Ηλεκτρικά Κυκλώματα ΙΙ

Διάλεξη 03

Α. Δροσόπουλος

21-03-2024

Outline

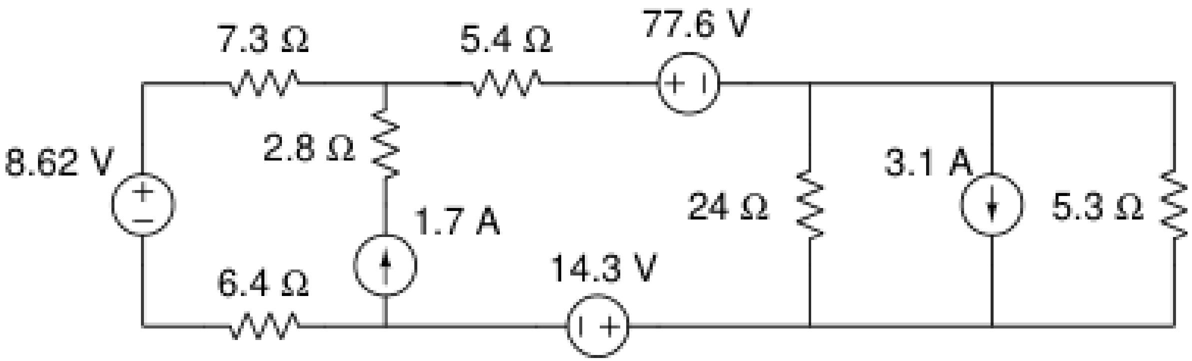
Topic

1. Επανάληψη μεθόδων ανάλυσης κυκλωμάτων
2. Μεταβατικά φαινόμενα

Βασικά

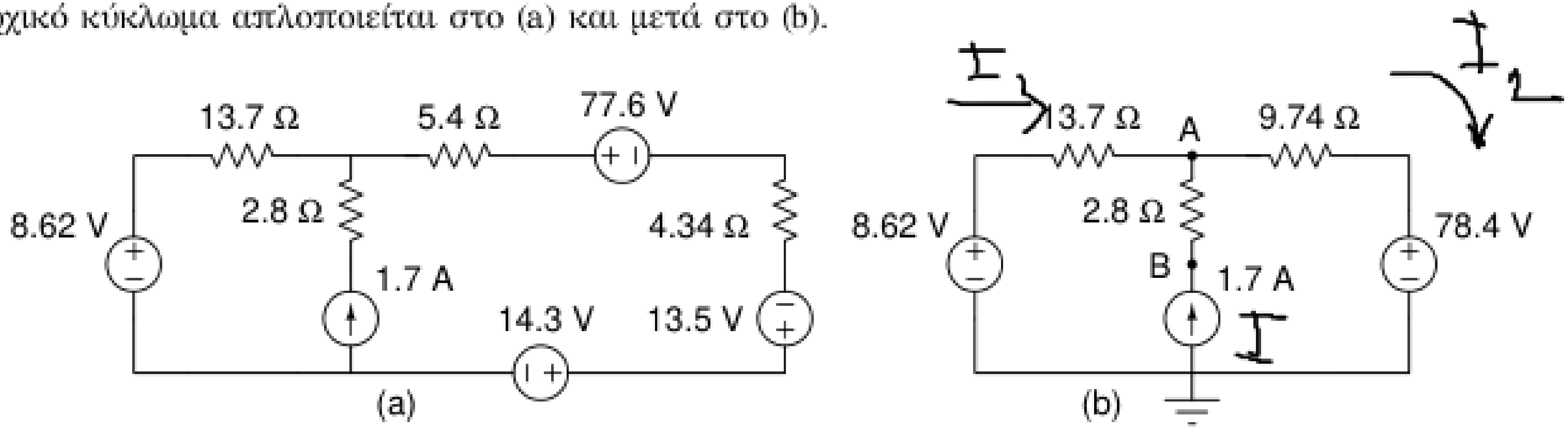
- Κανόνες Kirchhoff. Ρεύματος. Τάσης
- Αντιστάσεις. Σειρά. Παράλληλες. Αστέρας-Τρίγωνο.
- Μετασχηματισμοί πηγών.
- Διαιρέτης τάσης. Διαιρέτης ρεύματος.
- Συνδυασμοί πηγών. Τάσεων σε σειρά. Ρευμάτων παράλληλα.
- Θεωρήματα Thevenin, Norton.
- Φάσορες. Μιγαδικοί.

Να υπολογιστεί η ισχύς που παράγεται ή καταναλώνεται από την πηγή ρεύματος 1.7 A.



Λύση

Το αρχικό κύκλωμα απλοποιείται στο (a) και μετά στο (b).



Σχήμα: Από θέμα 1ο προηγούμενης εξεταστικής

Κλαδικά ρεύματα 2

$$I_1 + I - I_2 = 0$$
$$13.7I_1 + 9.74I_2 + 78.4 - 8.62 = 0$$

```
>> A=[1 -1; 13.7 9.74];
>> b=[-1.7; -78.4+8.62];
>> i=inv(A)*b
i =
  -3.6834
  -1.9834
>> Va = -i(1)*13.7+8.62
Va = 59.082
>> Vb = Va + 1.7*2.8
Vb = 63.842
>> P=1.7*Vb
P = 108.53
```

Κλαδικά ρεύματα 3

Λίγο διαφορετικά.

$$13.7 I_1 + V_A - 8.62 = 0$$
$$9.74 I_2 + 78.4 - V_A = 0$$
$$I_1 + I = I_2$$

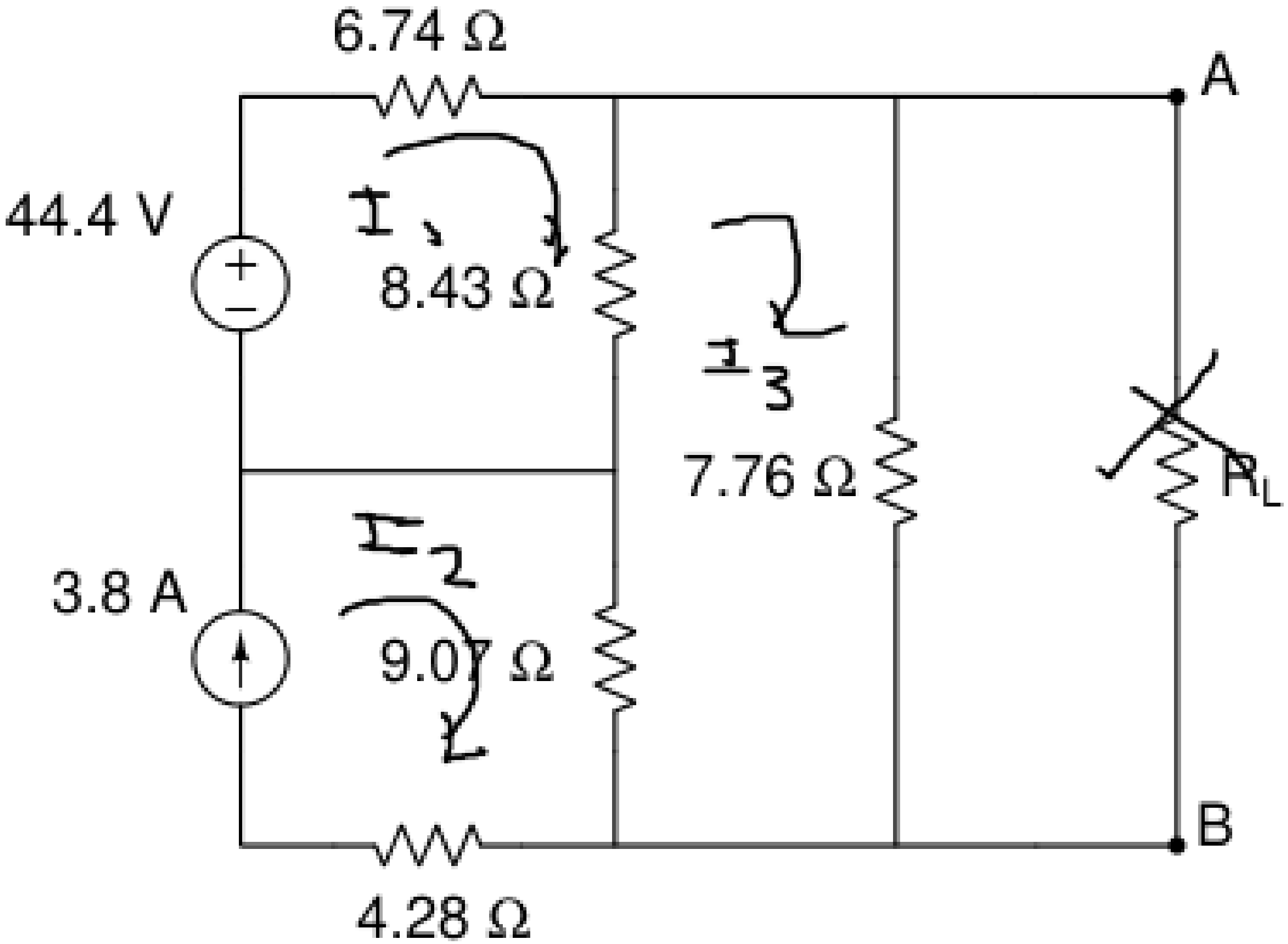
```
>> A=[13.7 0 1; 0 9.74 -1; 1 -1 0];
>> b=[8.62; -78.4; -1.7];
>> iv = inv(A)*b
iv =
  1.0e+01 *
  -0.3683
  -0.1983
   5.9082
```

Κομβική ανάλυση

Λύση στο eclass για ίδιο θέμα 1 καθώς και θέμα 3

Από Κυκλώματα Ι

Διαλέξεις 11 και 12



Σχήμα: Από θέμα 2ο προηγούμενης εξεταστικής

Μέθοδος οφθαλμών / βρόχων

$$6.74I_1 + 8.43(I_1 - I_3) - 44.4 = 0$$
$$I_2 = I$$
$$7.76I_3 + 9.07(I_3 - I_2) + 8.43(I_3 - I_1) = 0$$

Άγνωστοι I_1, I_3. Για V_{TH}:

```
>> A=[6.74+8.43 -8.43; -8.43 7.76+9.07+8.43];
>> b=[44.4; 9.07*3.8];
>> ii=inv(A)*b
ii =
   4.5241
   2.8743
>> Vth = ii(2)*7.76
Vth = 22.304
```

Μέθοδος οφθαλμών / βρόχων 2

Για I_N και R_{TH}:

```
>> A=[6.74+8.43 -8.43; -8.43 9.07+8.43];
>> b=[44.4; 9.07*3.8];
>> ii=inv(A)*b
ii =
   5.4912
   4.6147
>> In=ii(2)
In = 4.6147
>> Rth=Vth/In
Rth = 4.8333
```

Topic

Εισαγωγή

- Ένας πυκνωτής έχει την ιδιότητα να αποθηκεύει ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στον αρνητικά και θετικά φορτισμένο οπλισμό του.
- Αν συνδεθεί στα άκρα του ένα κύκλωμα μέσω του οποίου τα αρνητικά φορτία θα κινηθούν προς τα θετικά, δηλαδή θα υπάρξει ροή ρεύματος. Η ηλεκτρική ενέργεια θα μετατραπεί σε θερμότητα στις αντιστάσεις του κυκλώματος.
- Η τάση στα άκρα του πυκνωτή μεταβάλλεται σταδιακά παράλληλα με την αποθηκευμένη ενέργεια. Ο ρυθμός απελευθέρωσης της ενέργειας και της μεταβολής της τάσης εξαρτάται από τις παραμέτρους του κυκλώματος.
- Αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζει ο επαγωγός, με τη διαφορά ότι ενέργεια αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του και το μέγεθος που μεταβάλλεται σταδιακά είναι το ρεύμα του.
- Μεταβολή σε ένα κύκλωμα μπορεί να προκύψει λόγω μεταβολής στην πηγή ή λόγω ανοίγματος ή κλεισίματος διακοπτών.

Εισαγωγή

- Εξαιτίας των στοιχείων που αποθηκεύουν ενέργεια τη μεταβολή αυτή ακολουθεί μια μεταβατική περίοδος κατά την οποία τα ρεύματα των κλάδων και οι τάσεις των στοιχείων μεταβάλλονται από τις προηγούμενες στις νέες τιμές τους, μέχρι τελικά το σύστημα να καταλήξει σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.
- Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με την ανάλυση κυκλωμάτων στη μεταβατική αυτή κατάσταση λειτουργίας.
- Μια σημαντική παράμετρος που θα εξετάσουμε είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος, η οποία δείχνει πόσο γρήγορα αποκρίνεται αυτό στις μεταβολές.
- Όταν στο κύκλωμα υπάρχει μόνο ένα στοιχείο με δυνατότητα αποθήκευσης ενέργειας, τότε το κύκλωμα περιγράφεται από διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού. Όταν υπάρχει και επαγωγός και πυκνωτής στο κύκλωμα τότε αυτό περιγράφεται από διαφορική δευτέρου βαθμού.
- Πρέπει να λύσουμε τη διαφορική που προκύπτει ανάλογα με το κύκλωμα για να βρούμε κάποια τάση ή ρεύμα.

Εισαγωγή

- Δεν μας ενδιαφέρει τόσο η τεχνική επίλυσης όσο η ίδια η λύση.
- Θα διατυπώσουμε τη γενική μορφή αυτής της λύσης και στη συνέχεια θα τη θεωρούμε δεδομένη. Θα αναπτύξουμε έτσι έναν πιο απλό πρακτικό τρόπο για την ανάλυση των κυκλωμάτων χωρίς επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για κάθε ένα από τα κυκλώματα που πρέπει να εξετάσουμε.
- Θα εξετάσουμε σχετικά απλά κυκλώματα. Η ανάλυση γίνεται πολύ δύσκολη για πιο σύνθετα κυκλώματα. Επιπλέον στο επόμενο μάθημα εξετάζεται μια γενική μέθοδος για την αντιμετώπιση αυτής καθώς και πολλών άλλων περιπτώσεων.

Φυσική και εξαναγκασμένη απόκριση

- Απόκριση ενός κυκλώματος είναι η μεταβολή των μεταβλητών του (τάσης, ρεύματος) συναρτήσει του χρόνου.
- Εξετάζουμε την απόκριση του κυκλώματος με και χωρίς την επίδραση ανεξάρτητων πηγών.
- Η φυσική απόκριση προκύπτει αν θεωρήσουμε το κύκλωμα χωρίς τις πηγές (πηγές τάσης βραχυκυκλωμένες και ρεύματος ανοιχτοκυκλωμένες) και εξαρτάται από τα στοιχεία του κυκλώματος (R, L, C).
- Για να βρούμε τη φυσική απόκριση θεωρούμε ότι ο επαγωγός ή πυκνωτής του κυκλώματος έχει αποθηκεύσει ενέργεια σε κάποια προηγούμενη κατάσταση του κυκλώματος. Δηλαδή η φυσική απόκριση εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.
- Με δεδομένο ότι κανένα πραγματικό κύκλωμα δεν μπορεί να διατηρεί την αποθηκευμένη ενέργεια για πάντα και ότι οι εσωτερικές αντιστάσεις θα μετατρέψουν τελικά όλη την αποθηκευμένη ενέργεια σε θερμότητα, η απόκριση αυτή αναμένεται να φθίνει.

Φυσική και εξαναγκασμένη απόκριση

- Εξαναγκασμένη απόκριση ονομάζεται η απόκριση του κυκλώματος όταν δρουν σε αυτό ανεξάρτητες πηγές και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν.
- Το άθροισμα φυσικής και εξαναγκασμένης δίνει την πλήρη απόκριση του κυκλώματος.

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Μια διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού όπως αυτές που πρόκειται να μας απασχολήσουν έχει τη γενική μορφή

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

- Η μεταβλητή $x(t)$ παριστάνει τάση ή ρεύμα. Η σταθερά $1/\tau$ εξαρτάται από τα στοιχεία του κυκλώματος και η συνάρτηση $f(t)$ παριστάνει τη διέγερση του κυκλώματος (πηγής τάσης ή ρεύματος).
- Έστω $x(t) = x_f(t)$ μια λύση της εξίσωσης αυτής.
- Επίσης ορίζεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

- Δεν περιλαμβάνει τη διέγερση.
- Έστω $x(t) = x_n(t)$ μια λύση αυτής.

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Η $x(t) = x_f(t) + x_n(t)$ είναι επίσης λύση της αρχικής διαφορικής. Θέλουμε να βρούμε τη γενική μορφή αυτής της λύσης.
- Ο όρος $x_f(t)$ είναι η εξαναγκασμένη απόκριση και ο όρος $x_n(t)$ η φυσική απόκριση.
- Έστω ότι η διέγερση είναι

$$f(t) = A \text{ (σταθερά)}$$

- Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελείται τότε από δύο μέρη που προκύπτουν με επίλυση των

$$\frac{dx_f(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x_f(t) = A$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x_n(t) = 0$$

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Για την πρώτη εξίσωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι η λύση θα είναι επίσης σταθερά δηλαδή

$$x_f(t) = K_1 \text{ (σταθερά)}$$

- Οπότε με αντικατάσταση της λύσης στη διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$\frac{1}{\tau}K_1 = A \Rightarrow K_1 = \tau A$$

- Η δεύτερη εξίσωση γράφεται ως εξής (χωρισμός μεταβλητών):

$$\frac{\frac{dx_n(t)}{dt}}{x_n(t)} = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{dx_n(t)}{x_n(t)} = -\frac{1}{\tau}dt$$

- Αν πάρουμε το ολοκλήρωμα για τα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει

$$\ln x_n(t) = -\frac{1}{\tau}t + c \Rightarrow x_n(t) = e^{-t/\tau + c}$$

- Η $x_n(t)$ γράφεται ως εξής:

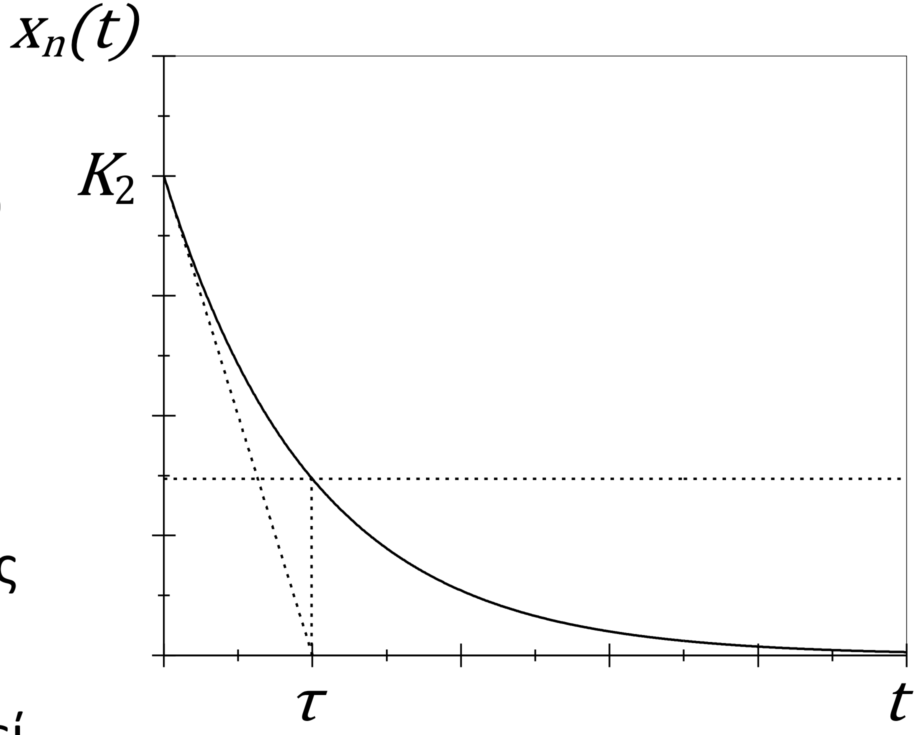
$$x_n(t) = K_2 e^{-t/\tau}, K_2\text{: σταθερά}$$

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Τελικά δηλαδή προκύπτει ότι

$$x(t) = x_f(t) + x_n(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} = \tau A + K_2 e^{-t/\tau}$$

- Η σταθερά K_2 μπορεί να βρεθεί αν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής $x(t)$ κάποια χρονική στιγμή.

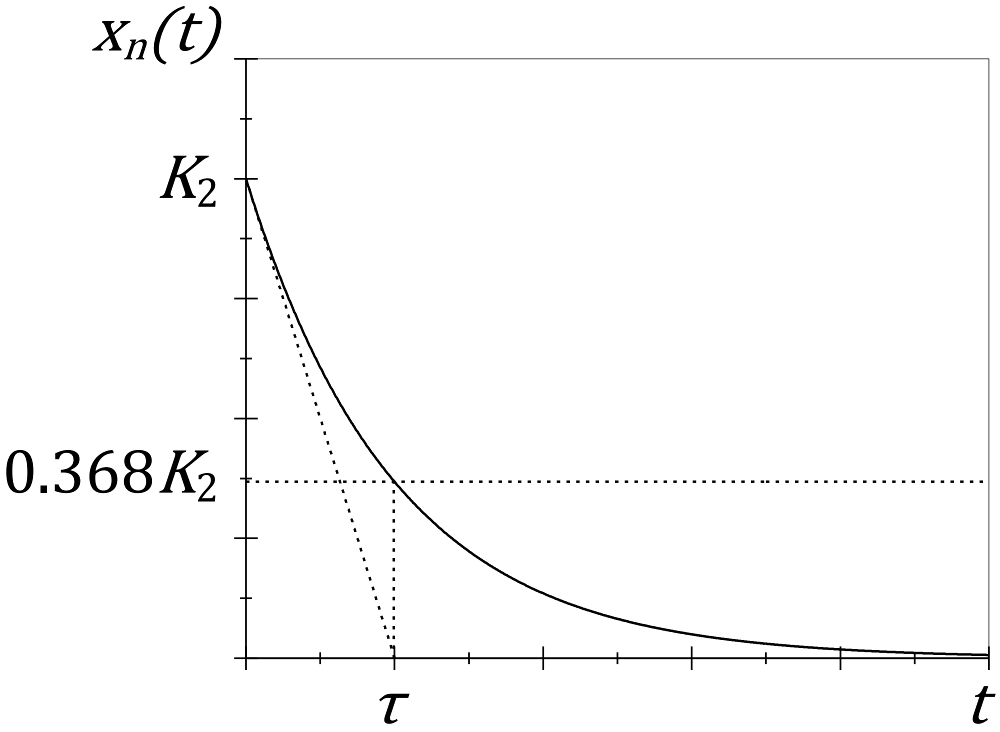


- Ο όρος $K_2 e^{-t/\tau}$ είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση του χρόνου, η οποία αν $\tau > 0$ έχει τιμή K_2 για $t = 0$ και τιμή 0 για $t \to \infty$. Ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει εξαρτάται από τη σταθερά τ.
- Ο όρος K_1 αναφέρεται στην λύση μόνιμης κατάστασης. Είναι η τιμή της $x(t)$ όταν $t \to \infty$, όταν ο δεύτερος όρος έχει μειωθεί τόσο πολύ που μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος.

Σταθερά χρόνου

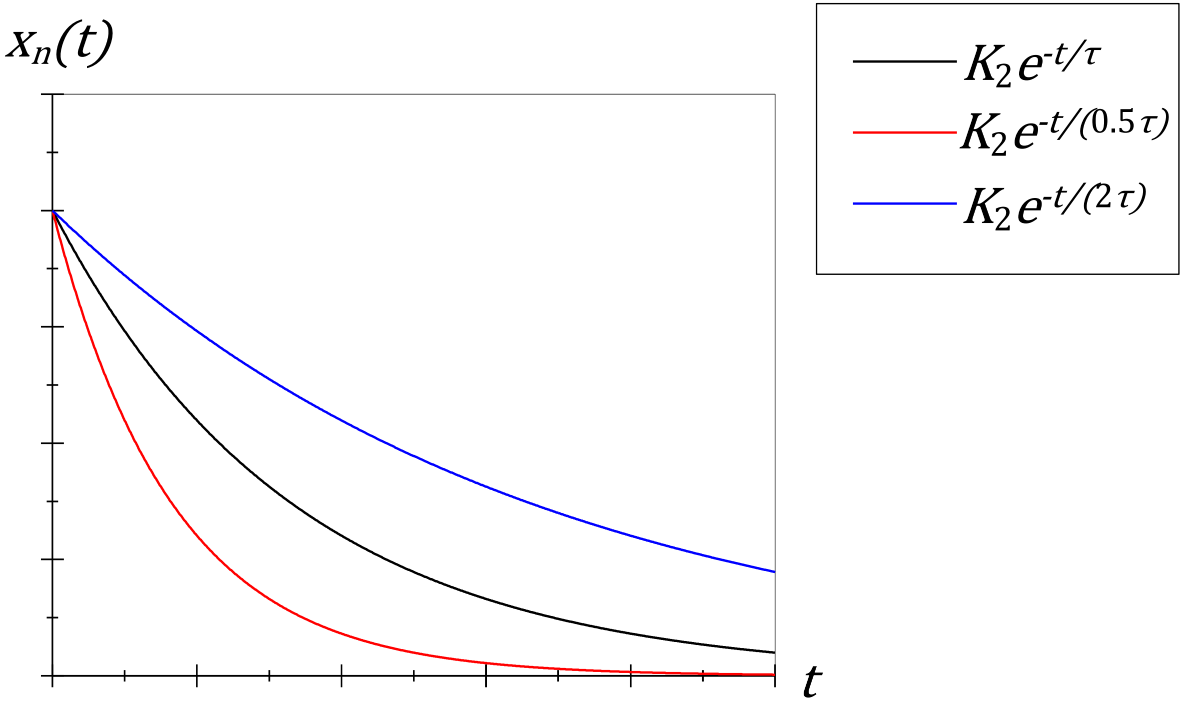
- Η σταθερά τ ονομάζεται σταθερά χρόνου του κυκλώματος.
  - Όπως θα φανεί παρακάτω, εξαρτάται από τα στοιχεία του.
  - Έχει μονάδα χρόνου (s).

- Όταν $t = \tau$ είναι $K_2 e^{-\tau/\tau} = K_2 e^{-1} = 0.368 K_2$, άρα στη διάρκεια μιας σταθεράς χρόνου τ η $x_n(t)$ φθίνει από την τιμή K_2 στην τιμή $0.368K_2$, δηλαδή μειώνεται κατά 63.2%.
- Σε 2 σταθερές χρόνου έχει μειωθεί στο $0.135K_2$.
- Μετά από 5 σταθερές χρόνου είναι $0.0067K_2$, δηλαδή κάτω από 1%.



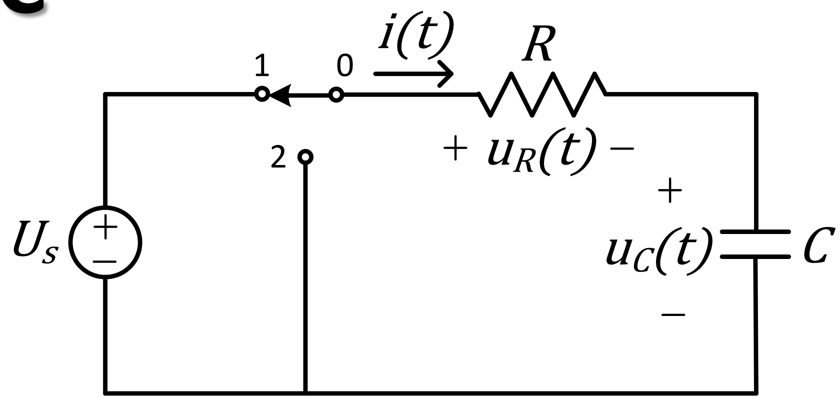
Σταθερά χρόνου

- Ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει η εκθετική καθορίζεται από τη σταθερά χρόνου τ.
- Στο σχήμα φαίνονται τρεις καμπύλες που διαφέρουν ως προς τη σταθερά χρόνου.
- Αν το κύκλωμα έχει μικρή σταθερά χρόνου τότε φθάνει πιο γρήγορα στη μόνιμη κατάσταση και αντιστρόφως.



Κύκλωμα RC

- Η ανάλυση μέχρι εδώ είναι γενική. Δεν αναφερθήκαμε σε συγκεκριμένο κύκλωμα, αλλά μόνο στο γεγονός ότι περιγράφεται από διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού.



- Στο κύκλωμα του σχήματος υπάρχει μια πηγή συνεχούς τάσης $u_s(t) = U_s$.
- Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης πηγαίνει στη θέση 1. Πριν από τη στιγμή αυτή ο πυκνωτής ήταν εντελώς αφόρτιστος, δηλαδή $u_C(t) = 0$.
- Μόλις κλείσει ο διακόπτης θα ρέει ρεύμα $i(t)$ στο κύκλωμα, ίδιο για τα R και C. Επομένως

$$i_C = i_R \Rightarrow C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_s - u_C(t)}{R} \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{U_s}{RC}$$

- Υποθέτουμε ότι η διαφορική αυτή έχει λύση της μορφής

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Κύκλωμα RC

- Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\tau = RC$$

$$K_1 = RC\frac{U_s}{RC} = U_s$$

και

$$u_C(t) = U_s + K_2 e^{-t/RC}$$

όπου U_s είναι η τιμή στη μόνιμη κατάσταση και $\tau = RC$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος. Μένει να βρεθεί το K_2.

- Αν θεωρήσουμε ότι ο πυκνωτής αρχικά δεν είχε φορτίο, τότε η αρχική τάση στα άκρα του ήταν μηδέν, επομένως

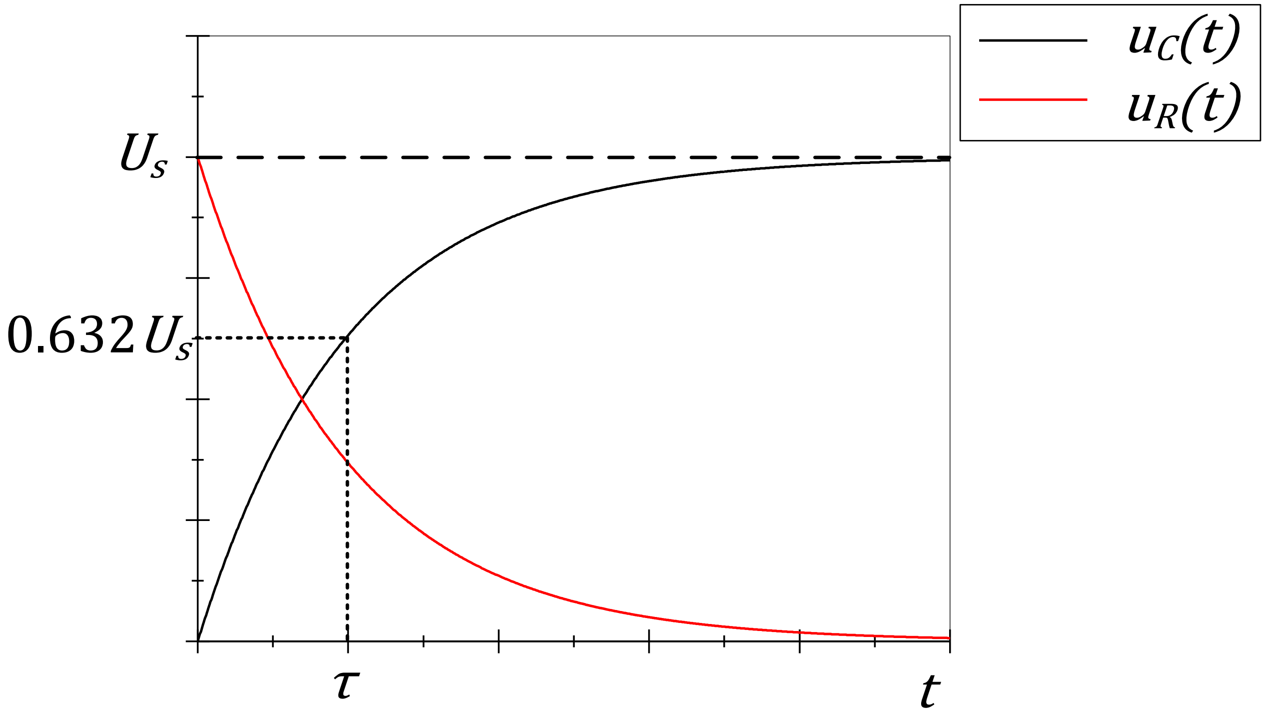
$$u_C(0) = U_s + K_2 e^{-t/RC} \Rightarrow 0 = U_s + K_2 e^0 \Rightarrow K_2 = -U_s$$

- Επομένως η τάση στα άκρα του πυκνωτή κατά τη φόρτιση είναι

$$u_C(t) = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Κύκλωμα RC

- Η γραφική παράσταση της τάσης $u_C(t)$ φαίνεται παρακάτω.



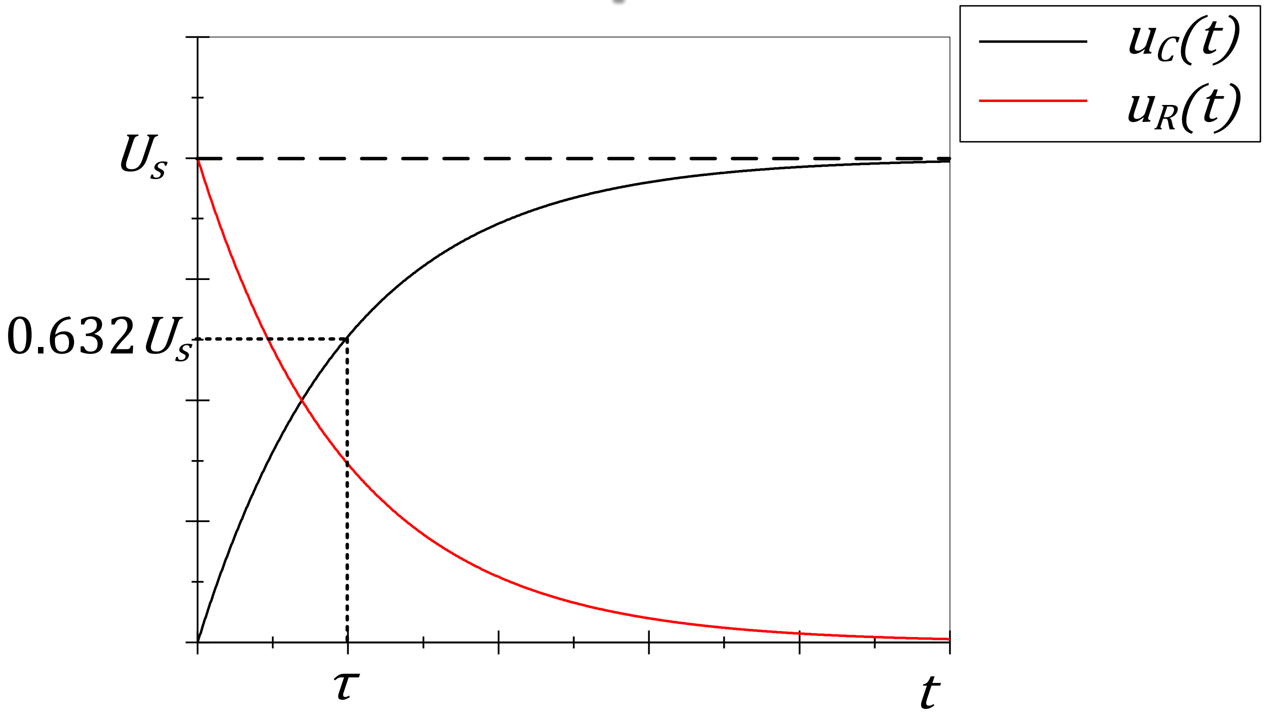
- Στο ίδιο διάγραμμα έχει σχεδιαστεί η τάση στην αντίσταση, η οποία είναι

$$u_R(t) = U_s - u_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Τη μορφή της $u_R(t)$ θα έχει και το ρεύμα στο κύκλωμα, δεδομένου ότι

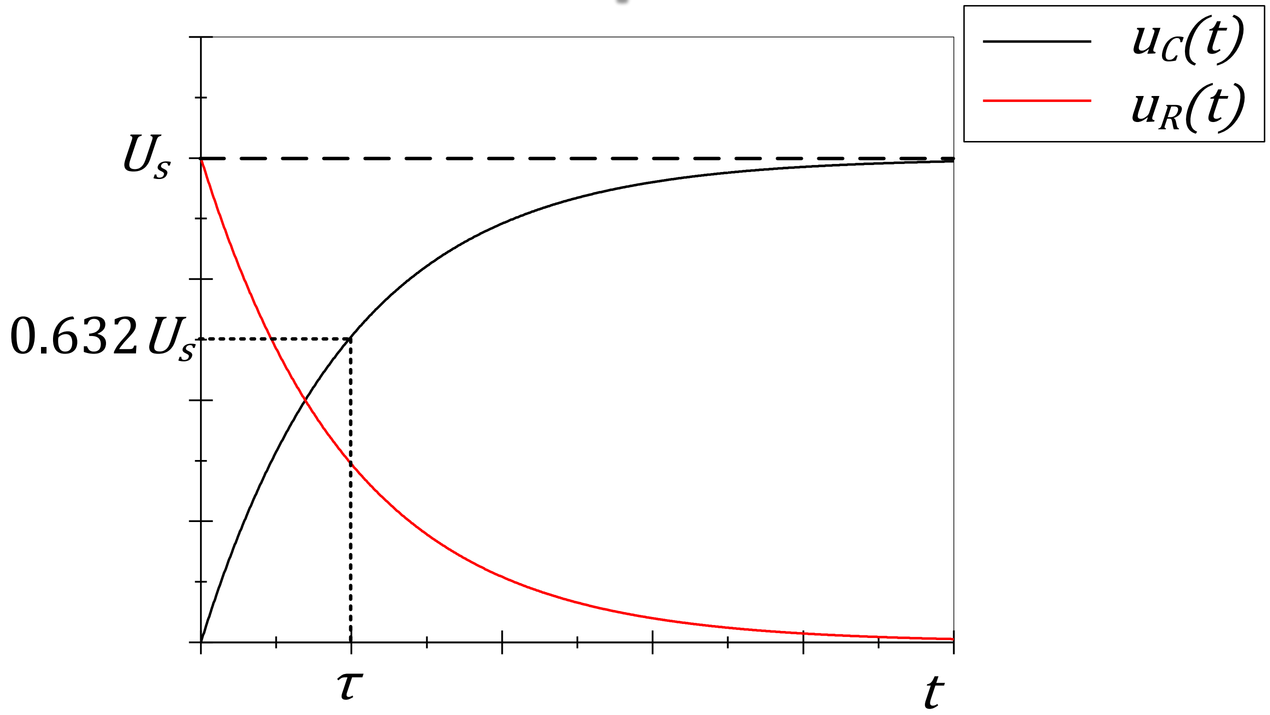
$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

Κύκλωμα RC



- Όταν $t = \tau$ είναι $u_C(\tau) = U_s(1 - e^{-1}) = 0.632U_s$. Δηλαδή η σταθερά χρόνου δείχνει πόσος χρόνος απαιτείται για να φθάσει η τάση του πυκνωτή το 63.2% της τελικής τιμής της.
- Σε 2 σταθερές χρόνου η τάση έχει αυξηθεί στο $0.865U_s$.
- Μετά από 5 σταθερές χρόνου είναι $0.993U_s$ δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει φορτιστεί πλήρως.

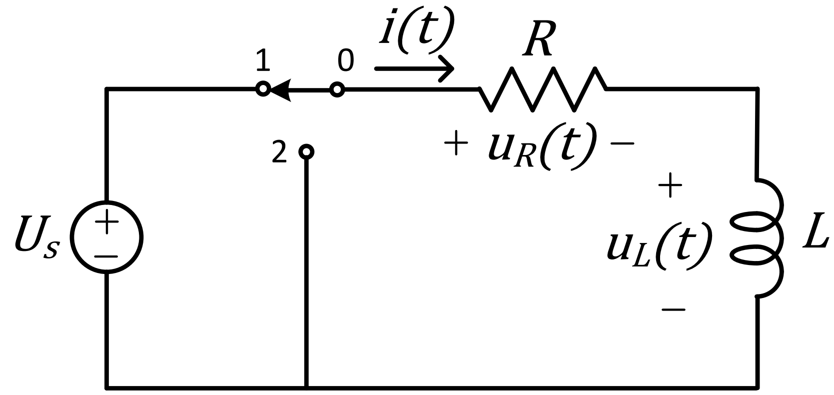
Κύκλωμα RC



- Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι:
  - Με το κλείσιμο του διακόπτη όταν $t = 0$ το ρεύμα στο κύκλωμα άρα και στον πυκνωτή λαμβάνει ακαριαία την τιμή $i(0) = \frac{U_s}{R}$ και φθίνει στη συνέχεια.
  - **Η τάση όμως στον πυκνωτή δεν μπορεί να μεταβληθεί ακαριαία.**
  - Ο ρυθμός με τον οποίο θα αυξηθεί η τάση αυτή εξαρτάται από τη σταθερά χρόνου.

Κύκλωμα RL

- Για το κύκλωμα του σχήματος η ανάλυση είναι παρόμοια.
- Η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει είναι το ρεύμα του πηνίου.
- Το ρεύμα αυτό μεταβάλλεται σταδιακά από μια αρχική τιμή σε μια τελική από τη στιγμή που αλλάζει θέση ο διακόπτης.



- Θεωρούμε ότι όταν ο διακόπτης πηγαίνει στη θέση 1 το πηνίο δεν έχει καθόλου αποθηκευμένη ενέργεια.
- Αν εφαρμόσουμε KVL στο κύκλωμα προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U_s \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{U_s}{L}$$

- Θεωρούμε πάλι λύση της μορφής

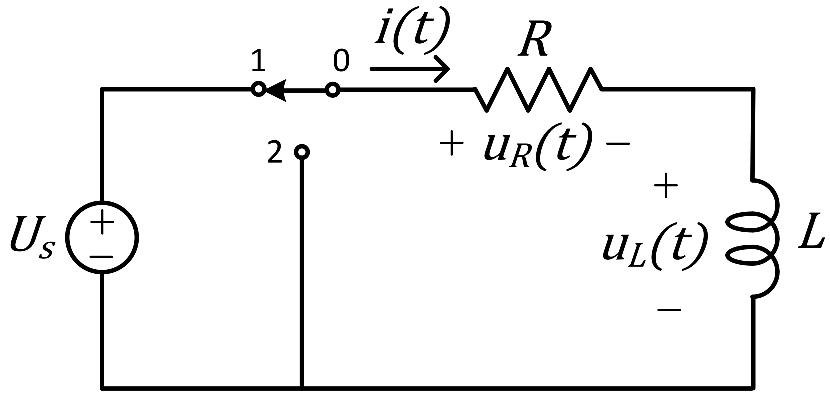
$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Κύκλωμα RL

- Προκύπτει ότι

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$K_1 = \frac{U_s}{R}$$



- Άρα

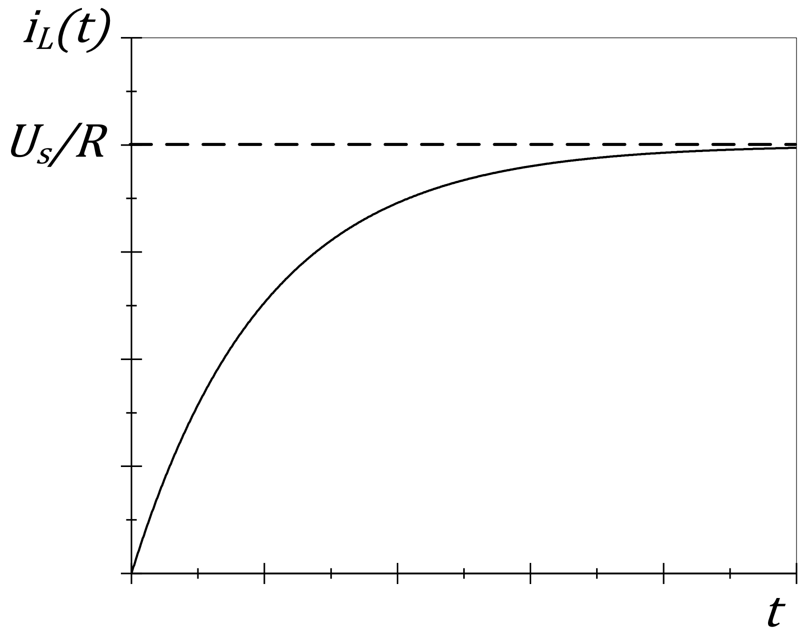
$$i(t) = \frac{U_s}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

- Για να βρούμε τη σταθερά K_2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες.

$$i(0) = \frac{U_s}{R} + K_2 \Rightarrow \frac{U_s}{R} + K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = -\frac{U_s}{R}$$

- Επομένως

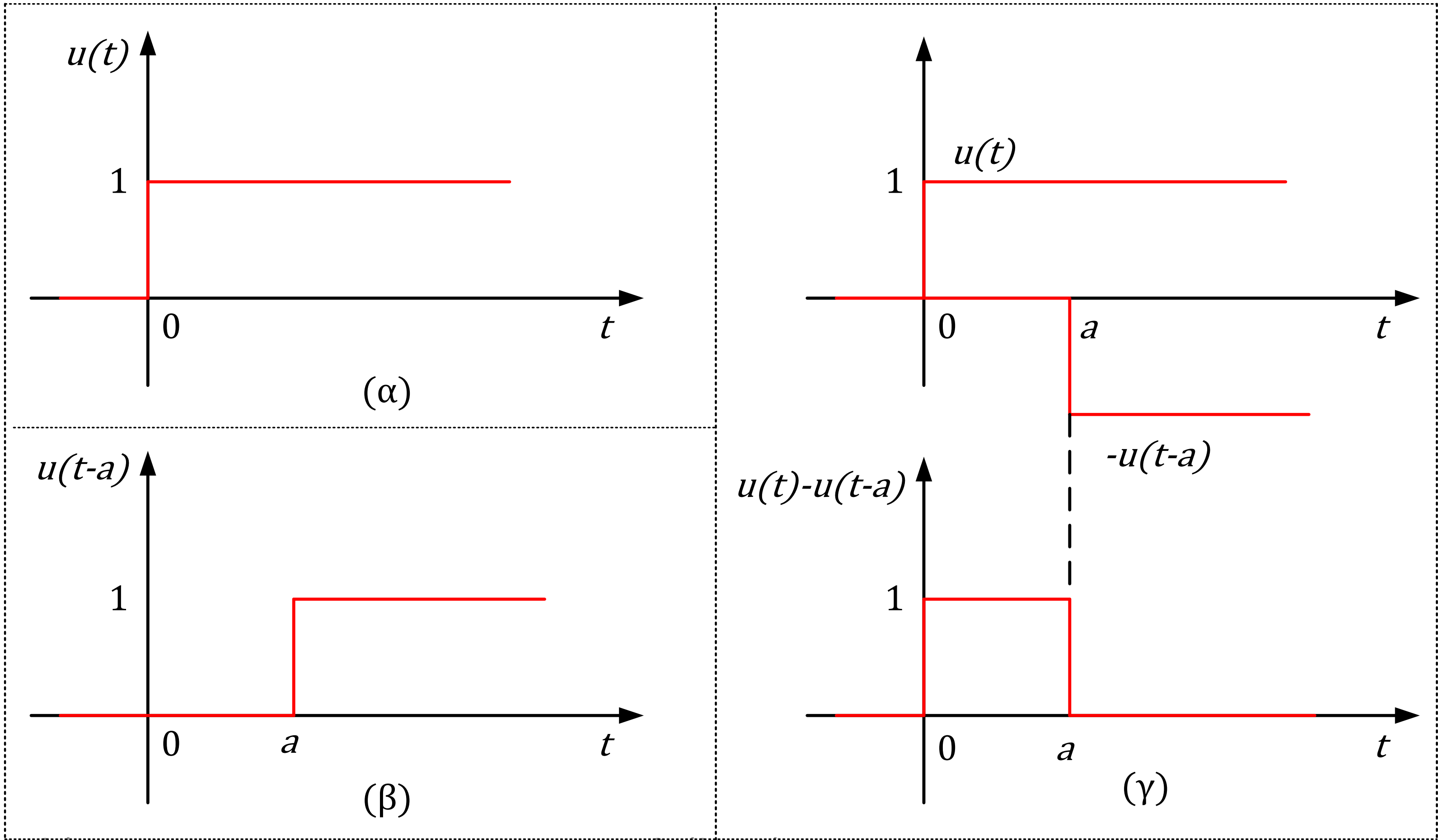
$$i(t) = \frac{U_s}{R} - \frac{U_s}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_s}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



Ειδικές συναρτήσεις: Βηματική

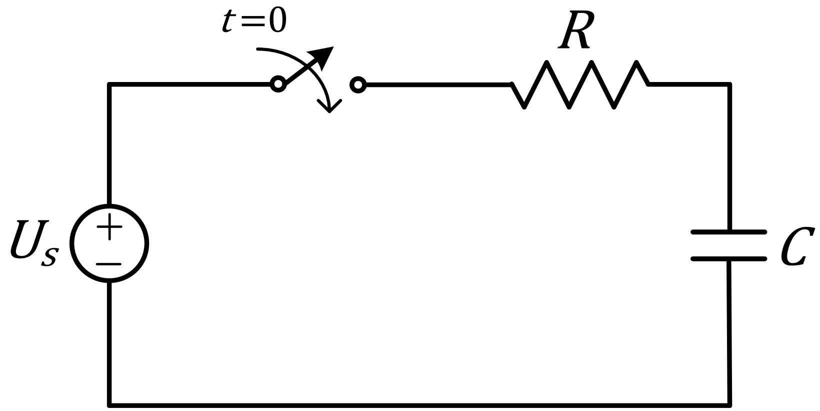
- Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ φαίνεται στο σχήμα (α) και ορίζεται ως

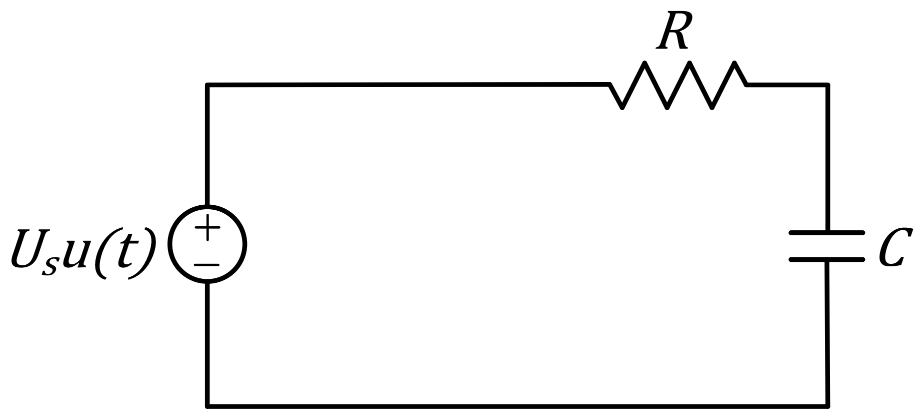
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Ειδικές συναρτήσεις: Βηματική

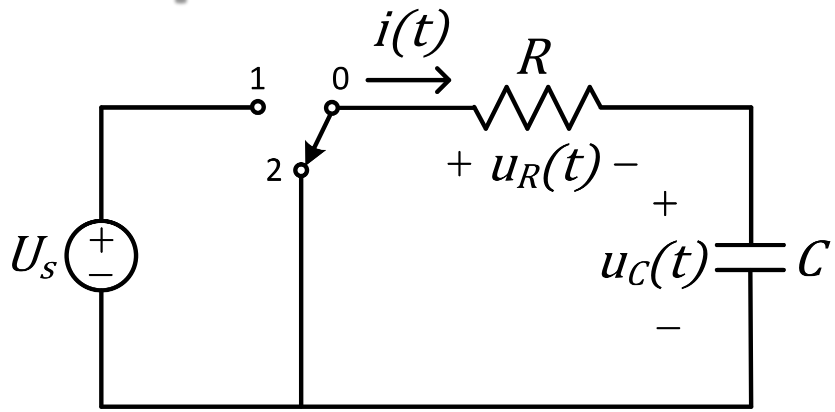
- Στην τιμή $t = 0$ παρουσιάζει ασυνέχεια.
- Δεν έχει διαστάσεις. Αν πολλαπλασιάσουμε με αυτή κάποια τάση U_S τότε το γινόμενο έχει μονάδες τάσης.
- Τα παρακάτω δύο κυκλώματα είναι ισοδύναμα για $t > 0$:





- Σημαντική παρατήρηση: Το $u(t)$ χωρίς κάποιο δείκτη θα συμβολίζει από εδώ και πέρα τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση και όχι απαραίτητα κάποια τάση. Όταν πρόκειται για τάση, θα υπάρχει δείκτης στο συμβολισμό, για παράδειγμα $u_S(t)$.
- Η συνάρτηση $u_S(t) = 3u(t)$ V συμβολίζει μια τάση που είναι μηδέν για $t < 0$ και 3 V για $t > 0$.

Εκφόρτιση πυκνωτή



- Θεωρούμε ότι ο διακόπτης έμεινε αρκετό χρόνο στη θέση 1 ώστε να φορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής σε τάση U_s.
- Έστω τώρα ότι ο διακόπτης πάει στη θέση 2. Το αποτέλεσμα είναι ένα απλό RC κύκλωμα σειράς. Το ρόλο της πηγής παίζει ο πυκνωτής.
- Ρέει ρεύμα μέσω της αντίστασης και η τάση του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο.
- Προκύπτει η απλή εξίσωση:

$$Ri + u_C = 0 \Rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

- Μπορούμε να υποθέσουμε λύση

$$u_C(t) = K_2 e^{-t/\tau}$$

όπου K_2 και τ είναι σταθερές που πρέπει να βρεθούν.

Εκφόρτιση πυκνωτή

- Τη χρονική στιγμή $t = 0$:

$$u_C(0) = U_s \Rightarrow K_2 e^0 = U_s \Rightarrow K_2 = U_s$$

- Επίσης

$$\tau = RC$$

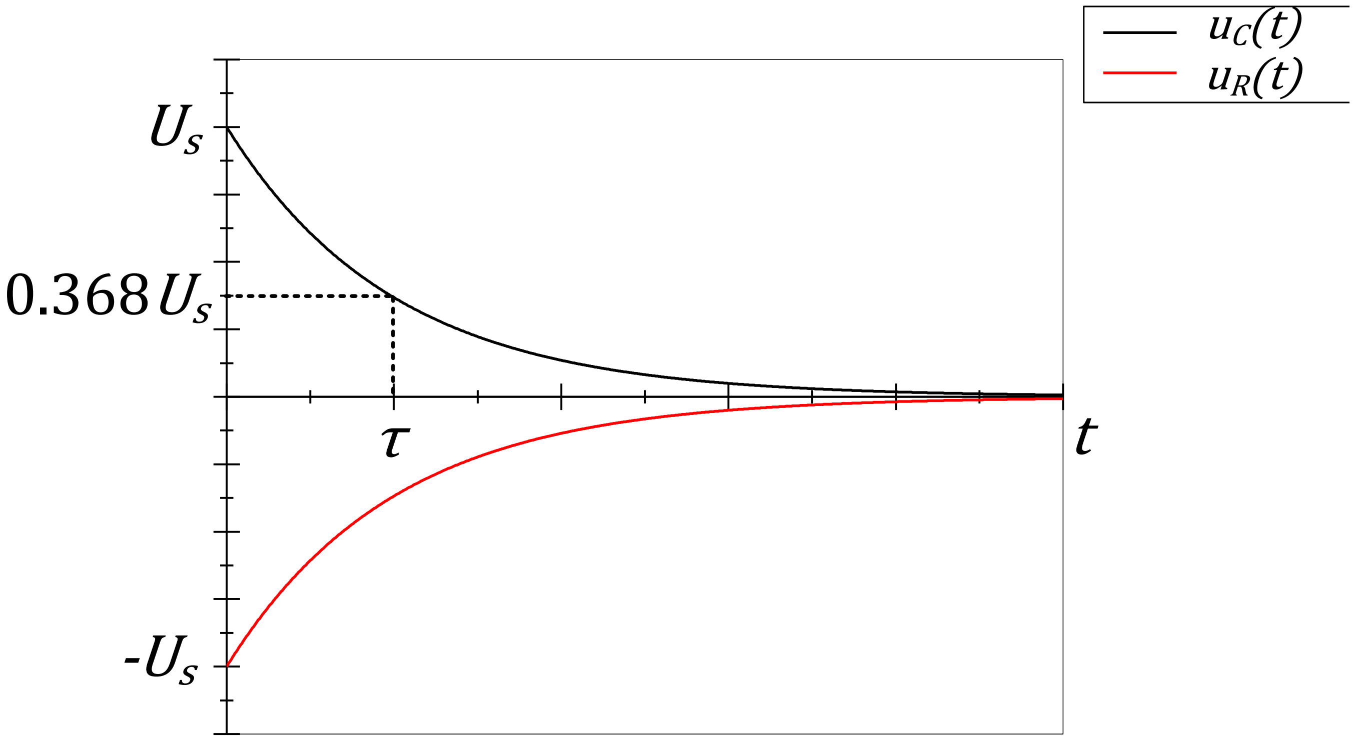
- Επομένως η απόκριση είναι

$$u_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Η τιμή της σταθεράς χρόνου είναι **ίδια με πριν, εφόσον δεν άλλαξαν τα $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$**.
- Η σταθερά χρόνου δείχνει το χρόνο που χρειάζεται η τάση του πυκνωτή να μειωθεί στο 36.8% της αρχικής.

Εκφόρτιση πυκνωτή

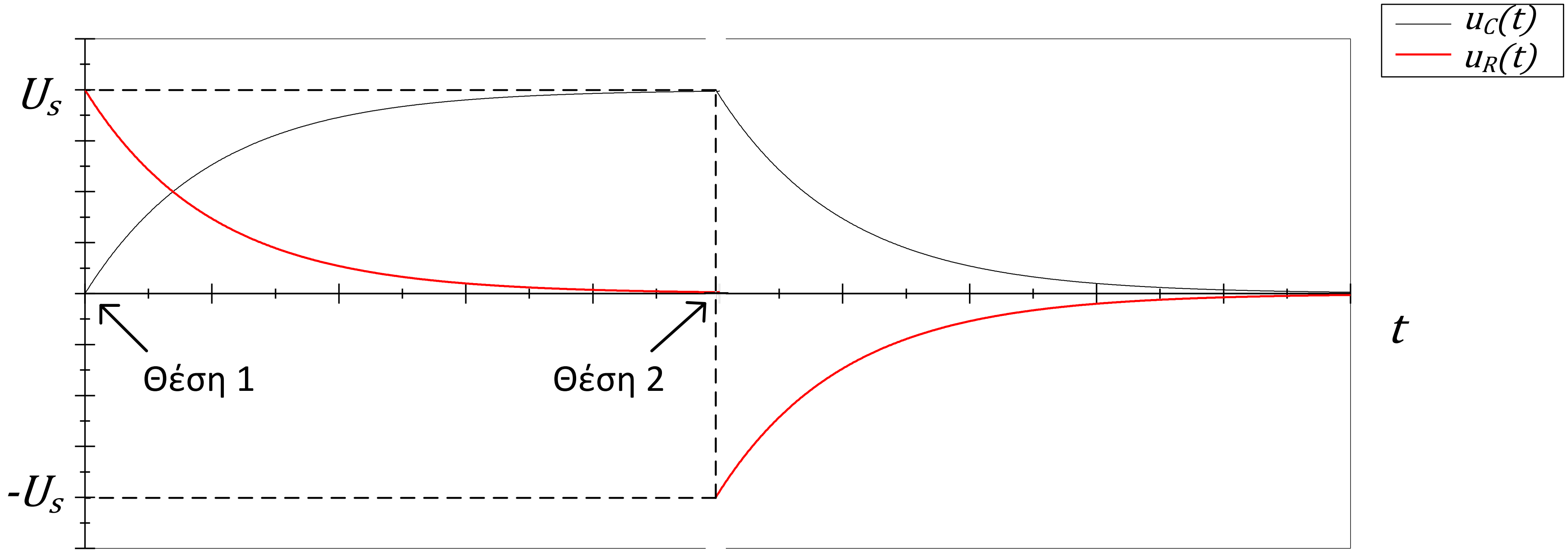
- Στο παρακάτω διάγραμμα έχει σχεδιαστεί η τάση στον πυκνωτή και η τάση στην αντίσταση. Το ρεύμα στο κύκλωμα θα έχει την ίδια μορφή με την τάση στην αντίσταση.



- Παρατηρούμε ότι τώρα η τάση στην αντίσταση και το ρεύμα στο κύκλωμα έχουν αντίθετο πρόσημο από αυτό που θεωρήσαμε ως θετικό. Είναι λογικό αφού ο πυκνωτής έχει το ρόλο της πηγής.

Κύκλωμα RC

- Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν θεωρήσουμε ότι ο διακόπτης τίθεται αρχικά στη θέση 1 και μετά από αρκετό χρονικό διάστημα στη θέση 2, τότε η τάση στα άκρα του μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έχει σχεδιαστεί επίσης η τάση στην αντίσταση, που έχει ίδια μορφή με το ρεύμα στο κύκλωμα.



- Παρατηρούμε ότι η τάση στον πυκνωτή μεταβάλλεται σταδιακά ενώ το ρεύμα μεταβάλλεται ακαριαία με την αλλαγή θέσης του διακόπτη.
- Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν για επαγωγό, μόνο που τότε η τάση του στοιχείου μπορεί να μεταβάλλεται ακαριαία ενώ το ρεύμα όχι.

Κύκλωμα RC

- Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει με την ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο κύκλωμα τη στιγμή που άλλαξε θέση ο διακόπτης.
- Έστω ότι η τάση τότε ήταν U_{C0}.
- Η ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση είναι

$$p_R(t) = \frac{[u_R(t)]^2}{R} = \frac{[-u_C(t)]^2}{R} = \frac{[-U_{C0}e^{-\frac{t}{RC}}]^2}{R} = \frac{{U_{C0}}^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$$

- Η συνολική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση είναι

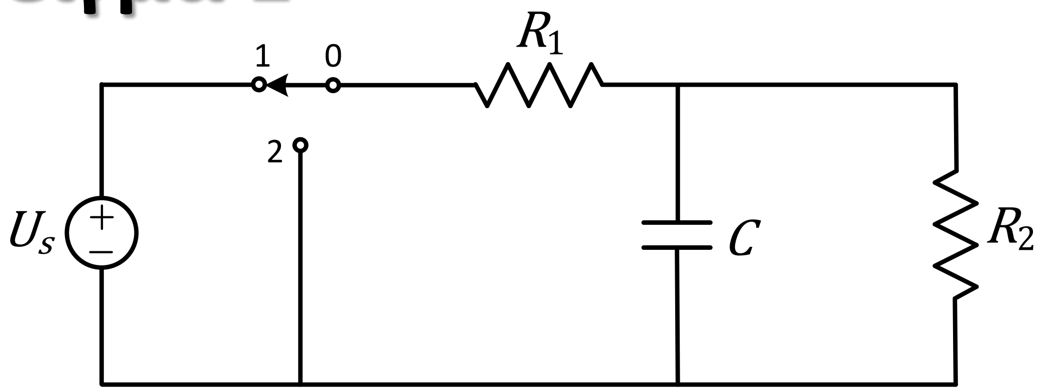
$$w_R = \int_0^{\infty} p_R(t)dt = \frac{{U_{C0}}^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{{U_{C0}}^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2}C{U_{C0}}^2$$

- Αυτή όμως είναι η ενέργεια που ήταν αρχικά αποθηκευμένη στον πυκνωτή. Όταν λοιπόν ο χρόνος $t \to \infty$, η τάση του πυκνωτή έχει μηδενιστεί, καθώς η ενέργειά του έχει αποσβεστεί μέσω της αντίστασης του κυκλώματος.

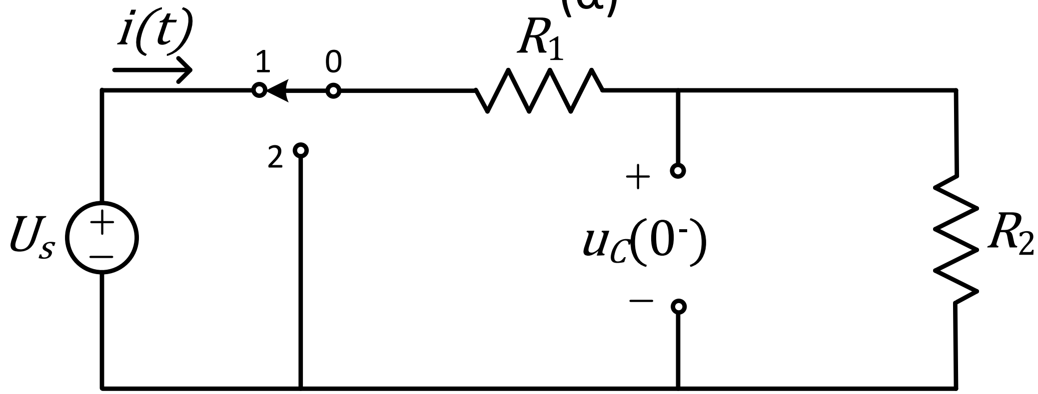
Παράδειγμα 1

- Στο κύκλωμα του σχήματος (α) τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης πηγαίνει από τη θέση 1 στη θέση 2. Να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση R_2 όταν $t > 0$.
- Δίνονται: $U_s = 12\ \mathrm{V}$, $R_1 = 6\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 0.1\ \mathrm{mF}$.

Απάντηση:



(α)

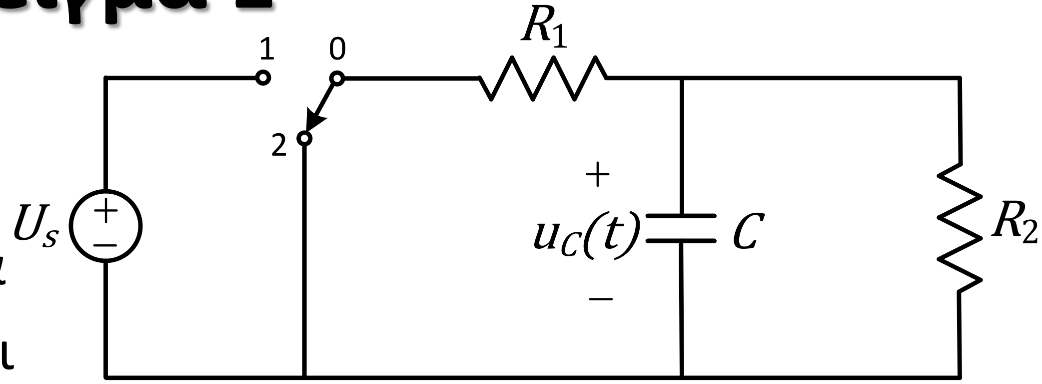


(β)

- Όταν $t = 0^-$ το κύκλωμα βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση, ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος και λειτουργεί ως ανοιχτοκύκλωμα (σχήμα (β)).
- Στις αντιστάσεις ρέει ρεύμα

$$i(t) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{12}{(6+3)\cdot 10^3} = 1.333\ \mathrm{mA}$$

Παράδειγμα 1



(γ)

- Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$u_C(0^-) = U_s - i(t)R_1 = 4 \text{ V}$$

- Όταν ο διακόπτης αλλάξει θέση (σχήμα (γ)) ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται μέσω των δύο αντιστάσεων.
- Ο πυκνωτής «βλέπει» τον παράλληλο συνδυασμό των δύο αντιστάσεων (R_{th}).
- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος θα είναι

$$\tau = RC = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 0.2 \text{ s}$$

- Η τάση του πυκνωτή κατά την εκφόρτιση θα είναι

$$u_C(t) = u_C(0^-) e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-5t} \text{ V}$$

- Επομένως το ρεύμα στην αντίσταση R_2 θα είναι

$$i_{R2}(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} = \frac{4}{3} e^{-5t} \text{ mA}$$