Laplace

Εισαγωγή σε μετασχηματισμούς Laplace

Α. Δροσόπουλος

11 Απριλίου 2024

Στόχος

Σύντομη επισκόπηση μετασχηματισμών Laplace όπως εφαρμόζονται στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

1 Μετασχηματισμοί Laplace

1.1 Ορισμοί

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια τεχνική/εργαλείο που μετασχηματίζει μια συνάρτηση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Μετατρέπει ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές και συμπεριλαμβάνει ενσωματωμένες τις αρχικές συνθήκες. Είναι παρόμοιος με τον μετασχηματισμό σε φάσορα/παραστατικό μιγάδα αλλά πιο γενικός εφόσον εφαρμόζεται και σε μη ημιτονικές συναρτήσεις. Στα παρακάτω θα δούμε πως χρησιμοποιείται στην ανάλυση κυκλωμάτων δίνοντας άμεση και πλήρη λύση σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις. Δεν θα εμβαθύνουμε στην μαθηματική ανάλυση αλλά μόνο στην εφαρμογή της μεθόδου.

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ συμβολίζεται με $F(s)$ ή $\mathcal{L}[f(t)]$ και ορίζεται σαν

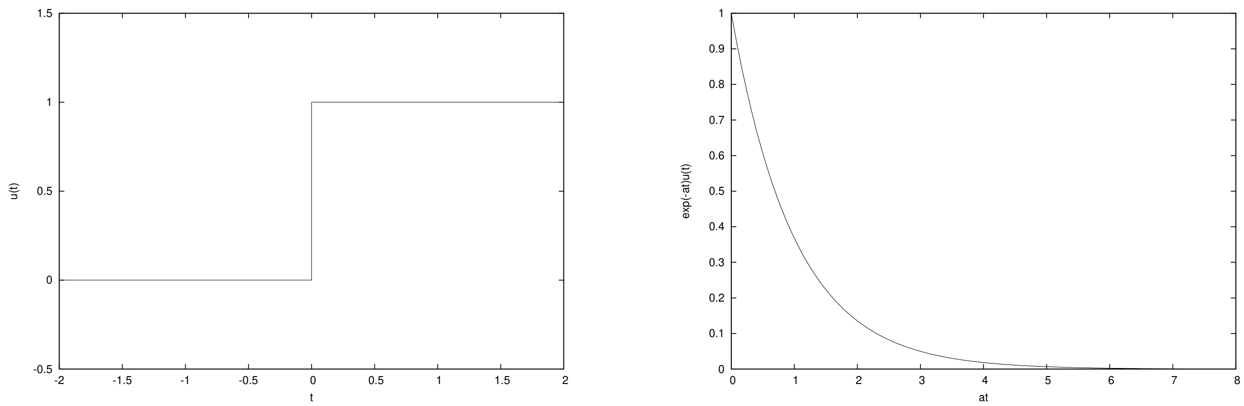
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

όπου $s = \sigma + j\omega$ μια μιγαδική μεταβλητή με διαστάσεις συχνότητας έτσι ώστε ο εκθέτης st να είναι καθαρός αριθμός χωρίς διαστάσεις και το κάτω όριο 0^- του ολοκληρώματος σημαίνει χρόνο λίγο πριν το 0. Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει και ορίζεται για όλες τις κυματομορφές $f(t)$ τάσης ή ρεύματος που μπορεί να συναντήσουμε σε ηλεκτρικά κυκλώματα στην πράξη.

Παράδειγμα 1.1. *Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace των κυματομορφών α)* $u(t)$*, β)* $e^{-at}u(t),\ a \geq 0$ *και γ)* $\sin(\omega t)u(t)$.

Η συνάρτηση $u(t)$ του Heavyside ή βαθμωτή συνάρτηση ορίζεται σαν

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $u(t)$ του Heavyside και η φθίνουσα εκθετική.

Πίνακας 1: Μερικές ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητες	$f(t)$	$F(s)$
Γραμμικότητα	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Αλλαγή κλίμακας χρόνου	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Μετατόπιση στο χρόνο	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Διαφόριση στο χρόνο	$f'(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - ... - f^{(n-1)}(0^-)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
	$\int_a^t f(t)dt$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_a^0 f(t)dt$

Πίνακας 2: Μερικά ζεύγη μετασχηματισμών Laplace. Έχει παραληφθεί η $u(t)$ εκτός όπου είναι απαραίτητη.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega \cos\theta}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

και βασικά συμβολίζει τη λειτουργία ενός διακόπτη που ανοίγει ή κλείνει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{(-s)} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{(-s)} = \frac{1}{s}$$

Για την φθίνουσα εκθετική με $a \geq 0$ έχουμε

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{(-(s+a))} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{(-(s+a))} = \frac{1}{s+a}$$

Για το ημίτονο που αρχίζει την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_{0^-}^{\infty} (e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}) dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται και άλλες απλές συναρτήσεις καθώς επίσης και αποδεικνύονται διάφορες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace (βλ. Πίνακες 1, 2).

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μπορεί να υπολογιστεί με μιγαδικό ολοκλήρωμα ή με ανάλυση σε μερικά κλάσματα. Στα παρακάτω περιγράφονται δυο μέθοδοι με τον δεύτερο τρόπο.

1.2 Μερικά κλάσματα

Η περιγραφή γίνεται με παραδείγματα. Αναλύουμε πρώτα τον παρονομαστή σε όσο πιο απλά επί μέρους γινόμενα μπορούμε.

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2} = \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}$$

Εδώ βρήκαμε τις ρίζες του τριωνύμου στον παρονομαστή (δευτεροβάθμια) ότι είναι $(2, -1)$. Μπορεί να μας βοηθήσει και το octave όπου η συνάρτηση `roots` βρίσκει τις ρίζες οποιουδήποτε πολυωνύμου.

```
octave:2> roots([1 -1 -2])
ans =
   2
  -1
```

Συνεχίζουμε

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 5x-4 \equiv A(x+1) + B(x-2)$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε αναλύοντας το δεξιό μέλος

$$5x-4 \equiv A(x+1) + B(x-2) = Ax + A + Bx - 2B = (A+B)x + (A-2B)$$

που σημαίνει εφόσον έχουμε ταυτότητα

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B &=& 5 \\ A-2B &=& -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} A &=& 2 \\ B &=& 3 \end{array}$$

ή τοποθετώντας διαδοχικά τις ρίζες $(2, -1)$ στην αρχική ταυτότητα

$$\text{για } x = 2, \qquad 5(2) - 4 = A(2+1) \Rightarrow A = 2$$

$$\text{για } x = -1, \qquad 5(-1) - 4 = B(-1-2) \Rightarrow B = 3$$

με τελική μορφή:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1}$$

Ένα δεύτερο παράδειγμα:

$$Y(s) = \frac{3s^2+5s-1}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$3s^2+5s-1 = (A+B)s^2 + (B+C)s + (4A+C) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B &=& 3 \\ B+C &=& 5 \\ 4A+C &=& -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} A &=& -0.6 \\ B &=& 3.6 \\ C &=& 1.4 \end{array}$$

Από τους πίνακες Laplace

$$\frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{Bs}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+4} = B\frac{s}{s^2+4} + \frac{C}{2}\frac{2}{s^2+4}$$

Άρα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -0.6e^{-t} + 3.6\cos(2t) + 0.7\sin(2t)$$

Για περισσότερα και πιο σύνθετα παραδείγματα με πολλαπλούς πόλους (ρίζες παρονομαστή) κοιτάξτε στο αρχείο `Partial Fractions.pdf`.

1.3 Μερικά κλάσματα με μέθοδο Heaviside

Η μορφή συναρτήσεων στο χώρο Laplace στα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε είναι συνήθως της μορφής $F(s) = P(s)/Q(s)$ όπου $P(s), Q(s)$ πολυώνυμα ως προς s. Ανάλογα με τις ρίζες του $Q(s)$ έχουμε:

1. Για απλές πραγματικές ρίζες:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} \qquad \text{με} \qquad A_k = \lim_{s\to p_k}(s-p_k)F(s) \quad \text{για} \quad k = 1, \ldots n$$

2. Για απλές μιγαδικές ρίζες έχουμε ζεύγη μιγαδικών ως εξής:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A}{s-(a+jb)}+\frac{A^*}{s-(a-jb)}+\cdots \qquad \text{με} \qquad A=\lim_{s\to a+jb}[s-(a+jb)]F(s)$$

3. Για ρίζες πολλαπλότητας r:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{Q_1(s)(s-p)^r}=\frac{A_1}{(s-p)^r}+\frac{A_2}{(s-p)^{r-1}}+\cdots+\frac{A_r}{(s-p)}+\cdots$$

όπου

$$A_1=\lim_{s\to p}(s-p)^rF(s) \qquad \text{και} \qquad A_k=\lim_{s\to p}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\Big[(s-p)^rF(s)\Big] \qquad \text{για} \quad k=2,\dots r$$

Παράδειγμα 1.2. *Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της*

$$Y(s)=\frac{3s^2+5s-1}{(s+1)(s^2+4)}$$

Οι ρίζες είναι $-1, \pm j2$, οπότε

$$Y(s)=\frac{3s^2+5s-1}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-j2}+\frac{B^*}{s+j2}$$

με

$$A=\lim_{s\to -1}(s+1)Y(s)=\frac{3-5-1}{1+4}=-\frac{3}{5}=-0.6$$

$$B=\lim_{s\to j2}(s-j2)Y(s)=\frac{3(j2)^2+5(j2)-1}{(j2+1)(j2+j2)}=\frac{-12+j10-1}{-8+j4}=1.834\underline{/-11^\circ}$$

Οπότε

$$Y(s)=-\frac{0.6}{s+1}+\frac{1.834\underline{/-11^\circ}}{s-j2}+\frac{1.834\underline{/11^\circ}}{s+j2}\Rightarrow$$

$$y(t)=-0.6e^{-t}+1.834\underline{/-11^\circ}e^{j2t}+1.834\underline{/11^\circ}e^{-j2t}=-0.6e^{-t}+2\cdot 1.834\cos(2t-11^\circ)=-0.6e^{-t}+3.668\cos(2t-11^\circ)$$

και συνεχίζοντας για να δούμε αν ταυτίζεται με την προηγούμενη λύση

$$3.668\cos(2t-11^\circ)=3.668\Big[\cos(2t)\cos(11^\circ)+\sin(2t)\sin(11^\circ)\Big]=3.668\Big[0.9816\cos(2t)+0.1908\sin(2t)\Big]=$$

$$=3.668\Big[0.9816\cos(2t)+0.1908\sin(2t)\Big]=3.6\cos(2t)+0.7\sin(2t)$$

με τελικό αποτέλεσμα πράγματι ίδιο

$$y(t)=-0.6e^{-t}+3.6\cos(2t)+0.7\sin(2t)$$

Στο παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες:

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

Παράδειγμα 1.3. *Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της*

$$Y(s)=\frac{s+1}{(s-3)^3}$$

Έχουμε

$$Y(s)=\frac{s+1}{(s-3)^3}=\frac{A_1}{(s-3)^3}+\frac{A_2}{(s-3)^2}+\frac{A_3}{(s-3)}$$

$$A_1=\lim_{s\to 3}(s-3)^3Y(s)=\lim_{s\to 3}(s+1)=4$$

$$A_2=\lim_{s\to 3}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\Big[(s-3)^3Y(s)\Big]=\lim_{s\to 3}\frac{d}{ds}\Big[s+1\Big]=1$$

$$A_3=\lim_{s\to 3}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\Big[(s-3)^3Y(s)\Big]=\lim_{s\to 3}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big[s+1\Big]=0$$

Άρα

$$Y(s)=\frac{s+1}{(s-3)^3}=\frac{4}{(s-3)^3}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

και

$$y(t)=2t^2e^{3t}+te^{3t}$$

1.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1. *Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:*

$$
\begin{array}{ll}
y'' + 4y' - 5y = 0 & \text{με αρχικές συνθήκες: } y_0 = 1, y'_0 = 0 \\
y'' + 4y = u(t) & \text{με αρχικές συνθήκες: } y_0 = y'_0 = 0 \\
y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0 & \text{με αρχικές συνθήκες: } y_0 = 2, y'_0 = 1, y''_0 = -1
\end{array}
$$

Λύση

Πρώτη:

$$y'' + 4y' - 5y = 0 \Rightarrow \Big[s^2Y - sy_0 - y'_0\Big] + 4\Big[sY - y_0\Big] - 5Y = 0 \Rightarrow (s^2 + 4s - 5)Y = sy_0 + y'_0 + 4y_0 \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s-5} = \frac{s+4}{(s-1)(s+5)} \equiv \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5} \Rightarrow$$

$$s + 4 \equiv A(s+5) + B(s-1) = (A+B)s + (5A - B) \Rightarrow A = 0.833, B = 0.167 \Rightarrow$$

$$y(t) = Ae^t + Be^{-5t} = 0.833e^t + 0.167e^{-5t}$$

Ο παρακάτω κώδικας είναι σε matlab. Η μόνη διαφορά στο octave είναι η εντολή `pkg load symbolic` στην αρχή.

```
>> syms s
>> Y=(s+4)/(s^2+4*s-5)
Y =
(s + 4)/(s^2 + 4*s - 5)
>> y=ilaplace(Y)
y =
exp(-5*t)/6 + (5*exp(t))/6
```

Δεύτερη:

$$y'' + 4y = u(t) \Rightarrow s^2Y + 4Y = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+4}$$

```
>> syms s
>> Y=1/(s*(s^2+4))
Y =
1/(s*(s^2 + 4))
>> y=ilaplace(Y)
y =
1/4 - cos(2*t)/4
```

Τρίτη:

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0 \Rightarrow \Big[s^3Y - s^2y_0 - sy'_0 - y''_0\Big] + 6\Big[s^2Y - sy_0 - y'_0\Big] + 11\Big[sY - y_0\Big] + 6Y = 0 \Rightarrow$$

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)Y = 2s^2 + s - 1 + 12s - 6 + 22 = 2s^2 + 13s + 15 \Rightarrow Y(s) = \frac{2s^2 + 13s + 15}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 13s + 15}{(s+1)(s+2)(s+3)} \equiv \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

```
>> Y=(2*s^2+13*s+15)/(s^3+6*s^2+11*s+6)
Y =
(2*s^2 + 13*s + 15)/(s^3 + 6*s^2 + 11*s + 6)
>> y=ilaplace(Y)
y =
2*exp(-t) + 3*exp(-2*t) - 3*exp(-3*t)
```

1.5 Αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία

Όπως και με τους φάσορες/παραστατικούς μιγάδες έτσι και εδώ μετασχηματίζεται η σύνθετη αντίσταση των αντιστάσεων, πυκνωτών και πηνίων.

Για τις αντιστάσεις, στο πεδίο του χρόνου έχουμε

$$v(t) = Ri(t)$$

και στο πεδίο των συχνοτήτων (μετασχηματισμός Laplace)

$$V(s) = RI(s)$$

Για τους πυκνωτές, στο πεδίο του χρόνου έχουμε

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

και στο πεδίο των συχνοτήτων (μετασχηματισμός Laplace)

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-) \qquad \text{και} \qquad V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

Οι παραπάνω σχέσεις φαίνονται γραφικά στο σχ. 2. Για μηδενικές αρχικές συνθήκες βλέπουμε ότι η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

Για τα πηνία, στο πεδίο του χρόνου έχουμε

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

και στο πεδίο των συχνοτήτων (μετασχηματισμός Laplace)

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-) \qquad \text{και} \qquad I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$

Οι παραπάνω σχέσεις φαίνονται γραφικά στο σχ. 2. Για μηδενικές αρχικές συνθήκες βλέπουμε ότι η σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι

$$Z_L = sL$$

Παρατηρούμε ότι οι σύνθετες αντιστάσεις κατά Laplace (για μηδενικές αρχικές συνθήκες) είναι ίδιες με τις σύνθετες αντιστάσεις όταν μετασχηματίζουμε σε φάσορες/παραστατικούς μιγάδες αρκεί να γίνει η αντικατάσταση $s = j\omega$. Όταν όμως έχουμε αρχικές συνθήκες προσθέτουμε μια πηγή τάσης ή ρεύματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Με την αντικατάσταση αυτή μπορούμε εν συνεχεία να δουλέψουμε όπως όταν κάνουμε το μετασχηματισμό σε φάσορες. Προσοχή όμως στο γεγονός ότι πρέπει να λαμβάνουμε κατάλληλα υπόψη τις αρχικές συνθήκες (βλ. παραδείγματα).

1.6 Διέγερση βαθμίδας σε RL κυκλώματα}

Επαναλαμβάνουμε το κύκλωμα της διέγερσης βαθμίδας σε RL κυκλώματα.

1.6.1 Φόρτιση

Στη φόρτιση με μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε τα κυκλώματα του σχ. 3 (a), (b). Ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff από το κύκλωμα (b) είναι

$$(sL + R)I(s) = \frac{V_0}{s} \;\Rightarrow\; I(s) = \frac{V_0}{s(sL + R)}$$

$$\frac{V_0}{s(sL + R)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{(sL + R)} \;\Rightarrow\; V_0 \equiv A(sL + R) + Bs = (AL + B)s + AR \;\Rightarrow$$

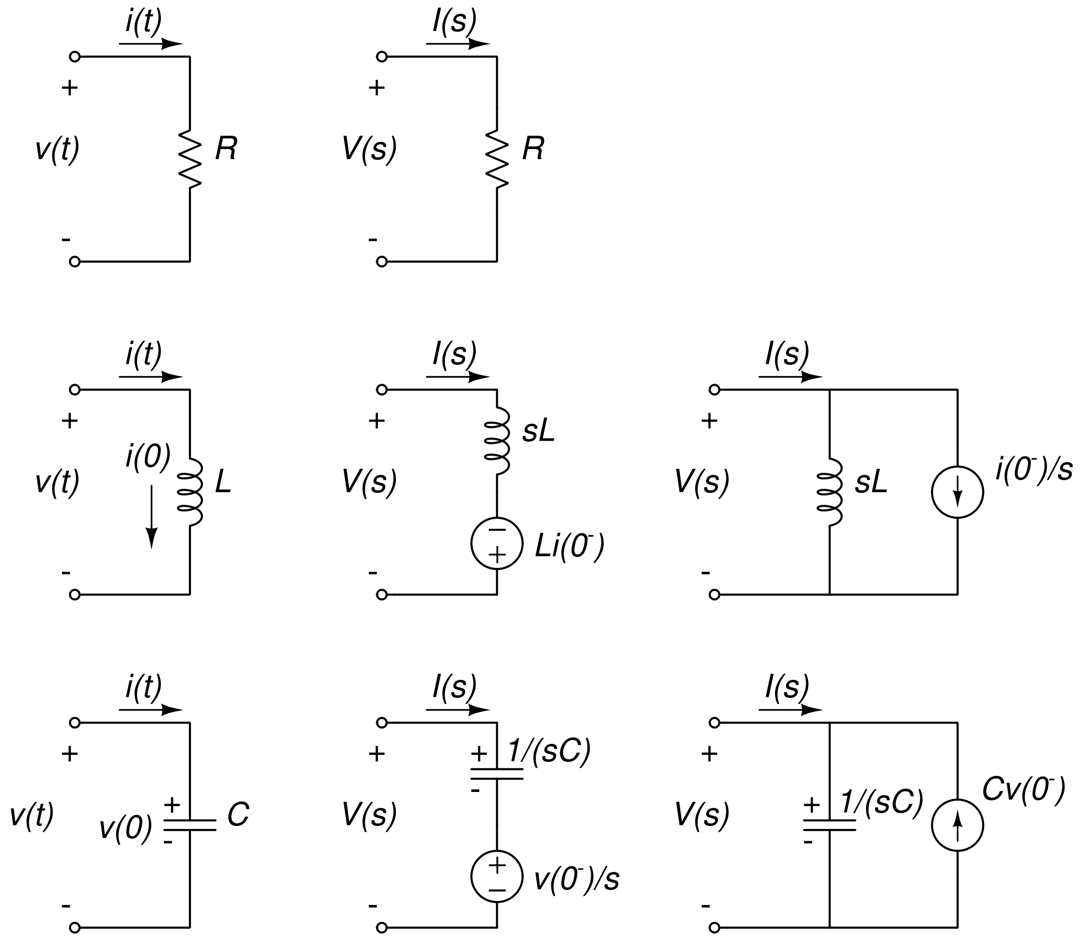
$$A = \frac{V_0}{R} \qquad \text{και} \qquad B = -AL = -\frac{V_0 L}{R}$$

οπότε

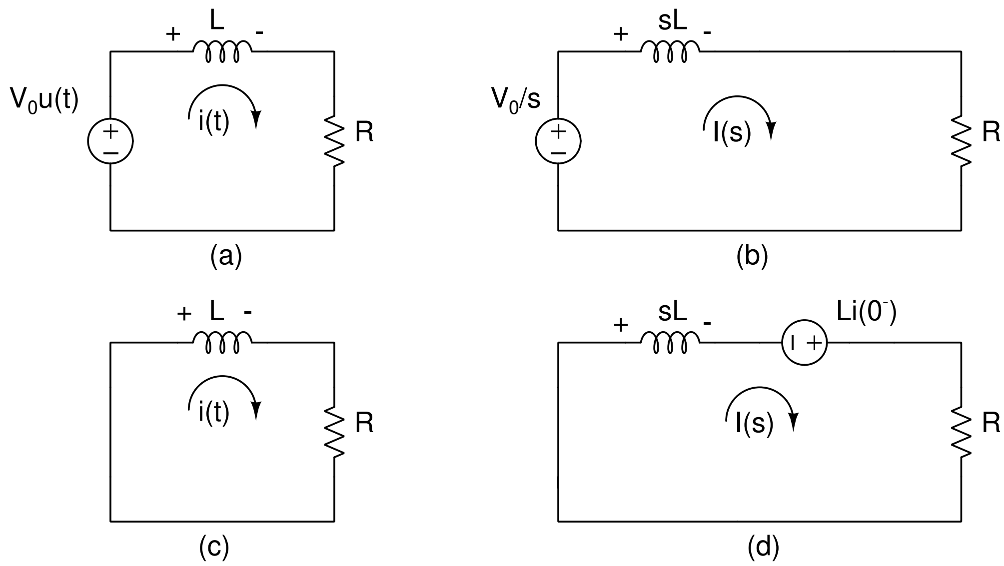
$$I(s) = \frac{V_0}{R}\cdot\frac{1}{s} - \frac{V_0 L}{R}\cdot\frac{1}{(sL + R)} = \frac{V_0}{R}\cdot\frac{1}{s} - \frac{V_0}{R}\cdot\frac{1}{(s + R/L)} \;\Rightarrow\; i(t) = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right),\; t \geq 0$$

Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι

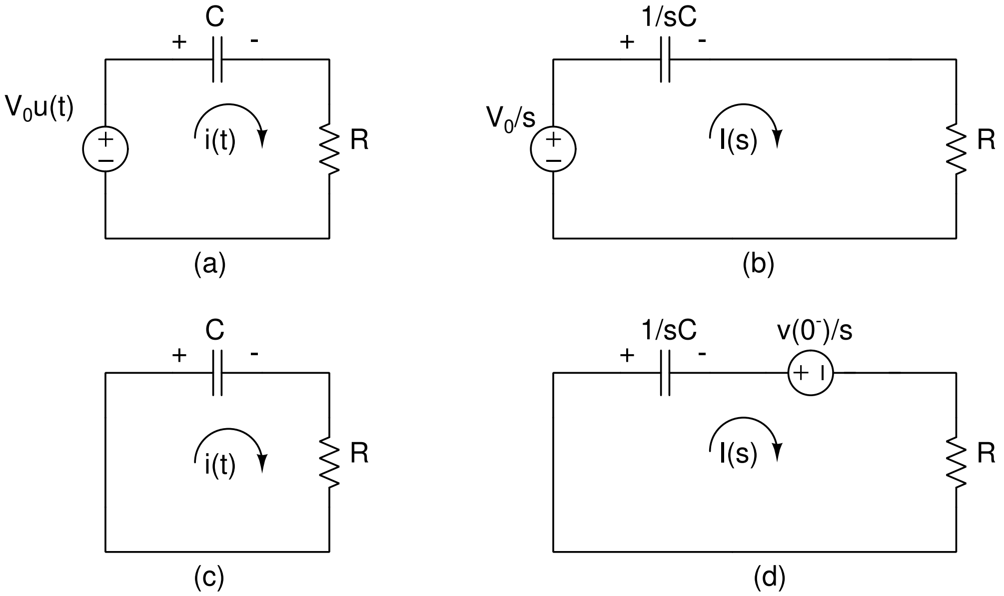
$$v(t) = L\frac{di}{dt} = L\left(-\frac{V_0}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-(R/L)t} = V_0\; e^{-(R/L)t},\; t \geq 0$$



Σχήμα 2: Ισοδύναμα κυκλώματα για τα βασικά στοιχεία αντιστάτης, επαγωγέας, πυκνωτής στο χώρο των συχνοτήτων όταν έχουμε αρχικές συνθήκες τάσης ή ρεύματος όπως φαίνονται στο σχήμα.



Σχήμα 3: Διέγερση βαθμίδας σε RL κύκλωμα. Το κύκλωμα φόρτισης με μηδενικές αρχικές συνθήκες στο πεδίο του χρόνου, (a), και το ίδιο κύκλωμα στο πεδίο συχνοτήτων, (b). Το κύκλωμα εκφόρτισης με μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες στο πεδίο του χρόνου, (c), και το ίδιο κύκλωμα στο πεδίο συχνοτήτων, (d).



Σχήμα 4: Διέγερση βαθμίδας σε RC κύκλωμα. Το κύκλωμα φόρτισης με μηδενικές αρχικές συνθήκες στο πεδίο του χρόνου, (a), και το ίδιο κύκλωμα στο πεδίο συχνοτήτων, (b). Το κύκλωμα εκφόρτισης με μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες στο πεδίο του χρόνου, (c), και το ίδιο κύκλωμα στο πεδίο συχνοτήτων, (d).

1.6.2 Εκφόρτιση

Όταν το πηνίο έχει φορτιστεί στη μέγιστη τιμή ρεύματος V_0/R και «βγάλουμε» την πηγή, έχουμε τα κυκλώματα του σχ. 3 (c), (d). Από το κύκλωμα (d) έχουμε τότε

$$sLI(s) - Li(0^-) + RI(s) = 0 \;\Rightarrow\; sLI(s) - L\,\frac{V_0}{R} + RI(s) = 0 \;\Rightarrow$$

$$I(s) = \frac{V_0 L}{R}\cdot\frac{1}{(sL+R)} = \frac{V_0}{R}\cdot\frac{1}{(s+R/L)} \;\Rightarrow\; i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-(R/L)t},\; t \geq 0$$

Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = L\left(\frac{V_0}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-(R/L)t} = -V_0\; e^{-(R/L)t},\; t \geq 0$$

Το πρόσημο δείχνει την αλλαγή της πολικότητας στο πηνίο καθώς «προσπαθεί» να «εμποδίσει» την μείωση του ρεύματος.

1.7 Διέγερση βαθμίδας σε RC κυκλώματα

1.7.1 Φόρτιση

Επαναλαμβάνουμε για κύκλωμα RC. Στη φόρτιση οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν. Ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff από το κύκλωμα στο σχ. 4 (b) είναι

$$\frac{I(s)}{sC} + RI(s) - \frac{V_0}{s} = 0 \;\Rightarrow\; I(s) = \frac{V_0}{R[s+1/(RC)]} \;\Rightarrow\; i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}, t \geq 0$$

και η τάση στα άκρα του πυκνωτή

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}dt = V_0\left(1 - e^{-t/RC}\right), t \geq 0$$

1.7.2 Εκφόρτιση

Όταν ο πυκνωτής έχει φορτιστεί στη μέγιστη τιμή τάσης V_0 και «βγάλουμε» την πηγή ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται. Ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff από το κύκλωμα στο σχ. 4 (d) είναι

$$\frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s} + RI(s) = 0 \;\Rightarrow$$

$$I(s) + Cv(0^-) + RCsI(s) = 0 \;\Rightarrow\; I(s) = -\frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{[s + 1/(RC)]} \;\Rightarrow\; i(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/RC}, t \geq 0$$

και η τάση στα άκρα του πυκνωτή

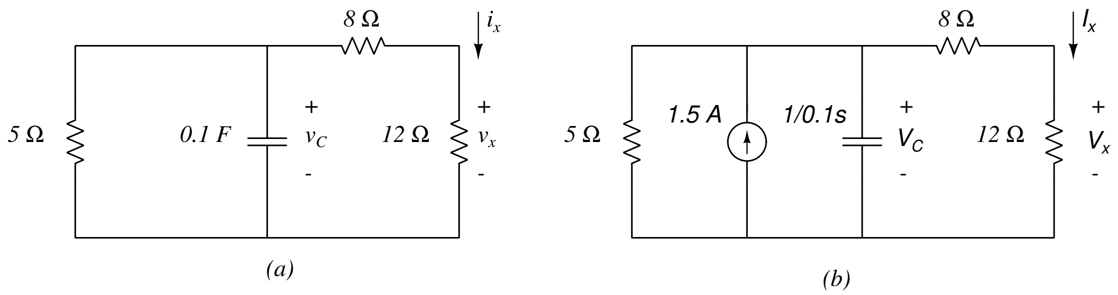
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt + V_0 = -\frac{V_0}{RC} e^{-t/RC}(-RC)\Big]_0^t + V_0 = V_0 e^{-t/RC}\Big]_0^t + V_0 = V_0 e^{-t/RC} - V_0 + V_0 = V_0 e^{-t/RC}, t \geq 0$$

Προσέξτε ότι προσθέσαμε την αρχική τιμή της τάσης V_0 σε σειρά με τον πυκνωτή για να συμπεριλάβουμε το γεγονός ότι ο πυκνωτής ήταν αρχικά φορτισμένος με αυτήν την τάση.

Τα αποτελέσματα είναι ίδια με αυτά που υπολογίστηκαν με τον συμβατικό τρόπο.

1.8 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.4. *Έστω $v_C(0) = 15$ V στο παρακάτω κύκλωμα (a). Να βρεθούν τα μεγέθη $v_C(t), v_x(t)$ και $i_x(t)$ για $t > 0$.*



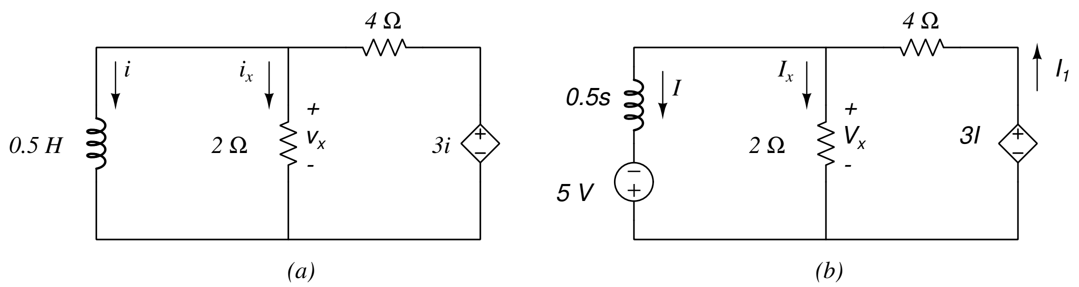
Μετασχηματίζοντας κατά Laplace έχουμε το κύκλωμα (b) όπου την αρχική τάση στον πυκνωτή την έχουμε αντικαταστήσει με την πηγή ρεύματος $Cv(0^-) = 0.1 \cdot 15 = 1.5$ A. Εφαρμόζοντας κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω αριστερό κόμβο έχουμε:

$$-\frac{V_C}{5} + 1.5 - 0.1sV_C - \frac{V_C}{20} = 0 \;\Rightarrow\; V_C = \frac{1.5}{0.1s + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}} = \frac{15}{s + 2.5} \;\Rightarrow\; v_C(t) = 15\ e^{-2.5t}\ \text{V},\ \text{για}\ t > 0$$

και

$$I_x = \frac{V_C}{20} \;\Rightarrow\; i_x(t) = 0.75\ e^{-2.5t}\ \text{V}, \qquad V_x = I_x \cdot 12 \;\Rightarrow\; v_x(t) = 9\ e^{-2.5t}\ \text{V}, \qquad \text{για}\ t > 0$$

Παράδειγμα 1.5. *Έστω $i(0) = 10$ A στο παρακάτω κύκλωμα (a). Να βρεθούν τα μεγέθη $i(t), v_x(t)$ και $i_x(t)$ για $t > 0$.*



Μετασχηματίζοντας κατά Laplace έχουμε το κύκλωμα (b) όπου το αρχικό ρεύμα στο πηνίο το έχουμε αντικαταστήσει με την πηγή τάσης $Li(0^-) = 0.5 \cdot 10 = 5$ V. Με κανόνες Kirchhoff έχουμε

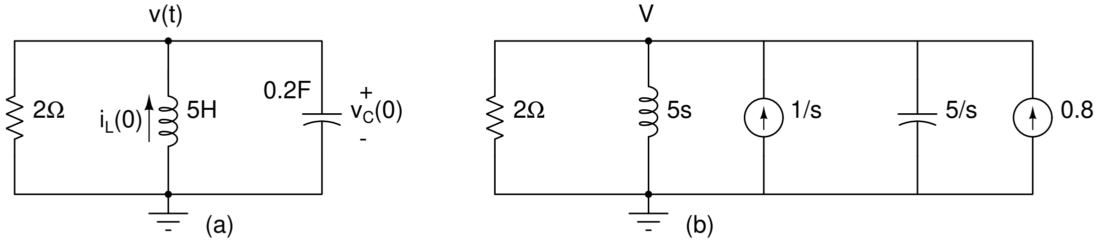
$$\left.\begin{array}{rcl} I_1 - I_x - I &=& 0 \\ 0.5sI - 5 - 2I_x &=& 0 \\ 4I_1 + 2I_x - 3I &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} I_1 = I_x + I \\ -3sI_x - 2I_x = 5 \\ 6I_x + I = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_x = -\frac{5}{3s+2} = -\frac{5/3}{s + 2/3} \;\Rightarrow$$

$$i_x(t) = -\frac{5}{3}\ e^{-2t/3}\ \text{A, για}\ t > 0$$

$$v_x(t) = 2i_x(t) = -\frac{10}{3}\ e^{-2t/3}\ \mathrm{V}, \text{για } t > 0$$

$$I = -6I_x = \frac{10}{s+2/3} \ \Rightarrow\ i(t) = 10\ e^{-2t/3}\ \mathrm{A}, \text{για } t > 0$$

Παράδειγμα 1.6. *Στο παρακάτω κύκλωμα (a) έχουμε $i_L(0) = 1$ A και $v_C(0) = 4$ V. Να βρεθεί η τάση του κόμβου $v(t)$ και το ρεύμα στον επαγωγέα $i_L(t)$ για $t \geq 0$.*



Μετασχηματίζουμε κατά Laplace στο κύκλωμα (b) όπου επιλέξαμε να προσθέσουμε τις αρχικές συνθήκες με μορφή πηγών ρεύματος. Έχουμε

$$-\frac{V}{2} - \frac{V}{5s} + \frac{1}{s} - \frac{sV}{5} + 0.8 = 0 \ \Rightarrow$$

$$V = \frac{0.8 + \dfrac{1}{s}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5s} + \dfrac{s}{5}} = \frac{4s+5}{s^2+2.5s+1} = \frac{4s+5}{(s+0.5)(s+2)} \equiv \frac{A}{s+0.5} + \frac{B}{s+2}$$

$$4s + 5 \equiv A(s+2) + B(s+0.5) \ \Rightarrow\ A = 2, \quad B = 2$$

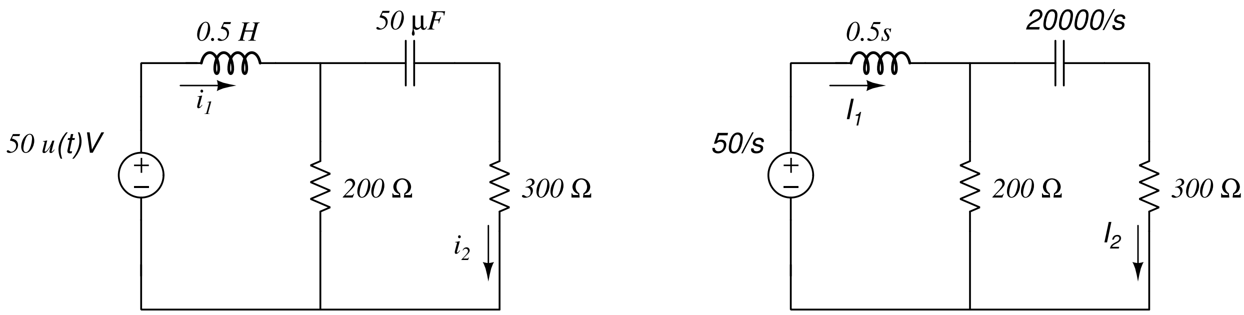
και η τάση $v(t)$ είναι

$$v(t) = 2\ e^{-2t} + 2\ e^{-0.5t},\ t \geq 0$$

Το ρεύμα στον επαγωγέα

$$I_L = \frac{V}{5s} - \frac{1}{s} = \cdots = \frac{0.8}{s} - \frac{0.8}{s+0.5} + \frac{0.2}{s} - \frac{0.2}{s+2} - \frac{1}{s} = -\frac{0.8}{s+0.5} - \frac{0.2}{s+2} \ \Rightarrow\ i(t) = -0.8\ e^{-0.5t} - 0.2\ e^{-2t},\ t \geq 0$$

Παράδειγμα 1.7. *Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα $i_1(t)$, $i_2(t)$ για $t \geq 0$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες.*



Μετασχηματίζοντας κατά Laplace έχουμε το κύκλωμα (b). Η ολική εμπέδηση που φαίνεται από την πηγή είναι

$$Z_{\text{ολ}} = \left[\left(\frac{20000}{s} + 300 \right) \parallel 200 \right] + 0.5s = \cdots = \frac{(80+s)(200+s)}{2(40+s)}$$

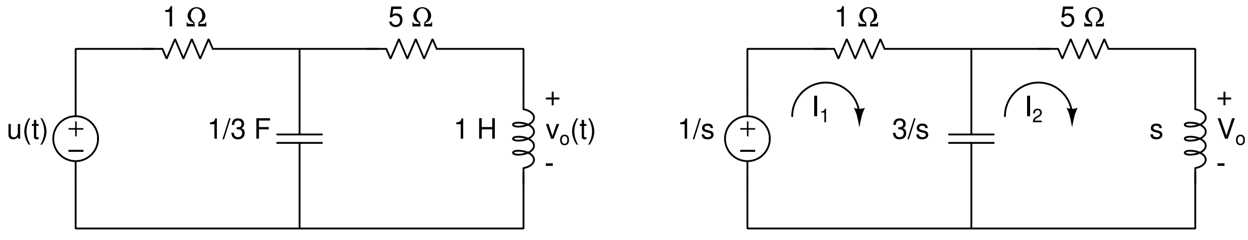
άρα

$$I_1 = \frac{V}{Z_{\text{ολ}}} = \frac{100(40+s)}{s(80+s)(200+s)} \ \Rightarrow\ \cdots\ \Rightarrow\ i_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}\ e^{-80t} - \frac{2}{3}\ e^{-200t}\ \mathrm{A},\ t \geq 0$$

και με διαιρέτη ρεύματος

$$I_2 = \frac{200}{\dfrac{20000}{s} + 300 + 200}\ I_1 = \frac{40}{(80+s)(200+s)} \ \Rightarrow\ i_2(t) = \frac{1}{3}\ e^{-80t} - \frac{1}{3}\ e^{-200t}\ \mathrm{A},\ t \geq 0$$

Παράδειγμα 1.8. *Στο παρακάτω κύκλωμα (a) να υπολογιστεί η τάση $v_o(t)$ για $t \geq 0$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες.*



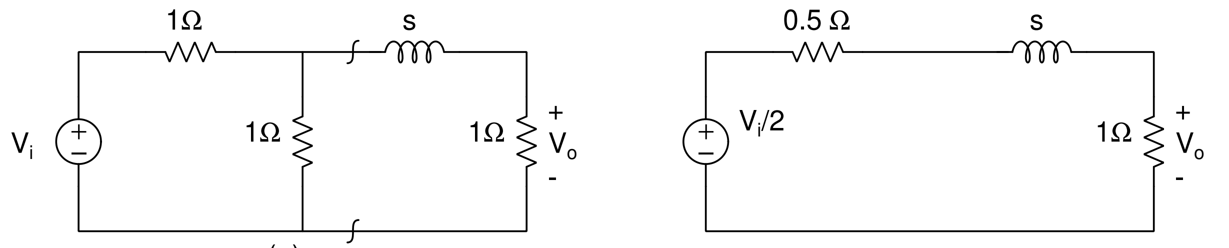
(a) (b)

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace έχουμε το κύκλωμα (b). Με μέθοδο οφθαλμών

$$\left.\begin{array}{rcl} \left(1+\frac{3}{s}\right)I_1 - \frac{3}{s}I_2 &=& \frac{1}{s} \\ -\frac{3}{s}I_1 + \left(5+s+\frac{3}{s}\right)I_2 &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} (s+3)I_1 - 3I_2 &=& 1 \\ -3I_1 + (s^2+5s+3)I_2 &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{3}{s(s^2+8s+18)} \Rightarrow V_o = sI_2 = \frac{3}{s^2+8s+18} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2+(\sqrt{2})^2} \Rightarrow v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}}\, e^{-4t}\sin(\sqrt{2}t) \text{ V}, \ t \geq 0$$

Παράδειγμα 1.9. *Στο παρακάτω κύκλωμα (a) στο πεδίο s να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = V_o/V_i$ και η απόκριση $v_o(t)$ όταν $v_i(t) = u(t)$ ή $v_i(t) = 8\cos(2t)$ V.*



(a) (b)

Με εφαρμογή θεωρήματος Thevenin στα σημεία τομής που φαίνονται στο κύκλωμα έχουμε το (b). Με διαιρέτη τάσης στο βρόγχο έχουμε

$$V_o = \frac{1}{1+s+0.5}\cdot\frac{V_i}{2} \Rightarrow H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/2}{s+1.5}$$

Όταν $v_i(t) = u(t) \Rightarrow V_i = 1/s$. Οπότε

$$V_o = \frac{1}{2s(s+1.5)} = \frac{1/3}{s} - \frac{1/3}{s+1.5} \Rightarrow v_o(t) = \frac{1}{3}\left(1-e^{-1.5t}\right) \text{ V}, \ t \geq 0$$

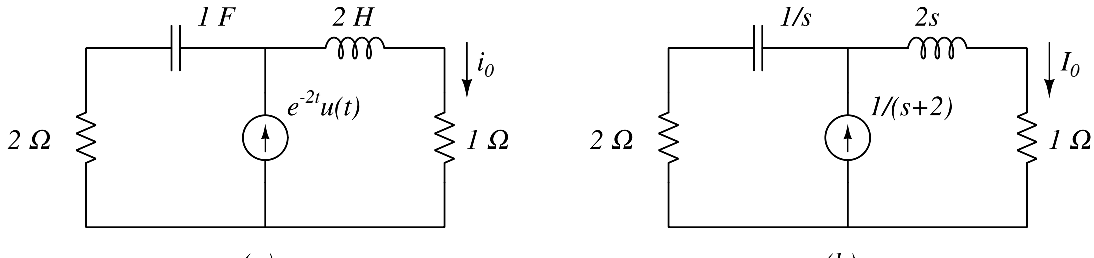
Όταν $v_i(t) = 8\cos(2t) \Rightarrow V_i = \frac{8s}{s^2+4}$. Οπότε

$$V_o = H(s)V_i = \frac{4s}{(s+1.5)(s^2+4)} \equiv \frac{A}{s+1.5} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$(A+B)s^2 + (1.5B+\Gamma)s + (4A+1.5\Gamma) \equiv 4s \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ 1.5B+\Gamma &=& 4 \\ 4A+1.5\Gamma &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} A &=& -24/25 \\ B &=& 24/25 \\ \Gamma &=& 64/25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$V_o = -\frac{24}{25(s+1.5)} - \frac{24}{25}\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{32}{25}\cdot\frac{2}{s^2+4} \Rightarrow v_o(t) = \frac{24}{25}\left(-e^{-1.5t} + \cos 2t + \frac{4}{3}\sin 2t\right) \text{ V}, \ t \geq 0$$

Παράδειγμα 1.10. *Να βρεθεί το ρεύμα $i_o(t), t \geq 0$ στο παρακάτω κύκλωμα (a) με μηδενικές αρχικές συνθήκες.*



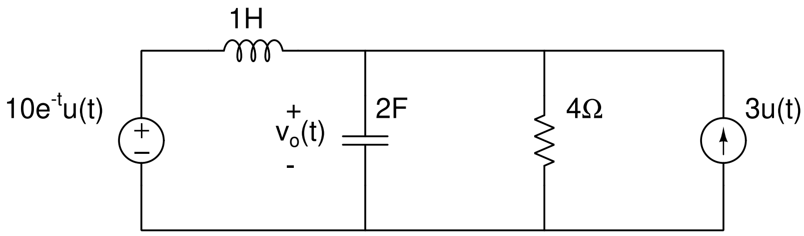
(a) (b)

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace έχουμε το κύκλωμα (b). Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_o = \frac{2+1/s}{2+1/s+2s+1}\cdot\frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \;\Rightarrow\; i_o(t) = e^{-t} - e^{-2t}\ \text{A},\ t \geq 0$$

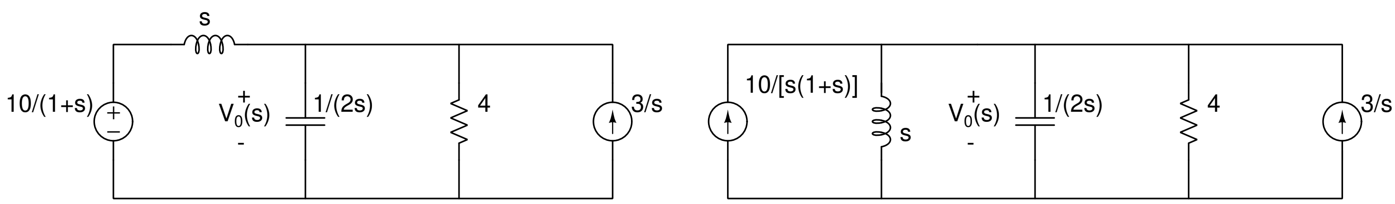
1.9 Ασκήσεις

Άσκηση 1.2. *Να βρεθεί η $v_o(t),\ t \geq 0$ στο κύκλωμα, με μηδενικές αρχικές συνθήκες.*



Λύση

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace έχουμε το (a). Μετασχηματίζοντας πάλι την πηγή τάσης σε ρεύματος έχουμε το (b).



(a) (b)

Κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο δίνει:

$$\frac{10}{s(1+s)} + \frac{3}{s} = V_0\left(\frac{1}{s} + 2s + \frac{1}{4}\right) \;\Rightarrow\; \frac{13+3s}{s(1+s)} = V_0\,\frac{4+s+8s^2}{4s} \;\Rightarrow\; V_0 = \frac{4s(13+3s)}{s(1+s)(4+s+8s^2)} = \frac{52+12s}{(1+s)(4+s+8s^2)}$$

Το τριώνυμο στον παρονομαστή έχει ρίζες μιγαδικές άρα προσπαθούμε να συμπληρώσουμε τετράγωνο.

$$8s^2+s+4 = 8\left(s^2+\frac{s}{8}+\frac{4}{8}\right) = 8\left(s^2+2\frac{s}{16}+\frac{1}{16^2}-\frac{1}{16^2}+\frac{1}{2}\right) = 8\left[\left(s+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{127}{256}\right]$$

οπότε

$$V_0(s) = \frac{52+12s}{8(1+s)\left[\left(s+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{127}{256}\right]} = \frac{6.5+1.5s}{(1+s)\left[\left(s+\frac{1}{16}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{127}}{16}\right)^2\right]} = \frac{6.5+1.5s}{(1+s)\Big[(s+a)^2+b^2\Big]}$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$\frac{6.5+1.5s}{(1+s)\Big[(s+a)^2+b^2\Big]} \equiv \frac{A}{1+s} + \frac{Bs+C}{(s+a)^2+b^2}$$

από όπου

$$
\left.\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ 2aA+B+C & = & 1.5 \\ (a^2+b^2)A+C & = & 6.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} A & = & 3.636 \\ B & = & -3.636 \\ C & = & 4.682 \end{array}
$$

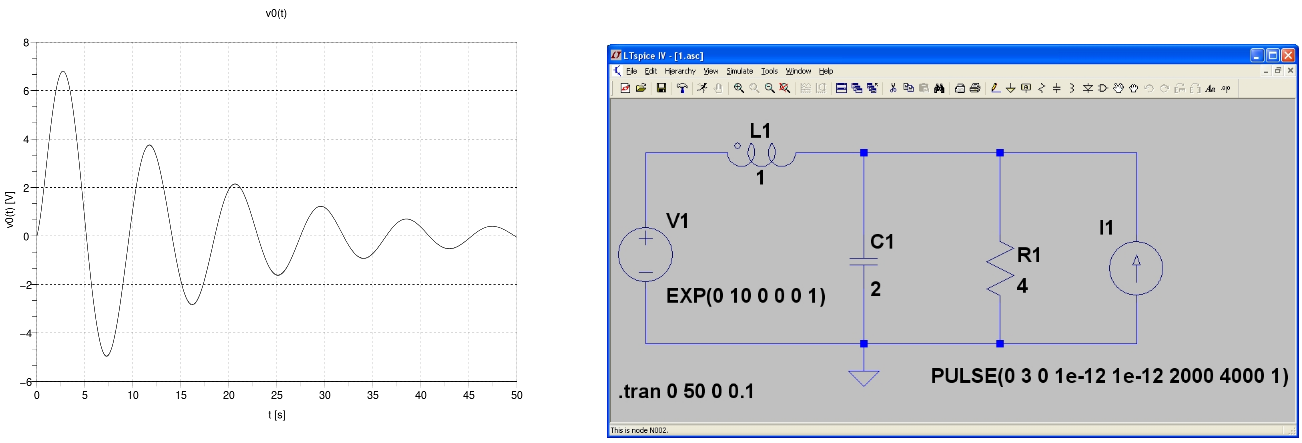
και για $t \geq 0$

$$
V_0(s) = A\,\frac{1}{s+1} + B\,\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} + \frac{C-Ba}{b}\,\frac{b}{(s+a)^2+b^2} \Rightarrow
$$

$$
v_0(t) = Ae^{-t} + Be^{-at}\cos(bt) + \frac{C-Ba}{b}\,e^{-at}\sin(bt) =
$$

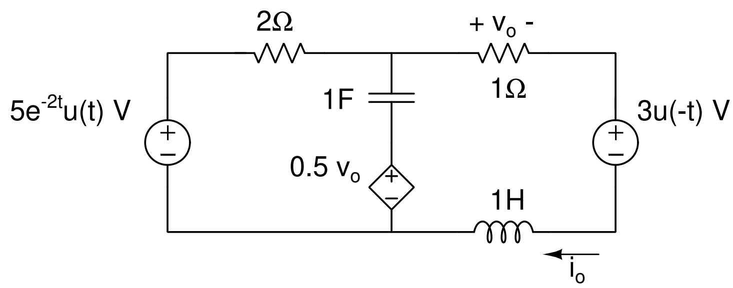
$$
3.636\ e^{-t} - 3.636\ e^{-0.0625t}\cos(0.704t) + 6.970\ e^{-0.0625t}\sin(0.704t)\ \text{V}
$$

Επιβεβαίωση των παραπάνω με octave και spice φαίνεται στο σχ. 5 όπου η γραφική συμπεριλαμβάνει την συνάρτηση που υπολογίσαμε (σχεδιασμένη με το octave) με τα αποτελέσματα του spice από το αντίστοιχο σχηματικό κυκλώματος.



Σχήμα 5: Επιβεβαίωση με octave και spice.

Άσκηση 1.3. *Να βρεθεί το ρεύμα $i_o(t)$, $t > 0$ στο κύκλωμα.*



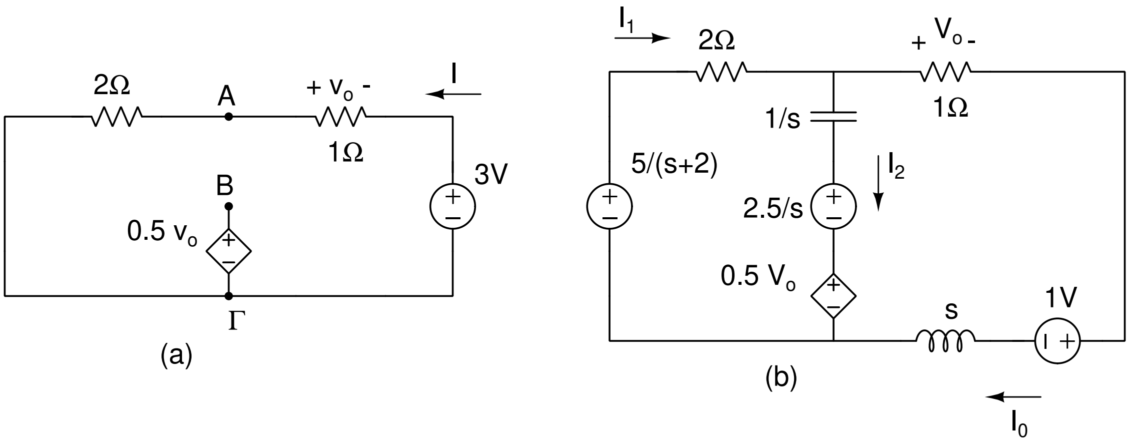
Λύση

Η πηγή τάσης δεξιά δείχνει ότι λειτουργεί πριν την χρονική στιγμή $t = 0$. Επομένως πριν την χρονική στιγμή $t = 0$ η κατάσταση έχει όπως φαίνεται στο κύκλωμα (a). Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες στον πυκνωτή και πηνίο, δηλ. τάση και ρεύμα αντίστοιχα.

Στο κύκλωμα (a) ο πυκνωτής είναι ανοικτό κύκλωμα και το πηνίο βραχυκύκλωμα. Επομένως, $I = 3/(2{+}1) = 1$ A, $v_0 = -1$ V και $V_{AB} = 2I - 0.5v_o = 2 - 0.5(-1) = 2.5$ V. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$
v_C(0) = V_{AB} = 2.5\ \text{V} \qquad i_L(0) = -I = -1\ \text{A}
$$

και το αρχικό κύκλωμα μετατρέπεται στο (b) όπου ταυτόχρονα κάναμε τους μετασχηματισμούς Laplace στα στοιχεία και συμπεριλάβαμε τις αρχικές συνθήκες.



Με κανόνες Kirchoff έχουμε

$$\left.\begin{aligned} I_0 + I_2 &= I_1 \\ 2I_1 + \frac{I_2}{s} + \frac{2.5}{s} + 0.5V_0 &= \frac{5}{s+2} \\ I_0(1+s) + 1 - 0.5V_0 - \frac{2.5}{s} - \frac{I_2}{s} &= 0 \\ V_0 &= I_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2.5I_0 + \left(2 + \frac{1}{s}\right) I_2 &= \frac{5}{s+2} - \frac{2.5}{s} \\ I_0(0.5+s) - \frac{I_2}{s} &= \frac{2.5}{s} - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

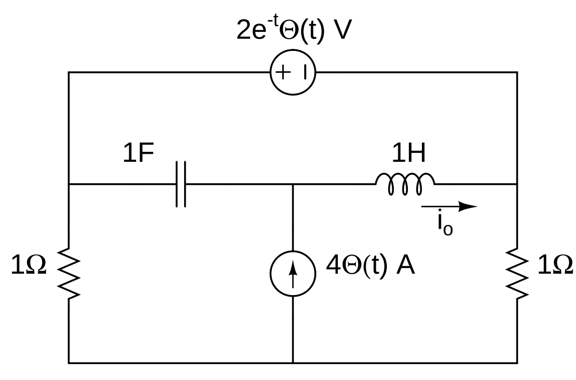
$$I_0 = \frac{13 - 2s^2}{(s+2)(2s^2+2s+3)}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace για $t \geq 0$ είναι

$$i_0(t) = 0.714e^{-2t} - 1.714e^{-t/2}\cos(1.118t) + 3.194e^{-t/2}\sin(1.118t)\ \mathrm{A}$$

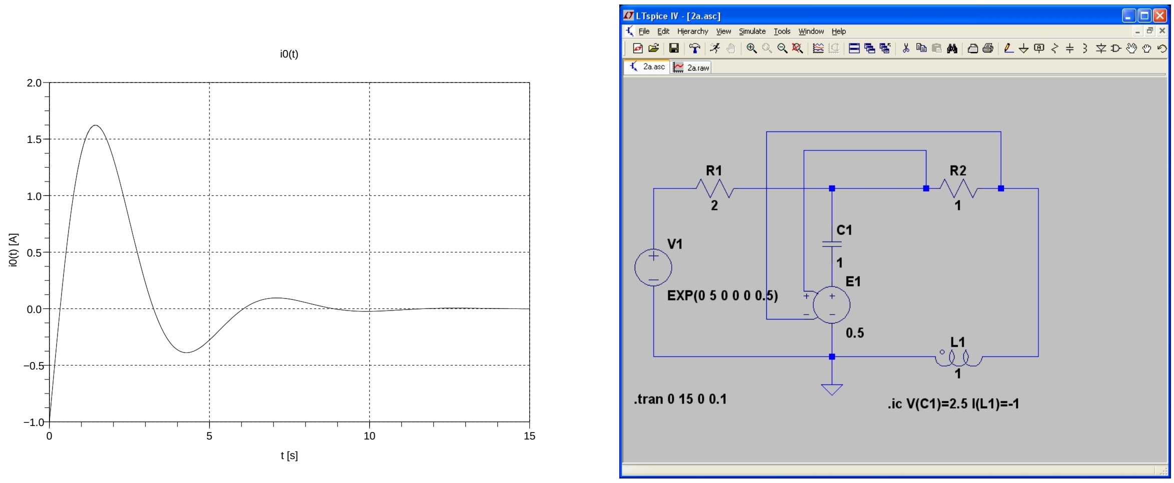
Επιβεβαίωση των παραπάνω με octave και spice φαίνεται στο σχ. 6 όπου η γραφική συμπεριλαμβάνει την συνάρτηση που υπολογίσαμε (σχεδιασμένη με το octave) με τα αποτελέσματα του spice από το αντίστοιχο σχηματικό κυκλώματος.

Άσκηση 1.4. *Να βρεθεί το ρεύμα $i_o(t),\ t > 0$ στο κύκλωμα, με μηδενικές αρχικές συνθήκες.*

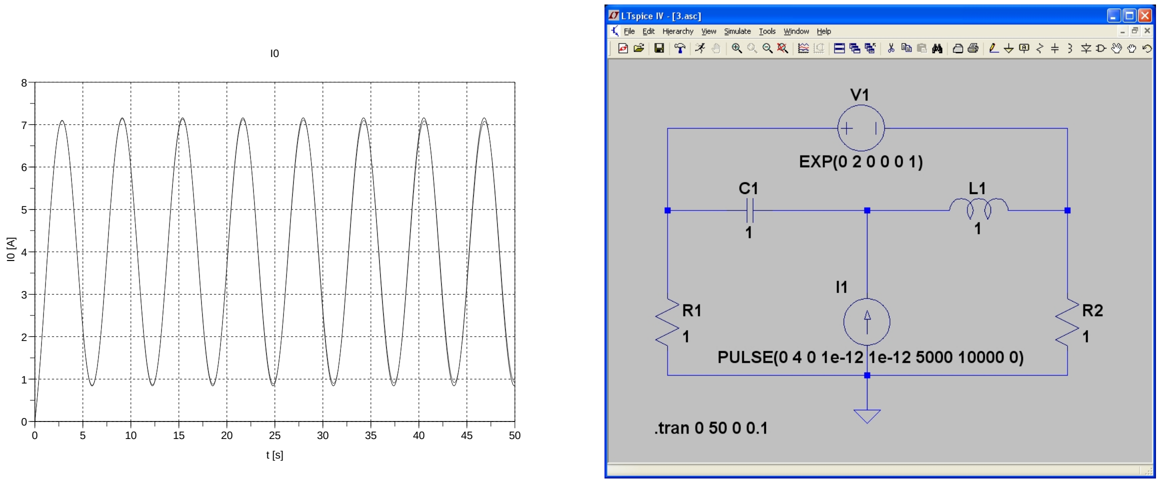


Λύση

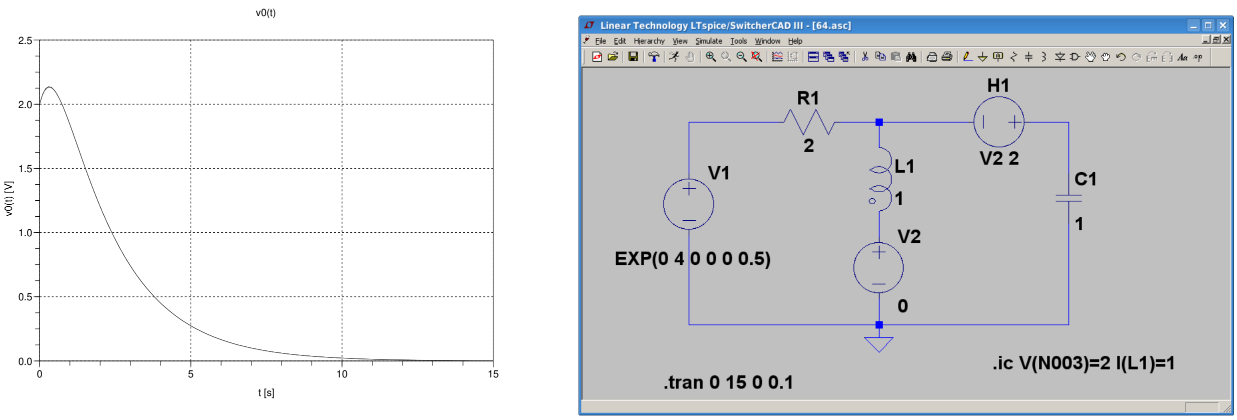
Μετασχηματίζουμε τα στοιχεία στο χώρο των συχνοτήτων και εφόσον έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες το κύκλωμα είναι το (a).



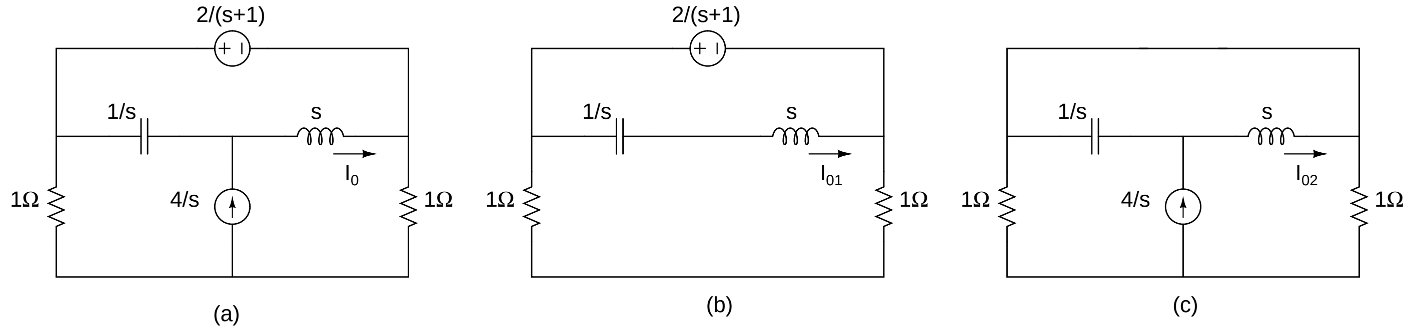
Σχήμα 6: Επιβεβαίωση με octave και spice.



Σχήμα 7: Επιβεβαίωση με octave και spice.



Σχήμα 8: Επιβεβαίωση με octave και spice.



Χρησιμοποιούμε μέθοδο υπέρθεσης όπου ενεργοποιούμε μια-μια τις πηγές. Στο (b) έχουμε σταθερή τάση στο μεσαίο κλάδο οπότε με νόμο Ohm

$$I_{01} = \frac{\dfrac{2}{s+1}}{s+\dfrac{1}{s}} = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)}$$

Στο (c) έχουμε διαιρέτη ρεύματος στο πηνίο και πυκνωτή, άρα

$$I_{02} = \frac{\dfrac{1}{s}}{s+\dfrac{1}{s}} \cdot \frac{4}{s} = \frac{4}{s(s^2+1)}$$

Επομένως

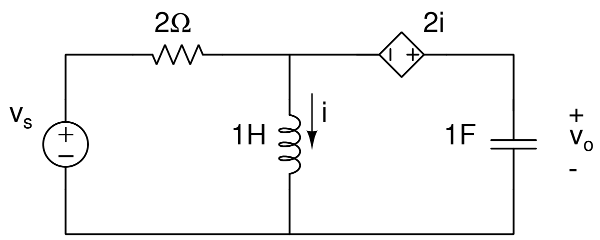
$$I_0 = I_{01} + I_{02} = \frac{2(2+2s+s^2)}{s(s+1)(s^2+1)}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace για $t \geq 0$ είναι

$$i_0(t) = 4 - e^{-t} - 3\cos(t) + \sin(t)\ \mathrm{A}$$

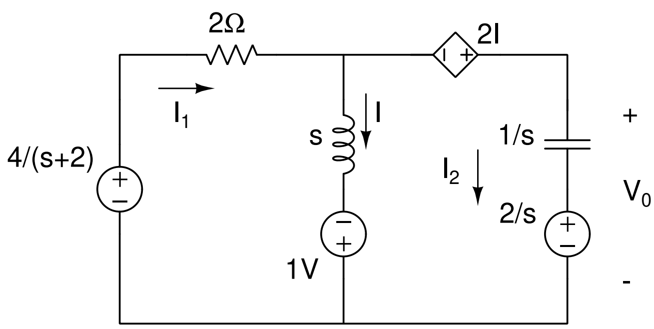
Επιβεβαίωση των παραπάνω με octave και spice φαίνεται στο σχ. 7 όπου η γραφική συμπεριλαμβάνει την συνάρτηση που υπολογίσαμε (σχεδιασμένη με το octave) με τα αποτελέσματα του spice από το αντίστοιχο σχηματικό κυκλώματος.

Άσκηση 1.5. *Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε* $i(0) = 1$ A, $v_o(0) = 2$ V *και* $v_s(t) = 4\, e^{-2t}u(t)$ V. *Να βρεθεί η τάση* $v_o(t),\ t > 0$.



Λύση

Μετασχηματίζουμε τα στοιχεία στο χώρο των συχνοτήτων και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες έχουμε



Με κανόνες Kirchoff έχουμε

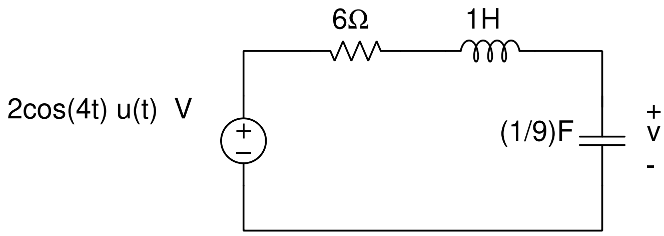
$$\left.\begin{aligned} I - I_1 + I_2 &= 0 \\ sI + 2I_1 &= 1 + \frac{4}{s+2} \\ (s+2)I - \frac{I_2}{s} &= \frac{2}{s} + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; I_2 = \frac{2(s-2)}{2s^2+5s+2}$$

και για $t \geq 0$

$$V_0 = I_2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{s} = \frac{4s+12}{2s^2+5s+2} \;\; \Rightarrow \; v_0(t) = -1.333e^{-2t} + 3.333e^{-t/2} \text{ V}$$

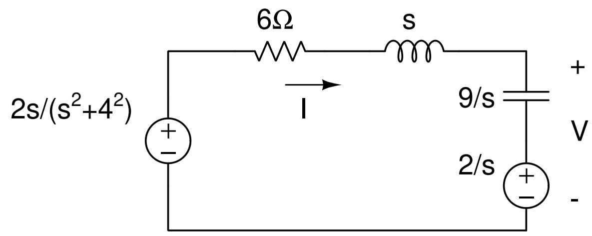
Επιβεβαίωση των παραπάνω με octave και spice φαίνεται στο σχ. 8 όπου η γραφική συμπεριλαμβάνει την συνάρτηση που υπολογίσαμε (σχεδιασμένη με το octave) με τα αποτελέσματα του spice από το αντίστοιχο σχηματικό κυκλώματος.

Άσκηση 1.6. *Στο παρακάτω RLC κύκλωμα έχουμε* $v(0) = 2$ V. *Να βρεθεί η τάση εξόδου* $v(t),\ t > 0$.



Λύση

Μετασχηματίζουμε τα στοιχεία στο χώρο των συχνοτήτων και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες έχουμε

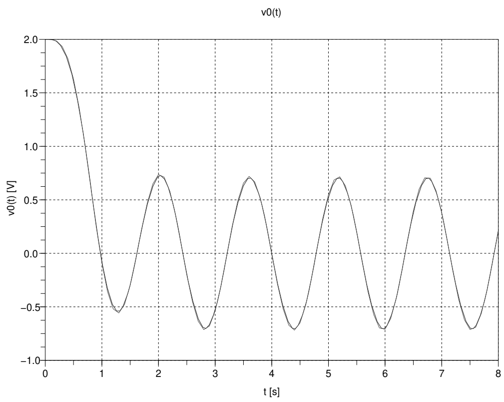


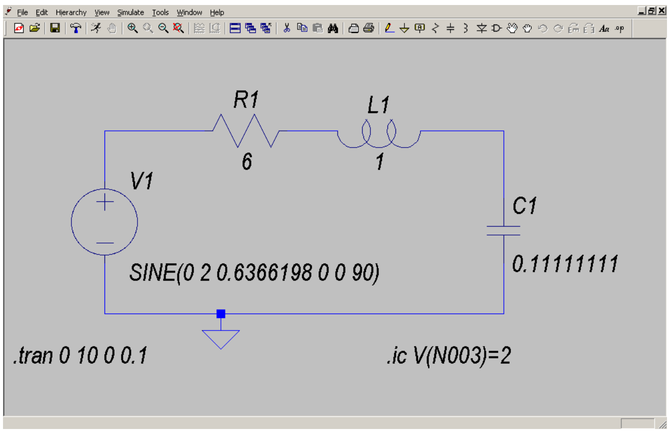
Κανόνας τάσεων Kirchoff στο βρόγχο μας δίνει για $t \geq 0$

$$I\left(6 + s + \frac{9}{s}\right) + \frac{2}{s} = \frac{2s}{s^2+4^2} \;\; \Rightarrow \; I = -\frac{32}{(s+3)^2(s^2+4^2)} \;\; \Rightarrow \; V = I \cdot \frac{9}{s} + \frac{2}{s} = \frac{2(96+25s+6s^2+s^3)}{(s+3)^2(s^2+4^2)} \;\; \Rightarrow$$

$$v(t) = (2.2 + 3.84t)e^{-3t} - 0.2\cos(4t) + 0.69\sin(4t) \text{ V}$$

Επιβεβαίωση των παραπάνω με octave και spice φαίνεται στο σχ. 9 όπου η γραφική συμπεριλαμβάνει την συνάρτηση που υπολογίσαμε (σχεδιασμένη με το octave) με τα αποτελέσματα του spice από το αντίστοιχο σχηματικό κυκλώματος.





Σχήμα 9: Επιβεβαίωση με octave και spice.