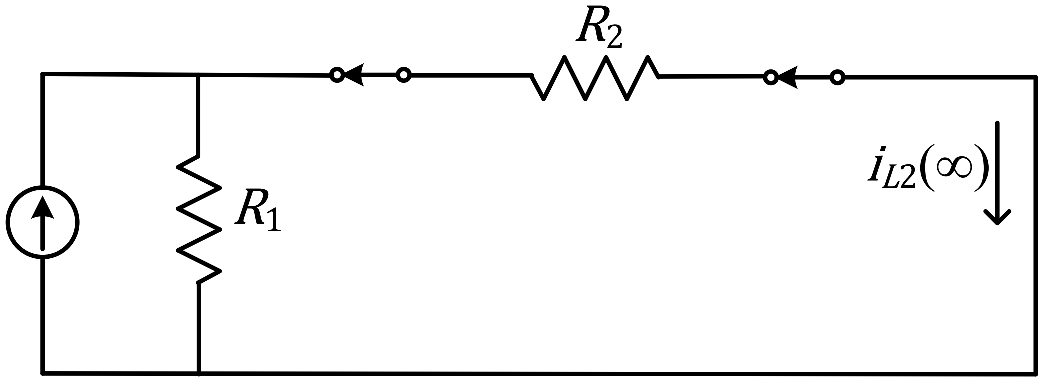
$$i_{L2}(0^+) = i_{L2}(0^-) = 2 \text{ A}$$

- Ο δεύτερος διακόπτης βραχυκυκλώνει την R_3.
- Όταν το κύκλωμα φθάσει και πάλι στη μόνιμη κατάσταση ο επαγωγός θα δρα και πάλι ως βραχυκύκλωμα. Το αντίστοιχο κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα (δ).

Παράδειγμα 6

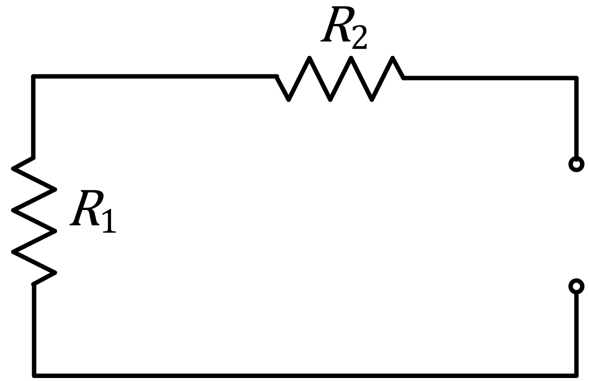
- Το ρεύμα του επαγωγού στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$i_{L2}(\infty) = I_s \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_2} = 3.6 \text{ A}$$



(δ)

- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος βρίσκεται από το κύκλωμα του σχήματος (ε).



(ε)

- Θα είναι

$$R_{th} = R_1 + R_2 = 25 \ \Omega$$

- Άρα

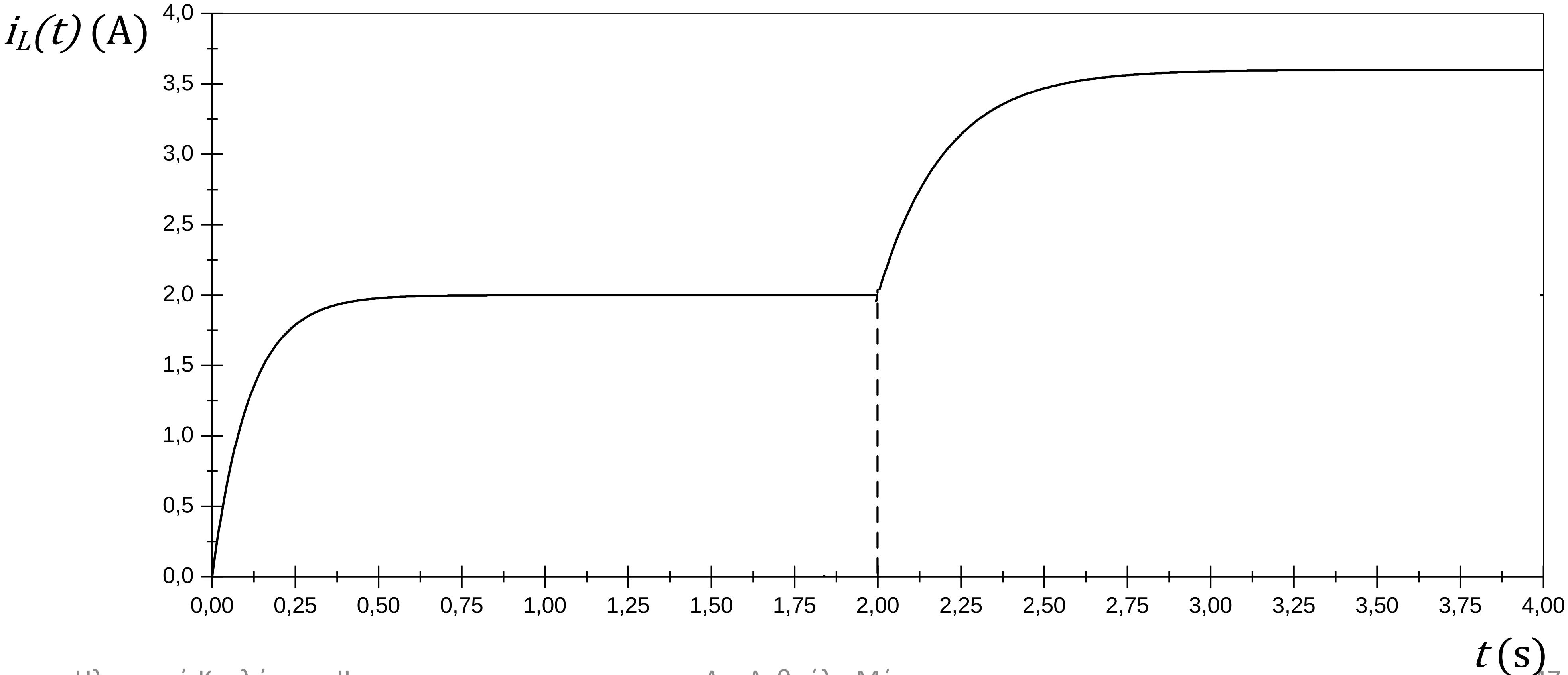
$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{1}{5} \ s$$

Παράδειγμα 6

- Επομένως το ρεύμα για $t > 2$ θα είναι

$$i_L(t) = i_{L2}(\infty) + [i_{L2}(0^+) - i_{L2}(\infty)]e^{-\frac{(t-2)}{\tau}} = 3.6 + (2 - 3.6)e^{-5(t-2)}$$
$$= 3.6 - 1.6e^{-5(t-2)}\ \mathrm{A}$$

- Το $t - 2$ στον εκθέτη εκφράζει τη χρονική καθυστέρηση στο κλείσιμο του δεύτερου διακόπτη.



Topic

Laplace παλιές σημειώσεις

- Παλιές σημειώσεις Laplace με επικαιροποίηση: laplace24.pdf
- IEEE CS magazine Feb2007

Note

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = \cancel{0} = (s+1)(\cdots)$$

$$-1 + 6 - 11 + 6 = 0 \qquad s = -1$$

$$
\begin{array}{r|l}
s^3 + 6s^2 + 11s + 6 & s+1 \\ \cline{2-2}
-(s^3 + s^2) \qquad\qquad & s^2 + 5s + 6 \\ \cline{1-1}
5s^2 + 11s + 6 & \\
-(5s^2 + 5s) \qquad & \\ \cline{1-1}
6s + 6 & \\
-(6s + 6) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{\overset{1}{\cancel{25 - 4 \cdot 6}}}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$(s+1)(s^2 + 5s + 6) = (s+1)(s+2)(s+3)$$