

# 1 Μιγαδικοί - Καινούργια στοιχεία

Πρώτο μάθημα. Επανάληψη μιγαδικών. Παράδειγμα με  $z_1 = 5 + j3$ . Μέτρο  $|z_1| = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5.83$ , φάση  $\angle z_1 = \tan^{-1}(3/5) = 30.96^\circ$ . Τι γίνεται με τα τεταρτημόρια όταν  $z_2 = -5 + j3$ ,  $z_3 = -5 - j3$ ,  $z_4 = 5 - j3$ . Πως ξεχωρίζει η φάση  $z_1$  με  $z_3$  και  $z_2$  με  $z_4$ ; Προσθέτουμε ή αφαιρούμε κατάλληλα  $180^\circ$ . Το κομπιουτεράκι το κάνει αυτόματα με θετική φάση  $0^\circ$  έως  $180^\circ$  στα τεταρτημόρια I και II και αρνητική φάση  $0^\circ$  έως  $-180^\circ$  στα τεταρτημόρια III και IV.

Εκθετική μορφή μιγαδικού  $z = re^{j\theta} = r/\underline{\theta}$ . Σχέση του Euler  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ .

Εναλλασσόμενο ρεύμα  $y(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ .  $A$  πλάτος,  $\omega = 2\pi f$  κυκλική συχνότητα [rad/sec].  $f$  φυσική συχνότητα [Hz]. Περίοδος  $T = 1/f$ . Ενεργός τιμή  $y_{\text{rms}} = A/\sqrt{2}$ . Δεν έχει τόση σημασία αν χρησιμοποιούμε  $\sin$  ή  $\cos$  εφόσον  $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$  και  $\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$ .

Καινούργια στοιχεία πυκνωτής, πηνίο. Σχέσεις τάσης-ρεύματος.

$$C = \frac{q}{v} \Rightarrow q = Cv \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow i = C \frac{dv}{dt}$$

$$L = \frac{\Phi}{i} \Rightarrow \Phi = Li \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \Rightarrow v = L \frac{di}{dt}$$

Κανόνες Kirchhoff ισχύουν άρα έχουμε διαφορικές εξισώσεις. Μπορούμε να τις αποφύγουμε με το μοντέλο εμπεδήσεων. Δεχόμαστε ότι η τάση και το ρεύμα περιγράφονται από σχέσεις της μορφής

$$Ae^{j(\omega t + \theta)} = Ae^{j\theta} e^{j\omega t} = \dot{A}e^{j\omega t}$$

και ότι όλες οι τάσεις ή ρεύματα που αναπτύσσονται σε ένα κύκλωμα έχουν την ίδια συχνότητα  $\omega$ . Οπότε για τον πυκνωτή

$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \dot{I}e^{j\omega t} = C \frac{d(\dot{V}e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \dot{V}e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{I} = j\omega C \dot{V} \Rightarrow \dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

και μπορούμε να πούμε ότι ο πυκνωτής έχει σύνθετη αντίσταση (εμπέδηση)

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Για το πηνίο

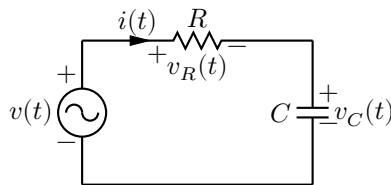
$$v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \dot{V}e^{j\omega t} = L \frac{d(\dot{I}e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L \dot{I}e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{V} = j\omega L \dot{I}$$

και μπορούμε να πούμε ότι το πηνίο έχει σύνθετη αντίσταση (εμπέδηση)

$$Z_L = j\omega L$$

Με το μοντέλο των εμπεδήσεων αντικαθιστούμε όλα τα στοιχεία σε ένα κύκλωμα με τις σύνθετες αντιστάσεις (εμπεδήσεις) τους, τις τάσεις και τα ρεύματα με  $\dot{V}$ ,  $\dot{I}$  και δουλεύουμε όπως ξέρουμε από την Ηλεκτροτεχνία I. Από τα αποτελέσματα  $\dot{V}$ ,  $\dot{I}$  ξαναγυρίζουμε στις κυματομορφές τάσεως, ρεύματος  $v(t)$ ,  $i(t)$  πολ/ζοντας με  $e^{j\omega t}$  και παίρνοντας το πραγματικό ή φανταστικό μέρος ανάλογα αν θέλουμε αναφορά το ημίτονο ή το συνημίτονο.

**Παράδειγμα 1.1** Έστω RC κύκλωμα με  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.2 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$  και πηγή τάσης  $v(t) = 5 \sin(\omega t) \text{ V}$ . Ποια είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή και ποια η διαφορά φάσης με την τάση της πηγής;



Σχήμα 1: RC κύκλωμα 1

Έχουμε  $\dot{V} = 5 \text{ V}$ ,  $\omega = 2\pi f = 314.16 \text{ rad/s}$  και  $Z_C = -j/(\omega \cdot C) = -j1.59 \times 10^4 \Omega = -j15.9 \text{ k}\Omega$ . Οπότε

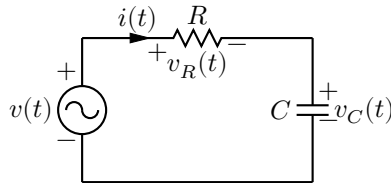
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + Z_C} = 0.266/57.9^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = 4.23 \angle -32.1^\circ \text{ V} \Rightarrow v_C(t) = 4.23 \sin(\omega t - 32.1^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 2.66 \angle 57.9^\circ \text{ V} \Rightarrow v_R(t) = 2.66 \sin(\omega t + 57.9^\circ) \text{ V}$$

Η διαφορά φάσης τάσης πηγής και τάσης πυκνωτή:  $0^\circ - (-32.1^\circ) = 32.1^\circ$ . Τάσης πηγής και τάσης αντίστασης:  $0^\circ - 57.9^\circ = -57.9^\circ$ . Παρατηρούμε επίσης ότι η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης:  $57.9^\circ - 57.9^\circ = 0$  και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πυκνωτή:  $57.9^\circ - (-32.1^\circ) = 90^\circ$ .

**Παράδειγμα 1.2** Έστω RC κύκλωμα με  $R = 1.5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$  και πηγή τάσης  $v(t) = 5 \sin(\omega t) \text{ V}$ . Ποια είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή και ποια η διαφορά φάσης με την τάση της πηγής; Ποια επίσης η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πυκνωτή;



Σχήμα 2: RC κύκλωμα 2

Έχουμε  $\dot{V} = 5 \text{ V}$ ,  $\omega = 2\pi f = 942.48 \text{ rad/s}$  και  $Z_C = -j/(\omega \cdot C) = -j530.52 \Omega$ . Οπότε

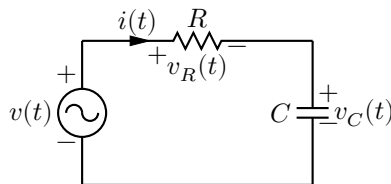
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + Z_C} = 3.143 \angle 19.5^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = 1.67 \angle -70.5^\circ \text{ V} \Rightarrow v_C(t) = 1.67 \sin(\omega t - 70.5^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 4.71 \angle 19.5^\circ \text{ V} \Rightarrow v_R(t) = 4.71 \sin(\omega t + 19.5^\circ) \text{ V}$$

Η διαφορά φάσης τάσης πηγής και τάσης πυκνωτή:  $0^\circ - (-70.5^\circ) = 70.5^\circ$ . Τάσης πηγής και τάσης αντίστασης:  $0^\circ - 19.5^\circ = -19.5^\circ$ . Παρατηρούμε επίσης ότι η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης:  $19.5^\circ - 19.5^\circ = 0$  και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πυκνωτή:  $19.5^\circ - (-70.5^\circ) = 90^\circ$ .

**Παράδειγμα 1.3** Έστω RC κύκλωμα με  $R = 15 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$ ,  $f = 2 \text{ kHz}$  και πηγή τάσης  $v(t) = 22 \cos(\omega t) \text{ V}$ . Ποια είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή και ποια η διαφορά φάσης με την τάση της πηγής; Ποια επίσης η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πυκνωτή;



Σχήμα 3: RC κύκλωμα 3

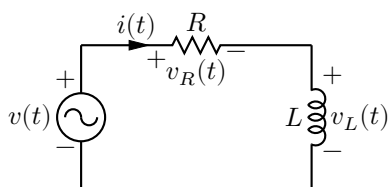
Έχουμε  $\dot{V} = 22 \text{ V}$ ,  $\omega = 2\pi f = 1.257 \times 10^4 \text{ rad/s}$  και  $Z_C = -j/(\omega \cdot C) = -j7.96 \text{ k}\Omega$ . Οπότε

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + Z_C} = 1.296 \angle 27.95^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = 10.3 \angle -62.05^\circ \text{ V} \Rightarrow v_C(t) = 10.3 \cos(\omega t - 62.05^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 19.4 \angle 27.95^\circ \text{ V} \Rightarrow v_R(t) = 19.4 \cos(\omega t + 27.95^\circ) \text{ V}$$

Η διαφορά φάσης τάσης πηγής και τάσης πυκνωτή:  $0^\circ - (-62.05^\circ) = 62.05^\circ$ . Τάσης πηγής και τάσης αντίστασης:  $0^\circ - 27.95^\circ = -27.95^\circ$ . Παρατηρούμε επίσης ότι η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης:  $27.95^\circ - 27.95^\circ = 0$  και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πυκνωτή:  $27.95^\circ - (-62.05^\circ) = 90^\circ$ .



Σχήμα 4: RL κύκλωμα 1

**Παράδειγμα 1.4** Έστω  $RL$  κύκλωμα με  $R = 12 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $f = 820 \text{ Hz}$  και πηγή τάσης  $v(t) = 19 \cos(\omega t) \text{ V}$ . Ποια είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης και του πηνίου και ποια η διαφορά φάσης με την τάση της πηγής; Ποια επίσης η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πηνίου;

Έχουμε  $\dot{V} = 19 \text{ V}$ ,  $\omega = 2\pi f = 5152.2 \text{ rad/s}$  και  $Z_L = j\omega L = j51.52 \Omega$ . Οπότε

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + Z_L} = 1.58 \angle -0.25^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot Z_L = 81.6 \angle 89.75^\circ \text{ mV} \Rightarrow v_L(t) = 81.6 \cos(\omega t + 89.75^\circ) \text{ mV}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 19.0 \angle -0.25^\circ \text{ V} \Rightarrow v_R(t) = 19.0 \cos(\omega t - 0.25^\circ) \text{ V}$$

Η διαφορά φάσης τάσης πηγής και τάσης πηνίου:  $0^\circ - (89.75^\circ) = -89.75^\circ$ . Τάσης πηγής και τάσης αντίστασης:  $0^\circ - 0.25^\circ = -0.25^\circ$ . Παρατηρούμε επίσης ότι η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης αντίστασης:  $-0.25^\circ - (-0.25^\circ) = 0$  και η διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης πηνίου:  $-0.25^\circ - 89.75^\circ = -90^\circ$ .

## 2 Φάσορας - Παραστατικός μιγάδας

Στα προηγούμενα μιλήσαμε για το μοντέλο εμπεδήσεων όπου η τάση και το ρεύμα περιγράφονται από σχέσεις της μορφής

$$Ae^{j(\omega t + \theta)} = Ae^{j\theta} e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t}$$

όπου  $\omega$  η κοινή συχνότητα για τάση και ρεύμα στο κύκλωμα. Η αντιστοιχία που δείξαμε είναι

$$Ae^{j(\omega t + \theta)} \leftrightarrow A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad Ae^{j(\omega t + \theta)} \leftrightarrow A \sin(\omega t + \theta)$$

και το μέγεθος  $Ae^{j\theta} = \dot{A}$  το ονομάζουμε φάσορα (phasor) ή παραστατικό μιγάδα. Αυτή είναι η αντιστοιχία που χρησιμοποιεί η αγγλική βιβλιογραφία. Στην Ευρώπη και στη χώρα μας, εφόσον οι εναλλασσόμενες τάσεις ή ρεύματα, μετρούμενες με ένα βολτόμετρο, εμφανίζουν την ενεργό τιμή τους, η αντιστοιχία που χρησιμοποιούμε είναι:

$$\frac{A}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t + \theta)} \leftrightarrow A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad \frac{A}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t + \theta)} \leftrightarrow A \sin(\omega t + \theta)$$

και το μέγεθος  $A_{\text{rms}} e^{j\theta} = \dot{A}$  είναι ο φάσορας ή παραστατικός μιγάδας.

Επομένως, αν έχουμε π.χ. μια τάση  $v(t) = 5 \cos(\omega t + \theta)$  ο αντίστοιχος φάσορας είναι  $\dot{V} = 3.53 \angle \theta$  όπου διαιρέσαμε το πλάτος 5 με  $\sqrt{2}$  για να έχουμε ενεργό τιμή. Ο φάσορας αυτός είναι με αναφορά το συνημίτονο. Επίσης, αν έχουμε π.χ. μια άλλη τάση  $v(t) = 20 \sin(\omega t + \phi)$  ο αντίστοιχος φάσορας είναι  $\dot{V} = 14.14 \angle \phi$  με αναφορά το ημίτονο.

Η διαδικασία που ακολουθούμε σε ένα κύκλωμα εναλλασσομένου είναι:

1. Προσδιορίζουμε από την συχνότητα  $f$  την κυκλική συχνότητα  $\omega = 2\pi f$ .
2. Αντικαθιστούμε τις τάσεις και τα ρεύματα των πηγών με τους αντίστοιχους φάσορες.
3. Προσδιορίζουμε τις σύνθετες αντιστάσεις για πυκνωτές,  $Z_C = -j/(\omega C)$ , και πηνία,  $Z_L = j\omega L$ .
4. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε ότι έχουμε μάθει στην Ηλεκτροτεχνία I (με κάποιες ίσως τροποποιήσεις) για να αναλύσουμε το κύκλωμα.
5. Αν χρειαζόμαστε κυματομορφές, μπορούμε να ξαναγυρίσουμε στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία φάσορα - κυματομορφής.

### 3 Ισχύς στο εναλλασσόμενο

Για εναλλασσόμενο ρεύμα ημιτονικής μορφής όπου

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \quad \text{και} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

η στιγμιαία ισχύς είναι

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)] \Rightarrow$$

$$p(t) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} [\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)]$$

Βλέπουμε δηλ. ένα τμήμα που είναι σταθερό με το χρόνο και ένα δεύτερο που μεταβάλλεται, αλλά με διπλάσια συχνότητα από αυτή του ρεύματος. Παίρνοντας την μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος σε μια περίοδο  $T$  έχουμε την μέση ισχύ

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} [\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)] dt \Rightarrow$$

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

εφόσον το ολοκλήρωμα στο  $\cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$  έχει μέση τιμή μηδέν και μηδενίζεται.

Ο παράγων  $\cos(\phi_v - \phi_i)$  ονομάζεται *συντελεστής ισχύος*. Για φορτία που είναι ωμικές αντιστάσεις όπου τάση και ρεύμα έχουν την ίδια φάση, η διαφορά  $\phi_v - \phi_i$  είναι μηδέν, άρα το συνημίτονο είναι μονάδα και η μέση ισχύς λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Για φορτία που είναι πυκνωτές ή πηνία όπου τάση και ρεύμα έχουν διαφορά φάσης  $90^\circ$ , το συνημίτονο είναι μηδέν άρα και η μέση ισχύς είναι μηδέν. Για φορτία που έχουν ωμικά, χωρητικά και επαγωγικά χαρακτηριστικά η μέση ισχύς έχει μια ενδιάμεση τιμή.

Στο μιγαδική επίπεδο ορίζουμε την *μιγαδική ισχύ* σαν

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$$

όπου το  $*$  δηλώνει συζυγή μιγαδικό. Επομένως

$$\dot{S} = V_{\text{rms}} \angle \phi_v \cdot I_{\text{rms}} \angle -\phi_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \phi_v - \phi_i \Rightarrow$$

$$\Re\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i) = P \quad \text{και} \quad \Im\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\phi_v - \phi_i) = Q$$

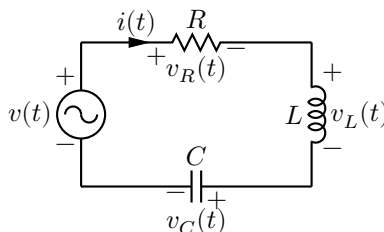
και το πραγματικό μέρος  $P$  είναι η μέση ισχύς που ορίσαμε παραπάνω ενώ το φανταστικό  $Q$  το ονομάζουμε *έργο ισχύ*.

Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος το ονομάζουμε *φαινομένη ισχύ* και είναι

$$S = |\dot{S}| = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}^*| = V \cdot I$$

Για λόγους διαχωρισμού, οι μονάδες της μιγαδικής (και φαινομένης) ισχύος είναι VA, της πραγματικής W και της αέργου VAR.

**Παράδειγμα 3.1** Στο παρακάτω RLC κύκλωμα έχουμε  $v(t) = 230\sqrt{2} \cos(\omega t)$  V,  $R = 1.2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 5 \mu\text{F}$  και  $f = 2 \text{ kHz}$ . Κάντε πλήρη ανάλυση στο κύκλωμα (φάσORES τάσης, ρεύματος, μιγαδικής ισχύος για όλα τα στοιχεία). Διατηρείται η ισχύς;



Σχήμα 5: RLC κύκλωμα

Έχουμε  $\omega = 2\pi f = 12.57 \text{ krad/s}$ ,  $Z_L = j\omega L = j125.7 \Omega$ ,  $Z_C = -j/(\omega C) = -j15.9 \Omega$ ,  $\dot{V} = 230 \text{ V}$ . Οπότε

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + Z_L + Z_C} = 0.191 \angle -5.22^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I}Z_L = 23.98 \angle 84.8^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I}Z_C = 3.04 \angle -95.2^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = 229.04 \angle -5.22^\circ \text{ V}$$

$$\dot{S}_L = \dot{V}_L \dot{I}^* = j4.58 \text{ VA}$$

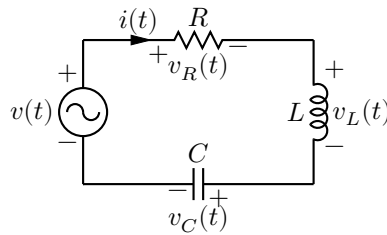
$$\dot{S}_C = \dot{V}_C \dot{I}^* = -j0.58 \text{ VA}$$

$$\dot{S}_R = \dot{V}_R \dot{I}^* = \dot{I}R \dot{I}^* = |\dot{I}|^2 R = 43.7 \text{ VA}$$

$$\dot{S} = \dot{V} \dot{I}^* = 43.7 + j4 \text{ VA}$$

Παρατηρούμε ότι η μιγαδική ισχύς της πηγής είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των μιγαδικών ισχύων των στοιχείων. Άρα η μιγαδική ισχύς διατηρείται. Επίσης βλέπουμε ότι το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ισχύος της πηγής καταναλώνεται όλο από την ωμική αντίσταση. Άρα και η πραγματική ισχύς διατηρείται. Τέλος βλέπουμε ότι και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ισχύος της πηγής είναι το αλγεβρικό άθροισμα της ισχύος στον πυκνωτή και πηνίο. Άρα και η άεργος ισχύς διατηρείται.

## 4 Συντονισμός Σειράς



Σχήμα 6: RLC κύκλωμα σειράς

Σε RLC κύκλωμα σειράς η ολική αντίσταση που βλέπει η πηγή

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

είναι συνάρτηση συχνότητας και το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ή} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

τη συχνότητα συντονισμού. Το μέτρο της ολικής αντίστασης γίνεται τότε ελάχιστο και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μέγιστο. Στο συντονισμό σειράς έχουμε μέγιστο ρεύμα στη συχνότητα συντονισμού και γιαυτό τον ονομάζουμε και *συντονισμό έντασης*. Στην πράξη μας ενδιαφέρει μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού,  $f_1 < f_0 < f_2$ , η ωφέλιμη ζώνη, όπου μπορούμε να έχουμε πραγματική ισχύ  $P \geq P_{\max}/2$ . Έχουμε  $P_{\max} = |\dot{I}|_{\max}^2 R$  οπότε η σχέση γίνεται

$$P \geq P_{\max}/2 \Rightarrow |\dot{I}|^2 R \geq \frac{|\dot{I}|_{\max}^2 R}{2} \Rightarrow |\dot{I}| \geq \frac{|\dot{I}|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Θέτοντας για ευκολία  $I = |\dot{I}|$ , για τις συχνότητες  $\omega_1, \omega_2$  όπου ισχύει η ισότητα, έχουμε

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{|\dot{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{|\dot{V}|}{R\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2 \Rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + R\right) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - R\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(\omega^2 LC - 1 + \omega RC)(\omega^2 LC - 1 - \omega RC)}{\omega^2 C^2} = 0$$

οπότε

$$\omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις θετικές συχνότητες που έχουν φυσική σημασία και η διάταξη είναι  $\omega_1 < \omega_2$ . Αν πάρουμε το γινόμενο των  $\omega_1, \omega_2$  βρίσκουμε ότι

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{ή} \quad f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = f_0^2$$

Αν πάρουμε τη διαφορά τους

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \text{ή} \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει το εύρος τής ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων για τον εν σειρά συντονισμό.

Μπορούμε να εξετάσουμε και τη φάση της  $Z(\omega)$ . Έχουμε

$$\phi_Z(\omega_1) = \tan^{-1} \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R} = \tan^{-1} \frac{-R}{R} = -45^\circ$$

$$\phi_Z(\omega_2) = \tan^{-1} \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R} = \tan^{-1} \frac{R}{R} = 45^\circ$$

και φυσικά

$$\phi_Z(\omega_0) = \tan^{-1} \frac{0}{R} = 0^\circ$$

Η φάση δηλ. της σύνθετης αντίστασης «σαρώνει» από  $-90^\circ$  έως  $90^\circ$  (γιατί όχι από  $-180^\circ$  έως  $180^\circ$ ;) με  $-45^\circ$  και  $45^\circ$  για τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και  $0^\circ$  στον συντονισμό.

Από τη σχέση  $\dot{I} = \dot{V}/Z \Rightarrow \phi_i = \phi_v - \phi_Z$  βλέπουμε ότι η φάση του ρεύματος (εκτός από την προσθήκη της σταθερής φάσης  $\phi_v$ ) «σαρώνει» από  $90^\circ$  έως  $-90^\circ$  με  $45^\circ$  και  $-45^\circ$  για τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και  $0^\circ$  στον συντονισμό.

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος στα κυκλώματα συντονισμού, είναι ο *συντελεστής ποιότητας* του κυκλώματος που ορίζεται σαν

$$Q = \frac{\text{άεργος ισχύς σε μια περίοδο}}{\text{μέση ισχύς}} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{I^2 X_C}{I^2 R}$$

οπότε

$$Q = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ή

$$Q = \frac{I^2 X_C}{I^2 R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Στα παραπάνω η άεργος ισχύς σε μια περίοδο που αποθηκεύεται/μοιράζεται στα  $L, C$  ταλαντώνεται μεταξύ δυο καταστάσεων. Μέγιστη στο  $L$  και μηδενική στο  $C$  και μέγιστη στο  $C$  και μηδενική στο  $L$ . Γιαυτό και οι δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Το εύρος της ωφέλιμης ζώνης μπορεί να γραφεί τώρα σαν

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{ή} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

Επομένως βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής  $Q$  τόσο μικρότερο είναι το εύρος ζώνης  $\Delta f$  που σημαίνει ότι η δυνατότητα επιλογής μιας συγκεκριμένης συχνότητας από το κύκλωμα γίνεται μεγαλύτερη.

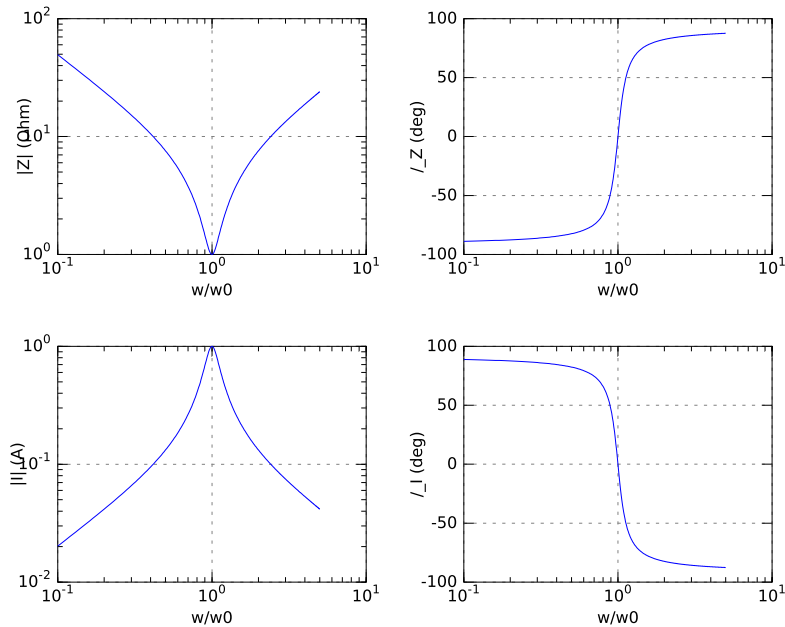
Παρατηρούμε επίσης στον συντονισμό σειράς ότι για τα μέτρα των τάσεων  $V$  (πηγής),  $V_L$  (πηνίου) και  $V_C$  (πυκνωτή) έχουμε

$$\frac{V_L}{V} = \frac{I\omega_0 L}{IR} = Q \quad \text{και} \quad \frac{V_C}{V} = \frac{I}{\omega_0 C IR} = Q$$

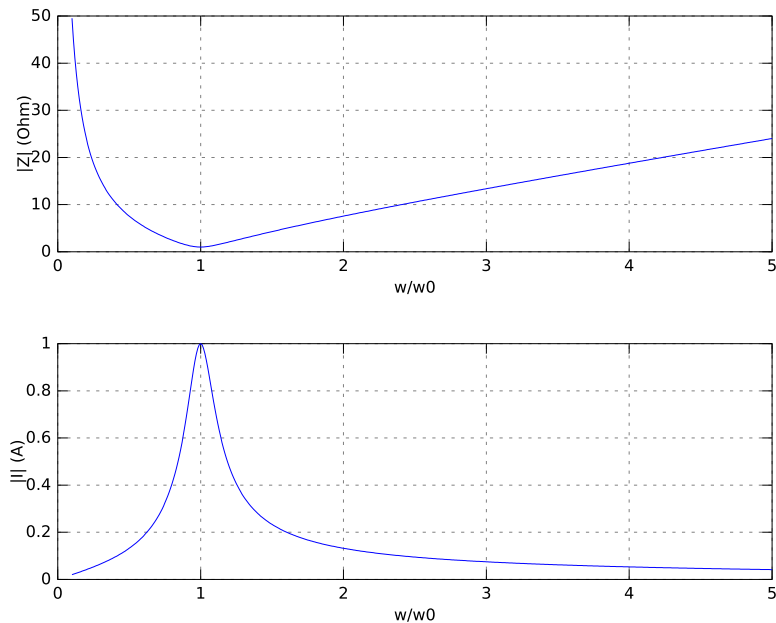
που σημαίνει ότι

$$V_L = QV \quad \text{και} \quad V_C = QV$$

δηλ. παρατηρούμε ότι η τάση στον πυκνωτή και το πηνίο είναι πολ/σιο της τάσης της πηγής κατά  $Q$ . Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε *κέρδος τάσης*.



Σχήμα 7: Ολική αντίσταση και ρεύμα σε RLC κύκλωμα σειράς σε λογαριθμική ή ημιλογαριθμική κλίμακα για  $Q = 5$ .



Σχήμα 8: Μέτρο ολικής αντίστασης και ρεύματος σε RLC κύκλωμα σειράς σε γραμμική κλίμακα για  $Q = 5$ .

**Παράδειγμα 4.1** Σε εν σειρά κύκλωμα συντονισμού έχουμε  $R = 10 \Omega$ . Να βρεθούν οι τιμές  $L$  και  $C$  έτσι ώστε το κύκλωμα να έχει συχνότητα συντονισμού 100 kHz και εύρος ωφέλιμης ζώνης 1 kHz. Να βρεθούν κατόπιν τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow LC = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = 2.5330 \times 10^{-12}$$

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L} \Rightarrow L = \frac{R}{2\pi\Delta f} = 1.5915 \times 10^{-3} \text{ H} \quad \text{και}$$

$$C = \frac{LC}{L} = 1.5915 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 100$$

$$f_1 f_2 = f_0^2 \quad \text{και} \quad f_2 - f_1 = \Delta f$$

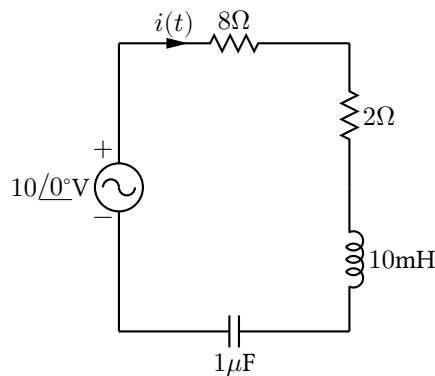
$$f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} \quad \text{και} \quad \frac{f_0^2}{f_1} - f_1 = \Delta f \Rightarrow f_1^2 + \Delta f \cdot f_1 - f_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$f_1 = 99501.25 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} = 100501.25 \text{ Hz}$$

Μια καλή προσέγγιση υπολογίζεται επίσης με

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 99500 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 100500 \text{ Hz}$$

**Παράδειγμα 4.2** Σε εν σειρά κύκλωμα συντονισμού όπως φαίνεται παρακάτω να βρεθούν:



Σχήμα 9: RLC κύκλωμα σειράς

1. Συχνότητα συντονισμού σε rad/s και Hz.
2. Ολική μιγαδική αντίσταση που βλέπει η πηγή στο συντονισμό.
3. Το ρεύμα βρόγχου στο συντονισμό.
4. Τάσεις  $\dot{V}_L$  και  $\dot{V}_C$  στο συντονισμό.
5. Άεργος ισχύς  $Q_C$  και  $Q_L$  στο συντονισμό.
6. Συντελεστής ποιότητας  $Q$ .
7. Η μέγιστη ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.
8. Το εύρος ζώνης  $\Delta\omega$  και οι συχνότητες  $\omega_1, \omega_2$ .
9. Το ρεύμα βρόγχου και την ισχύ που καταναλώνεται στο κύκλωμα για τη συχνότητα  $\omega_1$ .

Η συχνότητα συντονισμού είναι

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10000 \text{ rad/s} \quad f_0 = 1591.5 \text{ Hz}$$

Στον συντονισμό αλληλοαναιρούνται οι σύνθετες αντιστάσεις πηνίου και πυκνωτή. Άρα

$$Z_i = 10 \Omega$$



Το ρεύμα βρόγχου στον συντονισμό, σε μορφή φάσορα, είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_i}{Z_i} = \frac{10}{10} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Οι τάσεις στα άκρα πυκνωτή και πηνίου είναι:

$$\dot{V}_L = \dot{I}j\omega_0 L = j100 \text{ V} \quad \dot{V}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega_0 C} = -j100 \text{ V}$$

όπως παρατηρούμε έχουν διαφορά φάσης  $180^\circ$ . Η άεργος ισχύς για τα αντίστοιχα στοιχεία είναι:

$$Q_C = \frac{I^2}{\omega C} = 100 \text{ VAR} \quad Q_L = I^2 \omega L = 100 \text{ VAR}$$

Ο συντελεστής ποιότητας:

$$Q = \frac{Q_L}{P} = \frac{100}{I^2 R} = \frac{100}{10} = 10$$

Η μέγιστη ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα είναι στη συχνότητα συντονισμού, άρα:

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_i|^2}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ W}$$

Το εύρος ζώνης είναι:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10000}{10} = 1000 \text{ rad/s}$$

και τα άκρα, κατά προσέγγιση:

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 9500 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} = 10500 \text{ rad/s}$$

και με ακρίβεια

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= \omega_0^2 & \omega_2 - \omega_1 &= \Delta\omega \\ \omega_2 &= \frac{\omega_0^2}{\omega_1} & \frac{\omega_0^2}{\omega_1} - \omega_1 &= \Delta\omega \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\omega_1^2 + \Delta\omega \cdot \omega_1 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_1 = 9512.49 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 10512.49 \text{ rad/s}$$

Τέλος, το ρεύμα βρόγχου για συχνότητα  $\omega_1$  είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_i}{10 + j\omega_1 L - j/(\omega_1 C)} = \frac{\dot{V}_i}{10 - j10} = 0.707 \angle 45^\circ \text{ A}$$

και η αντίστοιχη ισχύς που καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση:

$$P = |\dot{I}|^2 R = 0.707^2 \cdot 10 = 5 \text{ W}$$

ή απλώς από τον ορισμό της  $\omega_1$  σαν συχνότητας όπου έχουμε την μισή μέγιστη ισχύ.

## 5 Συντονισμός Παράλληλος

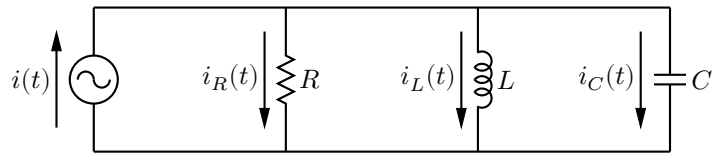
Σε RLC κύκλωμα παράλληλο μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε την ολική σύνθετη αγωγιμότητα που βλέπει η πηγή

$$Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

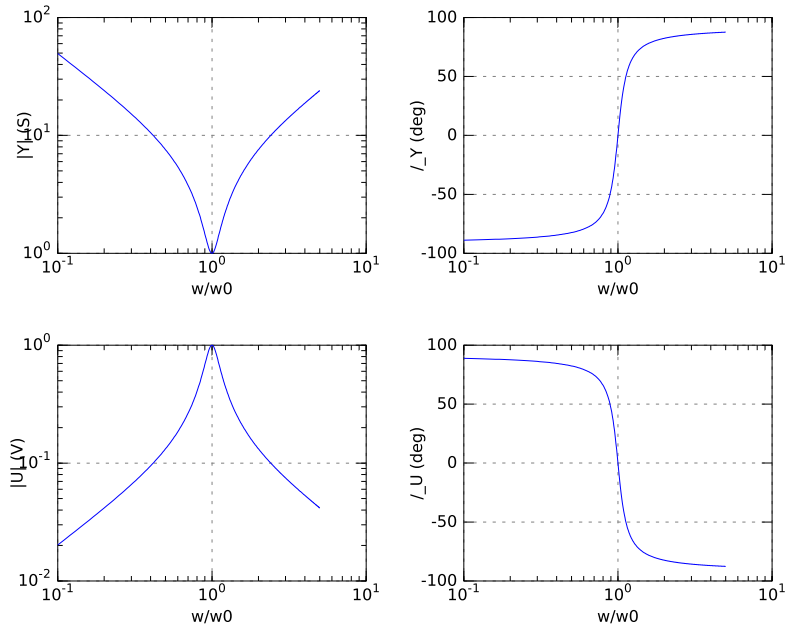
όπου  $G = 1/R$ . Αυτή είναι συνάρτηση συχνότητας και το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ή} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

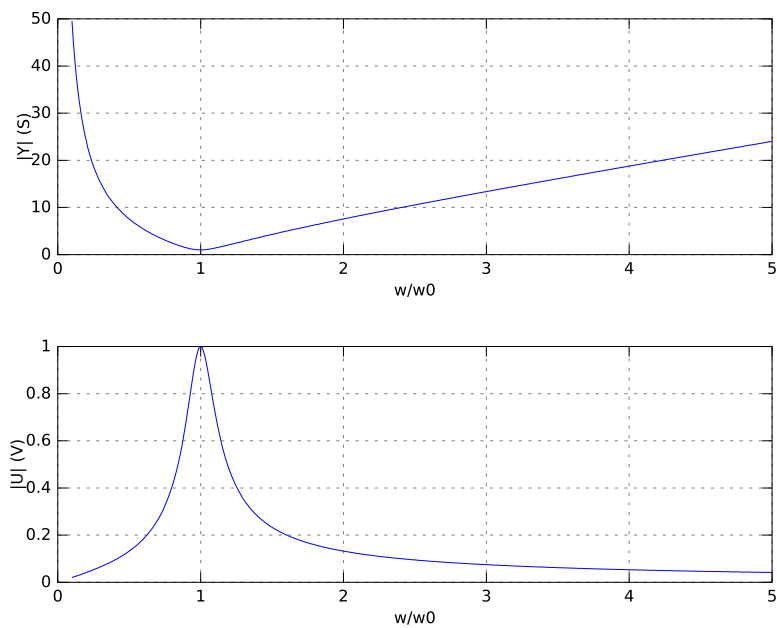
τη συχνότητα συντονισμού, ίδια σχέση όπως με τον εν σειρά συντονισμό. Το μέτρο της ολικής αγωγιμότητας γίνεται τότε ελάχιστο και η παράλληλη, κοινή τάση στους κλάδους γίνεται τότε μέγιστη.



Σχήμα 10: RLC κύκλωμα παράλληλο



Σχήμα 11: Ολική αγωγιμότητα και τάση σε RLC κύκλωμα παράλληλο σε λογαριθμική ή ημιλογαριθμική κλίμακα για  $Q = 5$ .



Σχήμα 12: Μέτρο ολικής αγωγιμότητας και τάσης σε RLC κύκλωμα παράλληλο σε γραμμική κλίμακα για  $Q = 5$ .

Στον παράλληλο συντονισμό έχουμε μέγιστη τάση στη συχνότητα συντονισμού και γιαυτό τον ονομάζουμε και *συντονισμό τάσης*. Στην πράξη μας ενδιαφέρει και εδώ μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού,  $f_1 < f_0 < f_2$ , η ωφέλιμη ζώνη, όπου μπορούμε να έχουμε πραγματική ισχύ  $P \geq P_{\max}/2$ . Μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως και στον εν σειρά συντονισμό για να βρούμε την ωφέλιμη ζώνη και τον αντίστοιχο συντελεστή ποιότητας ή, να χρησιμοποιήσουμε την αρχή δυαδικότητας, όπου κάνουμε τις αντικαταστάσεις  $R \rightarrow G$ ,  $C \rightarrow L$ ,  $L \rightarrow C$ . Επομένως

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{ή} \quad f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = f_0^2$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{G}{C} \quad \text{ή} \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{G}{2\pi C}$$

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \omega_0 RC = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Το εύρος της ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων για την μισή ισχύ  $\Delta\omega$  ή  $\Delta f$  μπορεί να γραφεί τώρα ως

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{ή} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

Παρατηρούμε επίσης στον συντονισμό ότι για τα μέτρα των ρευμάτων  $I$  (πηγής),  $I_L$  (πηνίου) και  $I_C$  (πυκνωτή) έχουμε

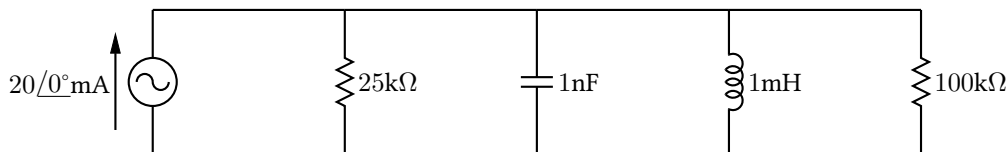
$$\frac{I_L}{I} = \frac{V}{\omega_0 L V G} = Q \quad \text{και} \quad \frac{I_C}{I} = \frac{V \omega_0 C}{V G} = Q$$

που σημαίνει ότι

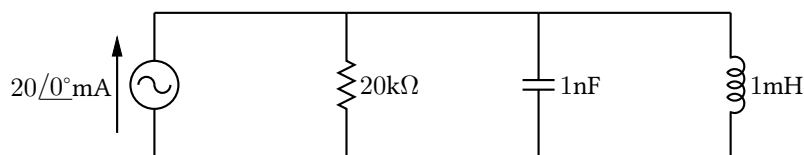
$$I_L = QI \quad \text{και} \quad I_C = QI$$

δηλ. παρατηρούμε ότι το ρεύμα στον πυκνωτή και το πηνίο είναι πολλαπλό του ρεύματος της πηγής κατά  $Q$ . Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε *κέρδος έντασης*.

**Παράδειγμα 5.1** Σε παράλληλο κύκλωμα συντονισμού όπως φαίνεται παρακάτω να βρεθούν:



Σχήμα 13: Αρχικό κύκλωμα



Σχήμα 14: Απλοποιημένο κύκλωμα στην παράλληλη δομή

1. Συχνότητα συντονισμού σε  $rad/s$  και  $Hz$ .
2. Συντελεστής ποιότητας  $Q$ .
3. Τάση  $\dot{V}_C$  στο συντονισμό.
4. Το εύρος ζώνης  $\Delta\omega$  και οι συχνότητες  $\omega_1, \omega_2$ .

Συχνότητα συντονισμού:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \times 10^6 \text{ rad/s}$  ή  $f_0 = 1.5915 \times 10^5 \text{ Hz}$ .

Συντελεστής ποιότητας:  $Q = \omega_0 RC = 20$

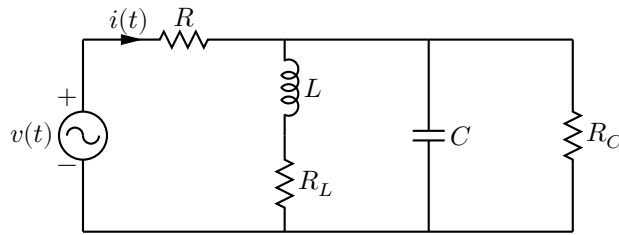
Παράλληλη τάση στο συντονισμό:  $\dot{V}_C = \dot{I}R = 400 \angle 0^\circ \text{ V}$  εφόσον τα ρεύματα στο πηνίο και πυκνωτή έχουν διαφορά φάσης  $180^\circ$  και αλληλοανααιρούνται.

Εφόσον  $Q > 10$  η προσεγγιστική λύση είναι αρκετά καλή

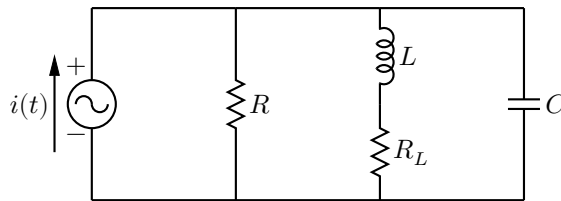
$$\Delta\omega = \frac{1}{RC} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2 = 1.025 \text{ Mrad/s} \quad \omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2 = 0.975 \text{ Mrad/s}$$

## 6 Πραγματικό παράλληλο κύκλωμα LC

Τα πραγματικό πηνίο έχει εκτός από την αυτεπαγωγή και μια μικρή ωμική αντίσταση εν σειρά. Ο πραγματικός πυκνωτής εκτός από την χωρητικότητα έχει και μια μεγάλη ωμική αντίσταση παράλληλα. Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα κύκλωμα LC όπου λαμβάνουμε υπόψη αυτές τις ωμικές αντιστάσεις.



Σχήμα 15: Πραγματικό κύκλωμα LC όπου προστίθεται η εν σειρά ωμική αντίσταση  $R_L$  ενός πραγματικού πηνίου και η παράλληλη ωμική αντίσταση ενός πραγματικού πυκνωτή.



Σχήμα 16: Το παραπάνω κύκλωμα απλοποιημένο στην παράλληλη δομή

Την πηγή τάσης την μετατρέπουμε σε ρεύματος. Εφόσον  $R_C \gg R$  μπορούμε να πούμε ότι  $R_C \parallel R \approx R$ . Έτσι έχουμε το δεύτερο κύκλωμα. Η μόνη διαφορά από το παράλληλο RLC είναι η εν σειρά  $R_L$ . Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ίδια. Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L} = G + j\omega C + \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} =$$

$$= G + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + j \left[ \omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]$$

Στον συντονισμό

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \left( \frac{R_L}{L} \right)^2 = \frac{1}{LC} \left[ 1 - \frac{R_L^2 C}{L} \right] \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

βλέπουμε δηλ. ότι συντονισμός επιτυγχάνεται σε χαμηλότερη συχνότητα από ότι στην ιδανική περίπτωση και η σύνθετη αγωγιμότητα είναι τότε

$$Y_0 = G + \frac{R_L C}{L} = G'$$

Επίσης, εάν  $(\omega L)^2 \gg R_L^2$ , για την ωφέλιμη περιοχή συχνοτήτων, έχουμε

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{(\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Y = G' + j \left[ \omega C - \frac{1}{\omega L} \right]$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (με αρκετά καλή ακρίβεια) τις σχέσεις που ισχύουν για τα ιδανικά παράλληλο κύκλωμα. Για τον συντελεστή ποιότητας π.χ. έχουμε

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G'} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}}}{G + \frac{R_L C}{L}}$$

## 7 Θεωρήματα Thevenin, Norton

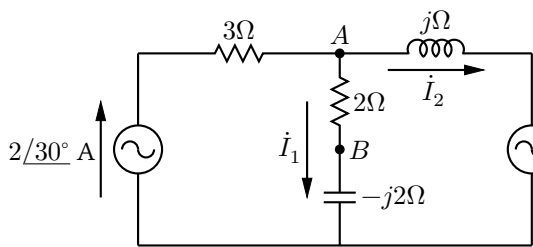
### Θεώρημα Thevenin

Ένα γραμμικό κύκλωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει μία πηγή τάσης σε σειρά με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση,  $Z_{TH}$  είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (πηγές ιδανικές) στο κύκλωμα. Η τάση  $\dot{V}_{TH}$  είναι η τάση που φαίνεται με το κύκλωμα ενεργό, στους ανοικτούς ακροδέκτες A, B.

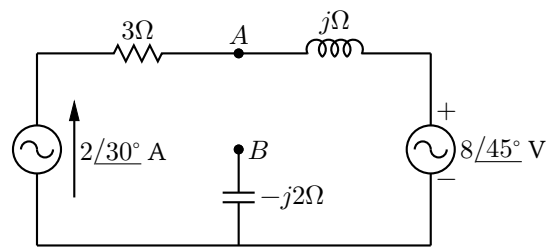
### Θεώρημα Norton

Ένα γραμμικό κύκλωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει μία πηγή ρεύματος παράλληλα με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση,  $Z_N$  είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (πηγές ιδανικές) στο κύκλωμα. Το ρεύμα  $\dot{I}_N$  είναι το ρεύμα που παίρνουμε με το κύκλωμα ενεργό, όταν βραχυκυκλώσουμε τους ακροδέκτες A, B.

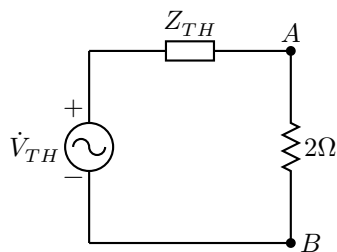
**Παράδειγμα 7.1** Στο κύκλωμα σχ. 17 εφαρμόστε το θεώρημα Thevenin για να βρείτε την τάση στο φορτίο  $2\ \Omega$ .



Σχήμα 17: Αρχικό κύκλωμα.



Σχήμα 18: Και κύκλωμα χωρίς φορτίο.



Σχήμα 19: Το ισοδύναμο Thevenin με το φορτίο.

Αφαιρούμε καταρχήν το φορτίο  $2\ \Omega$  και έχουμε την εμπέδηση Thevenin,  $Z_{TH}$ , όταν βραχυκυκλώσουμε την πηγή τάσης και ανοίξουμε την πηγή ρεύματος,  $Z_{TH} = j - 2j = -j\ \Omega$ . Με τις πηγές ενεργές, παρατηρούμε ότι δεν διέρχεται ρεύμα από την εμπέδηση  $-j2$  και ότι ο κλειστός βρόχος του κυκλώματος διαρρέεται από το ρεύμα της πηγής ρεύματος  $2\ \angle 30^\circ\ \text{A}$ .

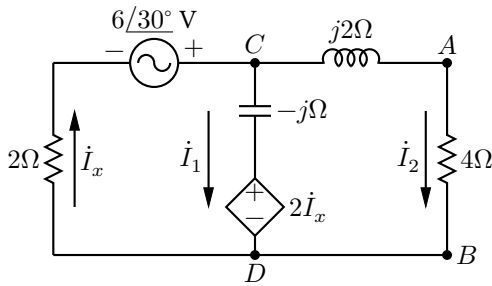
Άρα

$$\begin{aligned}\dot{V}_{TH} &= \dot{V}_{AB|oc} = (2\ \angle 30^\circ)j + (8\ \angle 45^\circ) = (2\ \angle 30^\circ)(1\ \angle 90^\circ) + (8\ \angle 45^\circ) = \\ &= (2\ \angle 120^\circ) + (8\ \angle 45^\circ) = -1 + j1.732 + 5.657 + j5.657 = 4.657 + j7.389 = \\ &= 8.734\ \angle 57.78^\circ\ \text{V}\end{aligned}$$

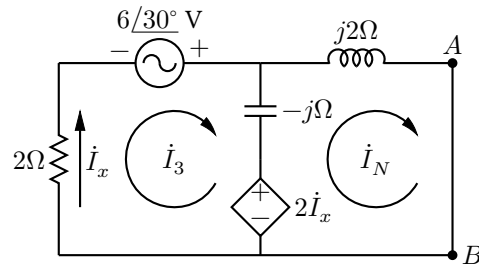
και από το ισοδύναμο Thevenin, με έναν διαιρέτη τάσης, η τάση στο φορτίο  $2\ \Omega$  είναι

$$\dot{V}_{AB} = \frac{2}{2 + Z_{TH}} \dot{V}_{TH} = \frac{17.468\ \angle 57.78^\circ}{2.236\ \angle -26.56^\circ} = 7.812\ \angle 84.34^\circ\ \text{V}$$

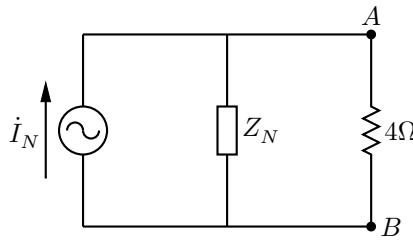
**Παράδειγμα 7.2** Στο κύκλωμα σχ. 20 να ευρεθεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση  $4\ \Omega$  με το θεώρημα Norton.



Σχήμα 20: Αρχικό κύκλωμα.



Σχήμα 21: Και κύκλωμα χωρίς φορτίο.



Σχήμα 22: Το ισοδύναμο Norton.

Με μέθοδο οφθαλμών:

Αφαιρούμε το φορτίο και βραχυκλώνουμε τους ακροδέκτες A, B (κύκλωμα σχ. 21). Με μέθοδο οφθαλμών

$$\left. \begin{aligned} (2-j)\dot{I}_3 + j\dot{I}_N &= -2\dot{I}_3 + 6 \angle 30^\circ \\ (2j-j)\dot{I}_N + j\dot{I}_3 &= 2\dot{I}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (4-j)\dot{I}_3 + j\dot{I}_N &= 6 \angle 30^\circ \\ (-2+j)\dot{I}_3 + j\dot{I}_N &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

έχουμε

$$\left. \begin{aligned} (4-j)\dot{I}_3 + j\dot{I}_N &= 6 \angle 30^\circ \\ \dot{I}_3 &= \frac{j}{2-j} \dot{I}_N \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \frac{(4-j)j}{2-j} + j \right] \dot{I}_N = 6 \angle 30^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{I}_N = \frac{2-j}{2+6j} 6 \angle 30^\circ = \frac{2.236 \angle -26.565^\circ}{6.324 \angle 71.565^\circ} 6 \angle 30^\circ = 2.121 \angle -68.13^\circ \text{ A}$$

Επειδή το κύκλωμα περιέχει εξαρτημένη πηγή, δεν μπορούμε να βρούμε την  $Z_N$  όπως στα κυκλώματα με ανεξάρτητες πηγές. Χρειαζόμαστε να βρούμε την τάση με ανοικτούς ακροδέκτες  $\dot{V}_{oc}$  και το ρεύμα βραχυκυκλώσεως  $\dot{I}_{sc}$ , οπότε η  $Z_N$  είναι  $Z_N = \dot{V}_{oc} / \dot{I}_{sc}$ .

Εάν ανοίξουμε τους ακροδέκτες A, B το πηνίο βγαίνει εκτός και η τάση Thevenin είναι  $\dot{V}_{AB|oc} = \dot{V}_{CD}$ . Ένας κανόνας τάσεων στον αριστερό και μοναδικό βρόγχο (διαρρέεται μόνο από το ρεύμα  $\dot{I}_x$ ) δίνει

$$-6 \angle 30^\circ - j\dot{I}_x + 2\dot{I}_x + 2\dot{I}_x = 0 \Rightarrow \dot{I}_x = \frac{6 \angle 30^\circ}{4-j} = 1.455 \angle 44.04^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{V}_{CD} = -j\dot{I}_x + 2\dot{I}_x = (2-j)\dot{I}_x = 3.254 \angle 17.47^\circ \text{ V}$$

οπότε

$$Z_N = \frac{\dot{V}_{oc}}{\dot{I}_{sc}} = \frac{3.254 \angle 17.47^\circ}{2.121 \angle -68.13^\circ} = 1.534 \angle 85.6^\circ \ \Omega$$

Τελικά, το ζητούμενο ρεύμα ευρίσκεται από τον διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I}_{AB} = \frac{Z_N}{4 + Z_N} \dot{I}_N = 0.741 \angle -2.9^\circ \text{ A}$$

Με κομβική ανάλυση

Ο κλασσικός τρόπος χωρίς θεώρημα Norton. Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα (σχ. 20) αποτελείται από 3 παράλληλους κλάδους με την κοινή τάση  $\dot{V}_{CD}$ . Εκφράζουμε τα τρία κλαδικά ρεύματα συναρτήσει αυτής της τάσης και τα συνδυάζουμε όλα με έναν κανόνα ρευμάτων στον κόμβο C.

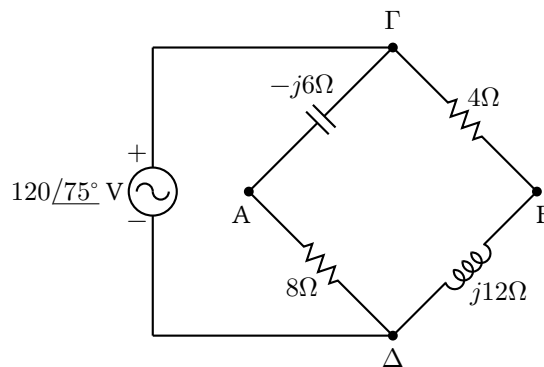
$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{CD} &= 6 \angle 30^\circ - 2\dot{I}_x \\ \dot{V}_{CD} &= -j\dot{I}_1 + 2\dot{I}_x \\ \dot{V}_{CD} &= (4 + j2)\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{I}_x &= (6 \angle 30^\circ - \dot{V}_{CD})/2 \\ \dot{I}_1 &= (2\dot{I}_x - \dot{V}_{CD})/j = -j6 \angle 30^\circ + j2\dot{V}_{CD} \\ \dot{I}_2 &= \dot{V}_{CD}/(4 + j2) \\ \dot{I}_x &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\dot{V}_{CD} = \frac{3 \angle 30^\circ + j6 \angle 30^\circ}{\frac{1}{2} + j2 + \frac{1}{4 + j2}} = 3.313 \angle 23.7^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{V}_{CD}/(4 + j2) = 0.741 \angle -2.9^\circ \text{ A}$$

ίδιο αποτέλεσμα όπως και πριν.

**Παράδειγμα 7.3** Στο κύκλωμα σχ. 23 να βρεθεί το ισοδύναμο κατά Thevenin όπως φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B.



Σχήμα 23: Κύκλωμα γέφυρας.

Για να βρούμε τη  $Z_{TH}$  βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσης άρα τα Γ,Δ ταυτίζονται και

$$Z_{TH} = \{8 \parallel (-j6)\} + \{4 \parallel j12\} = 2.88 - j3.84 + 3.6 + j1.2 = 6.48 - j2.64 = 6.997 \angle -22.17^\circ \Omega$$

Για την  $\dot{V}_{TH}$ , αν  $\dot{I}_1$  το ρεύμα που διαρρέει τον αριστερό κλάδο της γέφυρας και  $\dot{I}_2$  το ρεύμα που διαρρέει τον δεξιό κλάδο, από πάνω έως κάτω και στις δυο περιπτώσεις, τότε

$$\dot{I}_1 = \frac{120 \angle 75^\circ}{8 - j6} = -4.47 + j11.136 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = \frac{120 \angle 75^\circ}{4 + j12} = 9.47 + j0.568$$

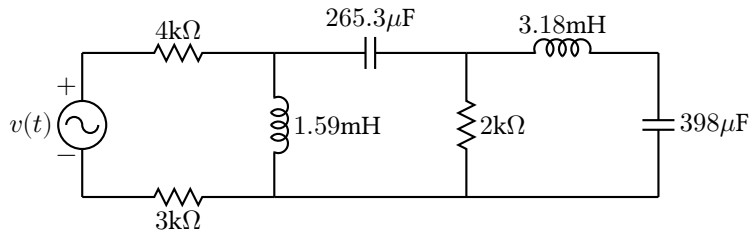
οπότε

$$\dot{V}_{TH} = \dot{V}_{\Delta\Delta} + \dot{V}_{\Delta B} = 8\dot{I}_1 - j12\dot{I}_2 = -28.939 - j24.546 = 37.95 \angle 220.31^\circ \text{ V}$$

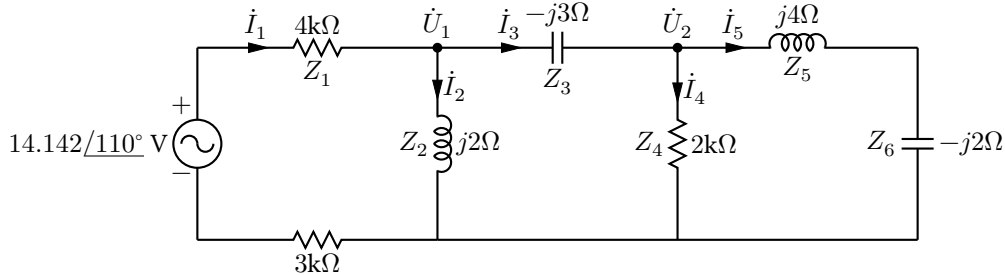
**Παράδειγμα 7.4** Στο κύκλωμα σχ. 24 να υπολογιστεί η τάση  $v_C(t)$  στα άκρα του πυκνωτή των 398  $\mu\text{F}$  όταν η συχνότητα της πηγής είναι  $f = 200 \text{ Hz}$  και  $v(t) = 20 \cos(2\pi ft + 110^\circ) \text{ V}$ .

Καταρχήν μεταφέρουμε το κύκλωμα στο χώρο των συχνοτήτων (σχ. 25). Έχουμε  $f = 200 \text{ Hz}$  επομένως  $\omega = 2\pi f = 1256.6 \text{ rad/s}$  και οι επιμέρους σύνθετες αντιστάσεις είναι:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 7 \times 10^3 \Omega \\ Z_2 &= j\omega \cdot 1.59 \times 10^{-3} = j1.998 \sim j2 \Omega \\ Z_3 &= -j/(\omega \cdot 265.3 \times 10^{-6}) = -j2.999 \sim -j3 \Omega \\ Z_4 &= 2 \times 10^3 \Omega \\ Z_5 &= j\omega \cdot 3.18 \times 10^{-3} = j3.996 \sim j4 \Omega \\ Z_6 &= -j/(\omega \cdot 398 \times 10^{-6}) = -j1.999 \sim -j2 \Omega \end{aligned}$$



Σχήμα 24: Αρχικό κύκλωμα.



Σχήμα 25: Κύκλωμα στο χώρο συχνοτήτων.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης. Επιλέγεται η μέθοδος γραμμικότητας με κανόνες Kirchhoff. Υποθέτουμε ότι το ρεύμα  $\dot{I}_5 = 1 \angle 0^\circ$  A. Υπολογίζουμε κατόπιν την διέγερση που θα έδινε ένα τέτοιο ρεύμα.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{I}_5 \cdot (Z_5 + Z_6) = j2 \text{ V} \\ \dot{I}_4 &= \dot{V}_2 / Z_4 = \dot{V}_2 / 2000 = j0.001 \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 1 + j0.001 \text{ A} \\ \dot{V}_1 &= \dot{V}_2 + \dot{I}_3 \cdot Z_3 = j2 + (1 + j0.001) \cdot (-j3) = 0.003 - j \text{ V} \\ \dot{I}_2 &= \dot{V}_1 / Z_2 = \dot{V}_1 / (j2) = -0.5 - j0.0015 \text{ A} \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.5 - j0.0005 \text{ A} \\ \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{I}_1 \cdot Z_1 = 3500.003 - j4.5 \text{ V} \end{aligned}$$

Με απλή μέθοδο τριών, εφόσον ισχύει γραμμικότητα, το πραγματικό ρεύμα  $\dot{I}_5$  θα είναι

$$\dot{I}_5 = \frac{14.142 \angle 110^\circ}{3500.003 - j4.5} = \frac{14.142 \angle 110^\circ}{3500.006 \angle -0.07^\circ} = 4.04 \angle 110.07^\circ \text{ mA}$$

Άρα, η τάση στα άκρα του πυκνωτή, θα είναι

$$\dot{V}_C = \dot{I}_5 \cdot Z_6 = 8.08 \angle 20.07^\circ \text{ mV}$$

και η κυματομορφή της τάσης

$$v_C(t) = 11.43 \cos(2\pi ft + 20.07^\circ) \text{ mV}$$

## 8 Ασκήσεις

Έγιναν οι ασκήσεις 3.1, 3.3, 3.4, 3.7 από

[http://elap.teipat.gr/drosop/Ηλεκτροτεχνία\\_II/Lxristougenna2006.pdf](http://elap.teipat.gr/drosop/Ηλεκτροτεχνία_II/Lxristougenna2006.pdf)

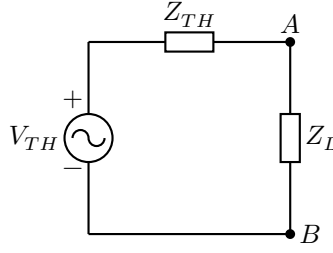
Έγινε η άσκηση 3.22 από

[http://elap.teipat.gr/drosop/Ηλεκτροτεχνία\\_II/Lxristougenna2006.pdf](http://elap.teipat.gr/drosop/Ηλεκτροτεχνία_II/Lxristougenna2006.pdf)

## 9 Μέγιστη μεταφορά μέσης ή πραγματικής ισχύος

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την μέγιστη μεταφορά πραγματικής ισχύος  $P$  σε κάποιο φορτίο  $Z_L$  από κάποιο κύκλωμα. Το πρώτο βήμα είναι ο μετασχηματισμός του κυκλώματος σε ισοδύναμο κατά Thevenin οπότε έχουμε το πα-





Σχήμα 26: Το ισοδύναμο κατά Thevenin ενός οποιοδήποτε γραμμικού κυκλώματος με φορτίο  $Z_L$  σε σειρά.

Οι εμπειδήσεις είναι  $Z_{TH} = R_{TH} + jX_{TH}$  και  $Z_L = R_L + jX_L$  ενώ το ρεύμα που διέρχεται από το φορτίο  $Z_L$  είναι

$$\dot{I}_L = \dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{TH}}{Z_{TH} + Z_L}$$

Με διαίρεση τάσης έχουμε

$$\dot{V}_L = \dot{V}_{AB} = \frac{Z_L}{Z_{TH} + Z_L} \dot{V}_{TH}$$

Η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο  $Z_L$  είναι

$$\begin{aligned} P_L &= \Re \{ \dot{V}_L \dot{I}_L^* \} = \Re \left\{ \frac{Z_L}{(Z_{TH} + Z_L)} \dot{V}_{TH} \frac{\dot{V}_{TH}^*}{(Z_{TH} + Z_L)^*} \right\} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 R_L}{|Z_{TH} + Z_L|^2} = \\ &= \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 R_L}{(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2} \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισχύς  $P_L$  είναι πραγματική συνάρτηση δυο μεταβλητών,  $P_L(R_L, X_L)$ . Για την εύρεση των τιμών των  $R_L, X_L$  για τις οποίες έχουμε μέγιστη  $P_L$ , χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα από τη μαθηματική ανάλυση όπου

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = -\frac{|\dot{V}_{TH}|^2 R_L 2(X_{TH} + X_L)}{[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2]^2} = 0 \Rightarrow X_L = -X_{TH}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R_L} &= \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 \{ [(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2] - 2R_L(R_{TH} + R_L) \}}{[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2]^2} = 0 \Rightarrow \\ R_{TH}^2 - R_L^2 + (X_{TH} + X_L)^2 &= 0 \Rightarrow R_L = R_{TH} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη σχέση  $X_L = -X_{TH}$  και το γεγονός ότι  $R_{TH}, R_L > 0$ . Το ακρότατο είναι

$$Z_L = Z_{TH}^*$$

Το παραπάνω ακρότατο οδηγεί σε μέγιστο όπως μπορεί να φανεί από το αρνητικό πρόσημο της οριζουσας των μερικών παραγώγων της  $P_L$  (αντίστοιχο με το πρόσημο της δευτέρας παραγώγου για συνάρτηση μιας μεταβλητής) για  $R_L = R_{TH}, X_L = -X_{TH}$ .

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial R_L^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_L \partial R_L} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial R_L \partial X_L} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_L^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 P}{\partial R_L^2} \frac{\partial^2 P}{\partial X_L^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial R_L \partial X_L} \frac{\partial^2 P}{\partial X_L \partial R_L} = -\frac{|\dot{V}_{TH}|^4}{4(R_{TH}^2 + X_{TH}^2)^2}$$

Το μέγιστο αυτό είναι

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4R_{TH}} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4 \Re \{ Z_{TH} \}}$$

Για την περίπτωση όπου το φορτίο είναι καθαρά ωμικό, δηλ.  $X_L = 0$  ενώ  $X_{TH} \neq 0$ , έχουμε συνάρτηση μιας μεταβλητής, και

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \Rightarrow \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 \{ [(R_{TH} + R_L)^2 + X_{TH}^2] - 2R_L(R_{TH} + R_L) \}}{[(R_{TH} + R_L)^2 + X_{TH}^2]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$R_{TH}^2 + 2R_{TH}R_L + R_L^2 + X_{TH}^2 - 2R_{TH}R_L - 2R_L^2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_L = \sqrt{R_{TH}^2 + X_{TH}^2} = |Z_{TH}|$$

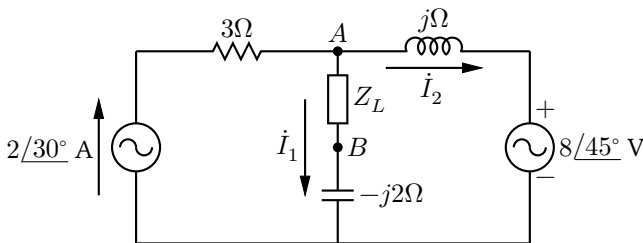
και η μέγιστη πραγματική ισχύς είναι τότε

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2R_{TH}} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2\Re\{Z_{TH}\}}$$

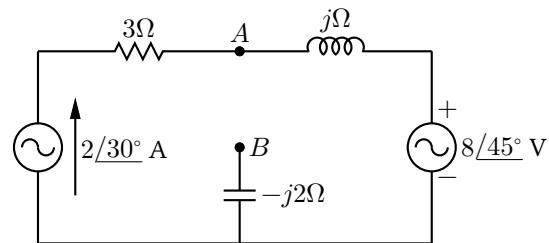
**Παράδειγμα 9.1** Τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου  $R_L = 0$ ;

Όταν  $R_L = 0$  η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο  $Z_L$  είναι μηδέν. Το φορτίο  $Z_L$ , για  $X_L \neq 0$ , είναι είτε πηνίο είτε πυκνωτής. Μαζί με το  $Z_{TH}$  όπου  $R_{TH}, X_{TH} \neq 0$  έχουμε κύκλωμα RLC σειράς. Θα μπορούσαμε τότε να πούμε ότι για  $X_L = -X_{TH}$  έχουμε συντονισμό σειράς και το ρεύμα  $\dot{I}_L$  έχει μέγιστο  $|\dot{V}_{TH}|/R_{TH}$ .

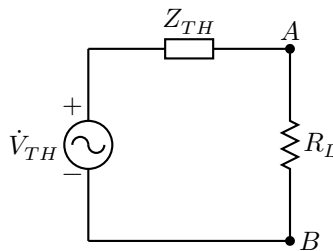
**Παράδειγμα 9.2** Στο κύκλωμα του σχ. 27 να βρεθεί η  $Z_L = R_L$  (πραγματικό φορτίο) έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος. Ποια είναι η μέγιστη ισχύς;



Σχήμα 27: Αρχικό κύκλωμα.



Σχήμα 28: Και κύκλωμα χωρίς φορτίο.



Σχήμα 29: Το ισοδύναμο Thevenin.

Στο παράδειγμα 7.1 βρήκαμε το ισοδύναμο Thevenin του αρχικού κυκλώματος. Συγκεκριμένα βρήκαμε

$$Z_{TH} = -j \Omega \quad \text{και} \quad \dot{V}_{TH} = 8.734 \angle 57.78^\circ \text{ V}$$

Για  $Z_L = R_L$  πραγματικό φορτίο

$$R_L = |Z_{TH}| = 1 \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2\Re\{Z_{TH}\} + 2|Z_{TH}|} = \frac{8.734^2}{2} = 38.1 \text{ W}$$

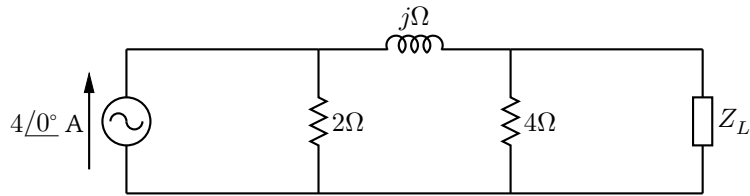
**Παράδειγμα 9.3** Στο κύκλωμα του σχ. 30 να βρεθεί η  $Z_L$  για την οποία έχουμε μέγιστη πραγματική ισχύ από το κύκλωμα καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης πραγματικής ισχύος. Ομοίως για  $Z_L = R_L$  (πραγματικό φορτίο). Εναλλακτικά, τι τιμή  $Z_L$  θα μας δώσει μέγιστο ρεύμα και πιο είναι αυτό.

Δοκιμάζουμε μετασχηματισμό Norton του αριστερού τμήματος του κυκλώματος (σχ. 31 στο δεξί). Η  $Z_N$  είναι  $2 + j \Omega$  και η

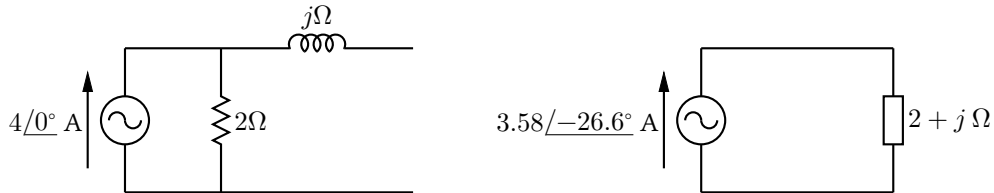
$$\dot{I}_N = \frac{2}{2 + j} 4 = 3.58 \angle -26.6^\circ \text{ A}$$

Ενσωματώνοντας την  $4 \Omega$  παράλληλα έχουμε τελική

$$Z_N = (2 + j) \parallel 4 = 1.47 \angle 17.1^\circ \Omega$$



Σχήμα 30: Αρχικό κύκλωμα



Σχήμα 31: Μετασχηματισμός κατά Norton αριστερού τμήματος στο δεξιό



Σχήμα 32: Τελικό κύκλωμα με συνδυασμό της 4 Ω.

Μπορούμε να μετατρέψουμε στο ισοδύναμο Thevenin με

$$Z_{TH} = Z_N = 1.405 + j0.432 = 1.47 / 17.1^\circ \Omega \quad \text{και} \quad \dot{V}_{TH} = \dot{I}_N Z_N = 5.26 / -9.46^\circ \text{ V}$$

Επομένως, για  $Z_L$  σύνθετο

$$Z_L = Z_{TH}^* = 1.47 / -17.1^\circ \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4 \Re\{Z_{TH}\}} = \frac{5.26^2}{4 \cdot 1.405} = 4.92 \text{ W}$$

Για  $Z_L = R_L$  πραγματικό

$$R_L = |Z_{TH}| = 1.47 \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2 \Re\{Z_{TH}\}} = \frac{5.26^2}{2 \cdot 1.47 + 2 \cdot 1.405} = 4.81 \text{ W}$$

Για μέγιστο ρεύμα

$$Z_L = -jX_{TH} = -j0.432 \Omega \quad \text{και} \quad \dot{I}_{\max} = \frac{\dot{V}_{TH}}{\Re\{Z_{TH}\}} = 3.74 / -9.46^\circ \text{ A}$$

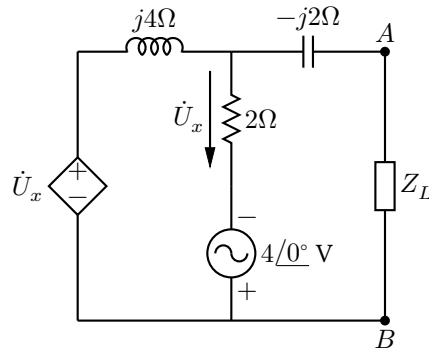
**Παράδειγμα 9.4** Έγινε το Θέμα 1 της εξεταστικής Ιουνίου 2011, τμήμα 2.

boo

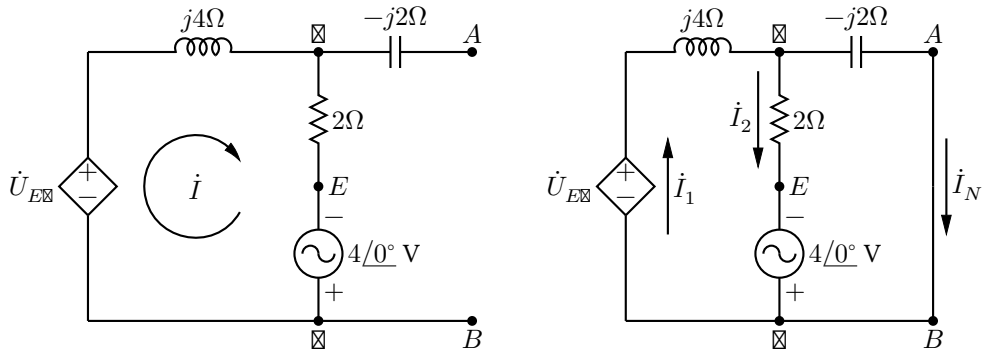
## 10 130517

**Παράδειγμα 10.1** Στο κύκλωμα, σχ. 33, να βρεθεί το φορτίο  $Z_L$  για το οποίο έχουμε μέγιστη πραγματική ισχύ από το κύκλωμα καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης πραγματικής ισχύος. Ομοίως για  $Z_L = R_L$  (πραγματικό φορτίο). Εναλλακτικά, τι τιμή  $Z_L$  θα μας δώσει μέγιστο ρεύμα και πιο είναι αυτό.

Το κύκλωμα περιέχει μια εξαρτημένη πηγή τάσης επομένως χρειαζόμαστε να βρούμε την τάση  $\dot{V}_{AB|oc}$  με ανοικτούς ακροδέκτες A, B και το ρεύμα βραχυκυκλώσεως  $\dot{I}_{AB|sc}$ . Τοποθετώντας κόμβους στο κύκλωμα έχουμε  $\dot{V}_x = \dot{V}_{EB}$ .



Σχήμα 33: Αρχικό κύκλωμα



Σχήμα 34: Κύκλωμα χωρίς φορτίο. Ανοικτοί ακροδέκτες αριστερά. Βραχυκυκλωμένοι ακροδέκτες δεξιά.

Για την τάση  $\dot{V}_{AB|oc}$  έχουμε το αριστερό κύκλωμα στο σχ. 34 και βλέπουμε ότι  $\dot{V}_{AB|oc} = \dot{V}_{\Delta}$ . Με κανόνα τάσεων του Kirchhoff στον μοναδικό βρόγχο του κυκλώματος και νόμο του Ohm στην  $2 \Omega$  έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}(2 + j4) - 4 \angle 0^\circ - \dot{V}_{E\Delta} &= 0 \\ \dot{V}_{E\Delta} &= -2\dot{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4(1 + j)\dot{I} = 4 \Rightarrow \dot{I} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1 - j}{2} \text{ A}$$

επομένως

$$\dot{V}_{TH} = \dot{V}_{AB|oc} = \dot{V}_{\Delta} = 2\dot{I} - 4 = 1 - j - 4 = -3 - j = 3.162 \angle -161.6^\circ \text{ V}$$

Για το ρεύμα βραχυκυκλώσεως  $\dot{I}_{AB|sc}$  έχουμε το δεξιό κύκλωμα στο σχ. 34 και με κομβική ανάλυση

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{\Delta} &= -j4\dot{I}_1 + \dot{V}_{E\Delta} \\ \dot{V}_{\Delta} &= -\dot{V}_{E\Delta} - 4 \\ \dot{V}_{\Delta} &= -j2\dot{I}_N \\ \dot{V}_{E\Delta} &= -2\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{j}{2}\dot{V}_{\Delta} + j \\ \dot{I}_2 &= -\frac{\dot{V}_{E\Delta}}{2} \\ \dot{I}_N &= \frac{j}{2}\dot{V}_{\Delta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{j}{2}\dot{V}_{\Delta} + j \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{V}_{\Delta}}{2} + 2 \\ \dot{I}_N &= \frac{j}{2}\dot{V}_{\Delta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_N \Rightarrow \frac{j}{2}\dot{V}_{\Delta} + j = \frac{\dot{V}_{\Delta}}{2} + 2 + \frac{j}{2}\dot{V}_{\Delta} \Rightarrow \dot{V}_{\Delta} = j2 - 4 \text{ V}$$

και

$$\dot{I}_N = -1 - j2 = 2.236 \angle -116.6^\circ \text{ A}$$

$$Z_{TH} = \frac{\dot{V}_{TH}}{\dot{I}_N} = 1.414 \angle -45^\circ = 1 - j \Omega$$

Επομένως, για  $Z_L$  σύνθετο

$$Z_L = Z_{TH}^* = 1.414 \angle 45^\circ = 1 + j \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4 \Re\{Z_{TH}\}} = 2.5 \text{ W}$$

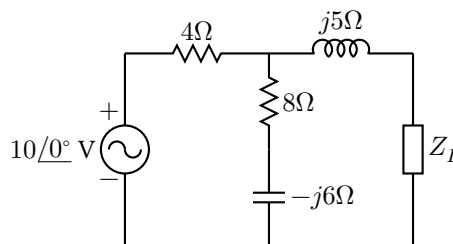
Για  $Z_L = R_L$  πραγματικό

$$R_L = |Z_{TH}| = 1.414 \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2 \Re\{Z_{TH}\}} = 2.07 \text{ W}$$

Για μέγιστο ρεύμα

$$Z_L = -jX_{TH} = j \Omega \quad \text{και} \quad \dot{I}_{\max} = \frac{\dot{V}_{TH}}{\Re\{Z_{TH}\}} = 3.162 \angle -161.6^\circ \text{ A}$$

**Παράδειγμα 10.2** Να βρεθεί η εμπέδηση φορτίου  $Z_L$  για την οποία έχουμε μέγιστη κατανάλωση μέσης ισχύος από το κύκλωμα του σχ. 35 καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης αυτής ισχύος. Επαναλάβετε για  $Z_L = R_L$  (πραγματικό φορτίο). Εναλλακτικά, τι τιμή  $Z_L$  θα μας δώσει μέγιστο ρεύμα και πιο είναι αυτό.



Σχήμα 35: Αρχικό κύκλωμα

Με ανοικτούς ακροδέκτες και βραχυκυκλωμένη την πηγή τάσης

$$Z_{TH} = j5 + 4 \parallel (8 - j6) = j5 + \frac{4(8 - j6)}{4 + 8 - j6} = 2.933 + j4.467 = 5.344 \angle 56.7^\circ \Omega$$

Με ανοικτούς ακροδέκτες και ενεργή την πηγή τάσης, η  $\dot{V}_{TH}$  βρίσκεται από τον διαιρέτη τάσης

$$\dot{V}_{TH} = \frac{8 - j6}{4 + 8 - j6} 10 = 7.333 - j1.333 = 7.454 \angle -10.3^\circ \text{ V}$$

Επομένως, για  $Z_L$  σύνθετο

$$Z_L = Z_{TH}^* = 5.344 \angle -56.7^\circ \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4 \Re\{Z_{TH}\}} = 4.735 \text{ W}$$

Για  $Z_L = R_L$  πραγματικό

$$R_L = |Z_{TH}| = 5.344 \Omega \quad \text{και} \quad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2 \Re\{Z_{TH}\}} = 3.356 \text{ W}$$

Για μέγιστο ρεύμα

$$Z_L = -jX_{TH} = -j4.467 \Omega \quad \text{και} \quad \dot{I}_{\max} = \frac{\dot{V}_{TH}}{\Re\{Z_{TH}\}} = 2.541 \angle -10.3^\circ \text{ A}$$

**Παράδειγμα 10.3** Έγινε το Θέμα 2 της εξεταστικής 28/1/2010.

## 11 130522

### 11.1 Μεταβατικά φαινόμενα

Υπενθυμίζονται οι σχέσεις τάσης / ρεύματος για τα στοιχεία R,L,C

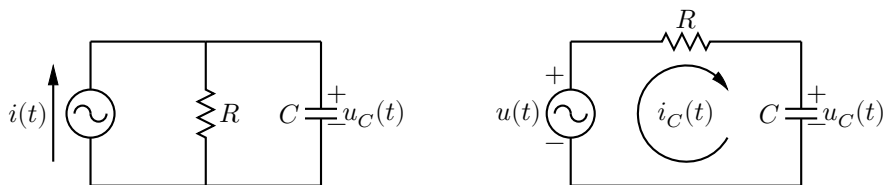
$$v(t) = Ri(t) \quad i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Εφαρμόζουμε κανόνες Kirchhoff και όλες τις άλλες τεχνικές ανάλυσης κυκλωμάτων σχηματίζοντας έτσι διαφορικές εξισώσεις για τις τάσεις ή τα ρεύματα σε κάποιο κύκλωμα που περιέχει RLC στοιχεία και καταλήγουμε σε λύσεις που περιέχουν την πλήρη εξέλιξη στον χρόνο των τάσεων ή ρευμάτων στο κύκλωμα (πλήρη εικόνα μεταβατικών φαινομένων).

### 11.2 Ανάλυση κυκλωμάτων RC



Σχήμα 36: RC κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Με μετασχηματισμό πηγών οι μορφές είναι ισοδύναμες.

Στο σχ. 36 βλέπουμε ένα RC κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Οι μορφές αυτές μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής θεωρημάτων Thevenin ή Norton σε σύνθετα κυκλώματα. Προφανώς, με μετασχηματισμό πηγών οι μορφές είναι ισοδύναμες.

Ο κανόνας ρευμάτων Kirchhoff στη παράλληλη μορφή δίνει

$$i(t) = \frac{v_C}{R} + C \frac{dv_C}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{i(t)}{C} \quad (1)$$

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε κανόνα ρευμάτων στο εν σειρά κύκλωμα στο σημείο (κόμβο) μεταξύ αντίστασης και πυκνωτή. Η συσσώρευση ρεύματος δεν είναι δυνατή οπότε

$$\frac{v_C - v}{R} + C \frac{dv_C}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{v(t)}{RC} \quad (2)$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να πάμε από τη μια σχέση στην άλλη απλώς μέσω της  $v(t) = i(t)R$ .

Η βασική εξίσωση (1 ή 2) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση είναι άθροισμα της λύσης στο ομογενές πρόβλημα (homogeneous solution) και της λύσης στο μη-ομογενές πρόβλημα (particular solution). Ομογενές πρόβλημα έχουμε όταν η συνάρτηση οδήγησης είναι μηδενική. Στην περίπτωσή μας

$$\frac{dv_{CH}}{dt} + \frac{v_{CH}}{RC} = 0 \quad (3)$$

Δεχόμαστε ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$v_{CH}(t) = Ae^{st}$$

γιατί η λύση στο ομογενές πρόβλημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είναι πάντα αυτής της μορφής. Αντικαθιστούμε στην (3) και έχουμε

$$Ase^{st} + \frac{As^{st}}{RC} = 0 \Rightarrow Ae^{st} \left( s + \frac{1}{RC} \right) = 0$$

Έχουμε μη μηδενική λύση για

$$s = -\frac{1}{RC}$$

Το γινόμενο  $RC$  έχει μονάδες χρόνου και ορίζεται σαν σταθερά χρόνου του κυκλώματος,  $\tau = RC$ . Η ομογενής λύση είναι

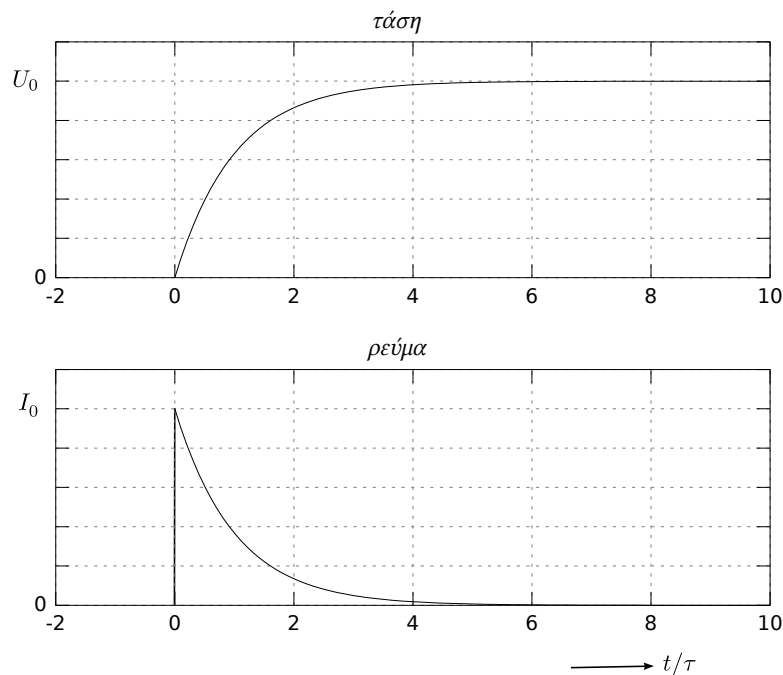
$$v_{CH}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Για το μη ομογενές πρόβλημα έχουμε

$$\frac{dv_{CP}}{dt} + \frac{v_{CP}}{RC} = f(t)$$

όπου  $f(t) = i(t)/C$  ή  $f(t) = v(t)/(RC)$  και η γενική λύση είναι το άθροισμα των δυο παραπάνω,  $v_{CH} + v_{CP}$ . Οι αρχικές συνθήκες μας οδηγούν κατόπιν στον προσδιορισμό των σταθερών.

### 11.2.1 Φόρτιση πυκνωτή



Σχήμα 37: Φόρτιση πυκνωτή από μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τάση (επάνω) και ρεύμα (κάτω).

Για την περίπτωση όπου η διέγερση είναι μια πηγή συνεχούς τάσης ή ρεύματος που ενεργοποιείται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  (κλείσιμο κάποιου διακόπτη)

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ V_0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad i(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ I_0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

δεχόμαστε ότι η λύση για  $t \geq 0$  είναι κάποια σταθερά

$$v_{CP}(t) = K$$

Αντικαθιστώντας στην (1) ή (2) έχουμε

$$K = I_0 R \quad \text{ή} \quad K = V_0$$

Επομένως η ολική λύση είναι το άθροισμα της  $v_{CH}$  και  $v_{CP}$

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau} + V_0$$

Στον πυκνωτή όπου το ρεύμα που τον διαρρέει ορίζεται σαν η παράγωγος της τάσης στα άκρα του, η τάση  $v_C(t)$  πρέπει να είναι συνεχής. Τυχόν ασυνέχεια υπονοείται ότι δημιουργείται από αιχμή ρεύματος απείρου πλάτους που είναι φυσικώς μη αποδεκτό. Με αρχικές συνθήκες  $v_C(t) = 0, i(t) = 0$  για  $t < 0$  και  $i(t) = I_0, v(t) = V_0$  για  $t \geq 0$  έχουμε

$$0 = A + V_0 \Rightarrow A = -V_0$$

και η γενική λύση για την τάση στα άκρα του πυκνωτή για  $t \geq 0$  είναι

$$v_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

ενώ η γενική λύση για το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή για  $t \geq 0$  είναι

$$i_C(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Στο σχ. 37 βλέπουμε τη φόρτιση του πυκνωτή (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου. Βλέπουμε την τάση να ξεκινά από το μηδέν (άρα βραχυκύκλωμα) και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) να είναι πρακτικά στην τελική τιμή  $V_0$ . Αντίστοιχα για το ρεύμα, βλέπουμε πεπερασμένη αιχμή για  $t = 0$  όπου περνά όλο το ρεύμα της πηγής και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) το ρεύμα είναι πρακτικά μηδέν (διακόπτης/ανοικτό κύκλωμα).

### 11.2.2 Εκφόρτιση πυκνωτή

Έστω τώρα ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος την χρονική στιγμή  $t = 0$  στην τάση  $V_0$  και βγαίνει εκτός η πηγή στο σχ. 36. Ο πυκνωτής θα αρχίσει να εκφορτίζεται μέσω της αντίστασης  $R$ . Η εξίσωση που περιγράφει την εκφόρτιση είναι

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

όμοια με την ομογενή προηγούμενως, επομένως η λύση θα είναι

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau}$$

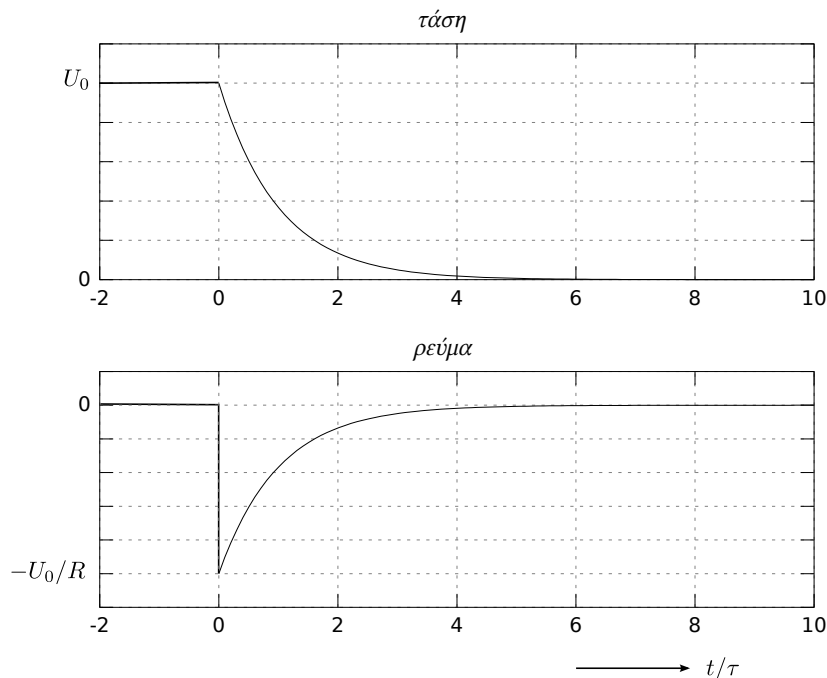
Με την αρχική συνθήκη  $v_C(t) = V_0$  για  $t = 0$  έχουμε  $A = V_0$ , οπότε η τελική λύση είναι

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

για την τάση, και

$$i_C(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

για το ρεύμα.

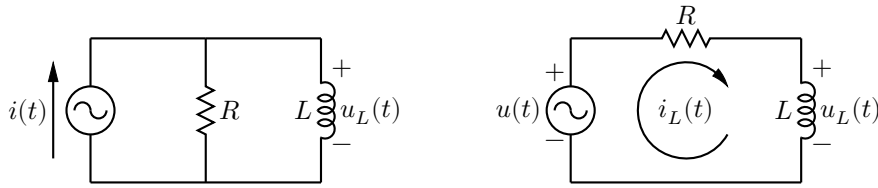


Σχήμα 38: Εκφόρτιση πυκνωτή από αρχική τάση  $V_0$ . Τάση (επάνω) και ρεύμα (κάτω).

Στο σχ. 38 βλέπουμε την εκφόρτιση του πυκνωτή μέσω της αντίστασης (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου. Βλέπουμε την τάση να ξεκινά από την τιμή  $V_0$  και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται. Βλέπουμε επίσης το ρεύμα από την τιμή μηδέν (βραχυκύκλωμα) να έχει μια πεπερασμένη αιχμή  $-V_0/R$  (το  $-$  απλώς σημαίνει ροή ρεύματος εκφόρτισης αντιθέτου φοράς από το ρεύμα φόρτισης) και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται πάλι.



### 11.3 Ανάλυση κυκλωμάτων RL



Σχήμα 39: RL κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Με μετασχηματισμό πηγών οι μορφές είναι ισοδύναμες.

Στο σχ. 39 βλέπουμε ένα RL κύκλωμα σε μορφή παράλληλη ή σειράς. Οι μορφές αυτές μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής θεωρημάτων Thevenin ή Norton σε σύνθετα κυκλώματα. Αν έχουμε την παράλληλη μορφή είναι πιο βολικό να κάνουμε ένα μετασχηματισμό  $v(t) = i(t)R$  για να έρθουμε στην εν σειρά.

Ο κανόνας τάσεων Kirchhoff στην εν σειρά μορφή δίνει

$$i_L R + v_L = v(t) \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = v(t) \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{v(t)}{L} \quad (4)$$

Η βασική εξίσωση (4) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση είναι άθροισμα της λύσης στο ομογενές πρόβλημα (homogeneous solution) και της λύσης στο μη-ομογενές πρόβλημα (particular solution). Ομογενές πρόβλημα έχουμε όταν η συνάρτηση οδήγησης είναι μηδενική. Στην περίπτωσή μας

$$\frac{di_{LH}}{dt} + \frac{R}{L} i_{LH} = 0 \quad (5)$$

Δεχόμαστε ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$i_{LH}(t) = Ae^{st}$$

γιατί η λύση στο ομογενές πρόβλημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είναι πάντα αυτής της μορφής. Αντικαθιστούμε στην (5) και έχουμε

$$Ase^{st} + \frac{R}{L} As^{st} = 0 \Rightarrow Ae^{st} \left( s + \frac{R}{L} \right) = 0$$

Έχουμε μη μηδενική λύση για

$$s = -\frac{R}{L}$$

Το πηλίκο  $L/R$  έχει μονάδες χρόνου και ορίζεται σαν σταθερά χρόνου του κυκλώματος,  $\tau = L/R$ . Η ομογενής λύση είναι

$$i_{LH}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Για το μη ομογενές πρόβλημα έχουμε

$$\frac{di_{LP}}{dt} + \frac{R}{L} i_{LP} = f(t)$$

όπου  $f(t) = v(t)/L$  και η γενική λύση είναι το άθροισμα των δυο παραπάνω,  $i_{LH} + i_{LP}$ . Οι αρχικές συνθήκες μας οδηγούν κατόπιν στον προσδιορισμό των σταθερών.

#### 11.3.1 Φόρτιση πηνίου

Για την περίπτωση όπου η διέγερση είναι μια πηγή συνεχούς τάσης που ενεργοποιείται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  (κλείσιμο κάποιου διακόπτη)

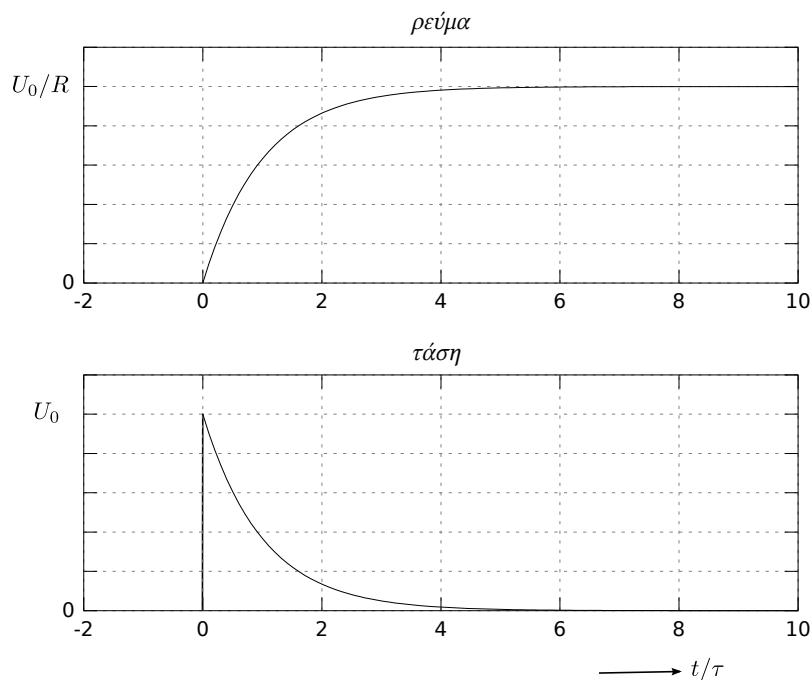
$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ V_0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

δεχόμαστε ότι η λύση για  $t \geq 0$  είναι κάποια σταθερά

$$i_{LP}(t) = K$$

Αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε

$$K = \frac{V_0}{R}$$



Σχήμα 40: Φόρτιση πηνίου από μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ρεύμα (επάνω) και τάση (κάτω).

Επομένως η ολική λύση είναι το άθροισμα της  $i_{LH}$  και  $i_{LP}$

$$i_L(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_0}{R}$$

Στον πηνίο όπου η τάση στα άκρα του ορίζεται σαν η παράγωγος του ρεύματος που το διαρρέει, το ρεύμα  $i_L(t)$  πρέπει να είναι συνεχές. Τυχόν ασυνέχεια υπονοείται ότι δημιουργείται από αιχμή τάσης απείρου πλάτους που είναι φυσικώς μη αποδεκτό. Με αρχικές συνθήκες  $i_L(t) = 0$  για  $t < 0$  και  $v(t) = V_0$  για  $t \geq 0$  έχουμε

$$0 = A + \frac{V_0}{R} \Rightarrow A = -\frac{V_0}{R}$$

και η γενική λύση για το ρεύμα του διαρρέει το πηνίο για  $t \geq 0$  είναι

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

ενώ η γενική λύση για την τάση στα άκρα του πηνίου για  $t \geq 0$  είναι

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = V_0 e^{-t/\tau}$$

Στο σχ. 40 βλέπουμε τη φόρτιση του πηνίου (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου.

Βλέπουμε το ρεύμα να ξεκινά από το μηδέν (άρα διακόπτης) και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) να είναι πρακτικά στην τελική τιμή  $V_0/R$ . Αντίστοιχα για τη τάση, βλέπουμε πεπερασμένη αιχμή για  $t = 0$  όπου το πηνίο αντιτίθεται στη μεταβολή της κατάστασης του εμφανίζοντας τάση εξ αυτεπαγωγής αντίθετη με την αιχμή της πηγής και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) η τάση είναι πρακτικά μηδέν (βραχυκύκλωμα).

### 11.3.2 Εκφόρτιση πηνίου

Έστω τώρα ότι το πηνίο είναι φορτισμένο την χρονική στιγμή  $t = 0$  με κάποιο ρεύμα  $I_0 = V_0/R$  και βγαίνει εκτός η πηγή στο σχ. 39. Το πηνίο θα εκφορτίζεται μέσω της αντίστασης  $R$ . Η εξίσωση που περιγράφει την εκφόρτιση είναι

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = 0$$

όμοια με την ομογενή προηγουμένως, επομένως η λύση θα είναι

$$i_L(t) = Ae^{-t/\tau}$$

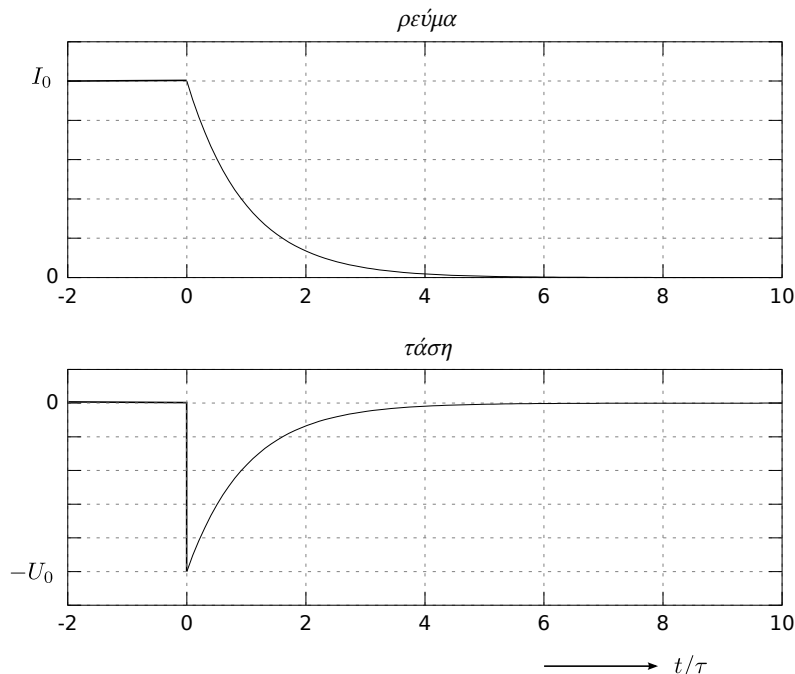
Με την αρχική συνθήκη  $i_L(t) = I_0$  για  $t = 0$  έχουμε  $A = I_0$ , οπότε η τελική λύση είναι

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

για το ρεύμα, και

$$v_L(t) = -V_0 e^{-t/\tau}$$

για τη τάση.



Σχήμα 41: Εκφόρτιση πηνίου από αρχικό ρεύμα  $I_0$ . Ρεύμα (επάνω) και τάση (κάτω).

Στο σχ. 41 βλέπουμε την εκφόρτιση του πηνίου μέσω της αντίστασης (τάση και ρεύμα) σαν συνάρτηση του χρόνου. Βλέπουμε το ρεύμα να ξεκινά από την τιμή  $I_0$  και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται. Βλέπουμε επίσης την τάση από την τιμή μηδέν (βραχυκύκλωμα) να έχει μια πεπερασμένη αιχμή  $-V_0$  (το  $-$  απλώς σημαίνει την εξ αυτεπαγωγής αντίδραση του πηνίου στην απότομη εξαφάνιση της πηγής) και μετά από περίπου  $5\tau$  (σταθερή κατάσταση) πρακτικά να μηδενίζεται πάλι.

## 11.4 Σύνοψη για RC, RL

Στα παραπάνω είδαμε τις διαδικασίες φόρτισης και εκφόρτισης κυκλωμάτων RC και RL. Και οι δυο διαδικασίες περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξεως με εξωτερική διέγερση μια πηγή συνεχούς τάσης που ενεργοποιείται με διακόπτη τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

Στη γενική περίπτωση η ενεργοποίηση του διακόπτη γίνεται τη χρονική στιγμή  $t = t_0$ . Έχουμε τότε

### 11.4.1 RC

Σταθερά χρόνου:  $\tau = RC$

Τάση:  $v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(t_0) - v_C(\infty)] \exp[-(t - t_0)/\tau]$

Ρεύμα:  $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$

Όπου  $v_C(t_0)$  η αρχική κατάσταση του πυκνωτή και  $v_C(\infty)$  η τελική. Υπενθυμίζεται ότι  $v_C(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση και ότι ο πυκνωτής στη σταθερή κατάσταση στο συνεχές δρα σαν διακόπτης.

## 11.4.2 RL

Σταθερά χρόνου:  $\tau = L/R$

Ρεύμα:  $i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(t_0) - i_L(\infty)] \exp[-(t - t_0)/\tau]$

Τάση:  $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

Όπου  $i_L(t_0)$  η αρχική κατάσταση του πηνίου και  $i_L(\infty)$  η τελική. Υπενθυμίζεται ότι  $i_L(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση και ότι το πηνίο στη σταθερή κατάσταση στο συνεχές δρα σαν βραχυκύκλωμα.

## 11.4.3 Για μη σταθερά εξωτερική διέγερση

Υπενθυμίζεται ότι οι διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξεως στη γενική τους μορφή είναι

$$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$$

με λύση

$$y(x) = \exp\left[-\int \alpha(x)dx\right] \cdot \left[ K + \int \beta(x) \exp\left[\int \alpha(x)dx\right] dx \right]$$

όπου η σταθερά  $K$  προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Για  $\alpha(x) = \alpha$ , σταθερά, ανεξάρτητη του  $x$

$$y(x) = e^{-\alpha x} \left[ K + \int \beta(x)e^{\alpha x} dx \right]$$

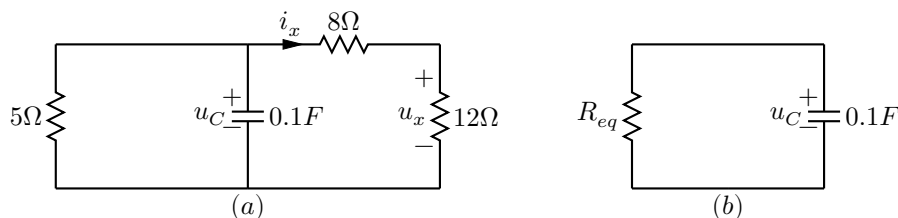
όπου η σταθερά  $K$  προσδιορίζεται πάλι από τις αρχικές συνθήκες.

Στις παραπάνω εξισώσεις αντικαταστήστε όπου  $x$  το  $t$ , όπου  $y$  την τάση ή το ρεύμα του αντίστοιχου πυκνωτή ή πηνίου και όπου  $\beta$  την εξωτερική διέγερση.

## 12 130524

### 12.1 Παραδείγματα

**Παράδειγμα 12.1** Έστω  $v_C(0) = 15 \text{ V}$  στο παρακάτω κύκλωμα (a). Να βρεθούν τα μεγέθη  $v_C(t)$ ,  $v_x(t)$  και  $i_x(t)$  για  $t > 0$ .



Σχήμα 42: Αρχικό κύκλωμα αριστερά. Το ισοδύναμο Thevenin ως προς τον πυκνωτή δεξιά.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε απλώς εκφόρτιση πυκνωτή. Στόχος μας είναι να βρούμε πρώτα την τάση  $v_C(t)$  στα άκρα του και μετά τα υπόλοιπα μεγέθη.

Η ολική αντίσταση που βλέπει ο πυκνωτής είναι

$$R_{eq} = (8 + 12) \parallel 5 = \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} = 4 \Omega$$

επομένως το ισοδύναμο κύκλωμα είναι το (b) και η σταθερά χρόνου είναι  $\tau = R_{eq}C = 4 \cdot 0.1 = 0.4$  s. Επομένως

$$v_C(t) = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.4} = 15e^{-2.5t} \text{ V}$$

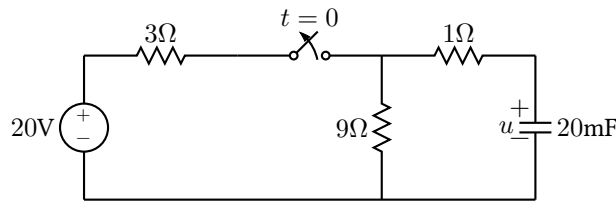
Ο πυκνωτής στην εκφόρτισή του συμπεριφέρεται σαν πηγή τάσης επομένως με διαιρέτη τάσης

$$v_x(t) = \frac{12}{12+8} v_C(t) = 0.6 \cdot 15e^{-2.5t} = 9e^{-2.5t} \text{ V}$$

και

$$i_x(t) = \frac{v_x(t)}{12} = 0.75e^{-2.5t} \text{ A}$$

**Παράδειγμα 12.2** Ο διακόπτης στο παρακάτω κύκλωμα ήταν κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα και ανοίγει την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Προσδιορίστε την τάση  $v(t)$  για  $t \geq 0$ .



Σχήμα 43: Αρχικό κύκλωμα.

Στο συνεχές ρεύμα ο πυκνωτής δρα σαν διακόπτης. Επομένως ο δεξιός κλάδος για  $t < 0$  είναι εκτός και η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$v(t) = \frac{9}{9+3} 20 = 15 \text{ V}$$

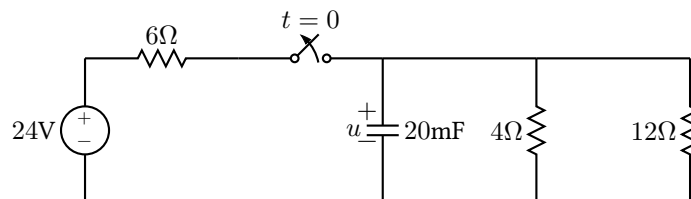
Εφόσον η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αλλάξει ακαριαία (τάση συνεχής) έχουμε για την αλλαγή από  $t = 0^-$  σε  $t = 0$

$$v(0) = 15 \text{ V}$$

Για  $t = 0$ , ο διακόπτης ανοίγει και ο αριστερός κλάδος βγαίνει εκτός. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται στην ολική αντίσταση  $R_{eq} = 9 + 1 = 10 \Omega$ . Η σταθερά χρόνου είναι  $\tau = R_{eq}C = 10 \cdot 20 \times 10^{-3} = 0.2$  s. Οπότε, για  $t \geq 0$  έχουμε

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.2} = 15e^{-5t} \text{ V}$$

**Παράδειγμα 12.3** Εάν στο παρακάτω κύκλωμα ο διακόπτης ανοίγει την χρονική στιγμή  $t = 0$ , υπολογίστε την τάση  $v(t)$  για  $t \geq 0$ .



Σχήμα 44: Αρχικό κύκλωμα.

Και εδώ για  $t = 0^-$ , ο πυκνωτής είναι διακόπτης και η τάση στα άκρα του είναι η τάση στον παράλληλο συνδυασμό  $4 \parallel 12 = 3 \Omega$ . Με διαιρέτη τάσης

$$v(0^-) = \frac{3}{3+6} 24 = 8 \text{ V}$$

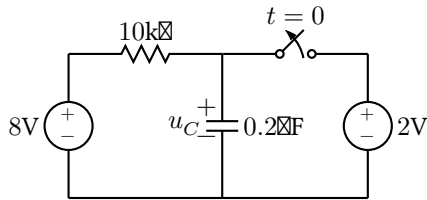
Εφόσον η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αλλάξει ακαριαία (τάση συνεχής) έχουμε για την αλλαγή από  $t = 0^-$  σε  $t = 0$

$$v(0) = 8 \text{ V}$$

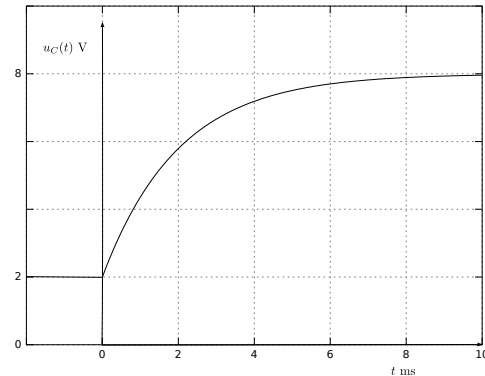
Για  $t = 0$ , ο διακόπτης ανοίγει και ο αριστερός κλάδος βγαίνει εκτός. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται στην αντίσταση  $R = 3 \Omega$ . Η σταθερά χρόνου είναι  $\tau = RC = 3 \cdot 20 \times 10^{-3} = 0.06$  s. Οπότε, για  $t \geq 0$  έχουμε

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} = 8e^{-t/0.06} \text{ V}$$

**Παράδειγμα 12.4** Στο παρακάτω κύκλωμα ο διακόπτης είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή  $t = 0$  ανοίγει. Ποια είναι η τάση  $v_C(t)$  για  $-\infty < t < \infty$ ; Εκτός από την αναλυτική έκφραση φτιάξτε και ένα σκίτσο της τάσης. Ποια είναι η τιμή της τάσης την χρονική στιγμή  $t = 5$  ms;



Σχήμα 45: Αρχικό κύκλωμα.



Σχήμα 46: Σκίτσο τάσης.

Εφόσον ο διακόπτης είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα ο πυκνωτής είναι στη σταθερή κατάσταση και λειτουργεί σαν διακόπτης (ανοικτό κύκλωμα). Η τάση στα άκρα του μέχρι και  $t = 0$  είναι επομένως  $v_C(0) = 2$  V.

Όταν ανοίγει ο διακόπτης ο δεξιός κλάδος βγαίνει εκτός. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται (;) στην αντίσταση  $10$  kΩ με σταθερά χρόνου  $\tau = RC = 2$  ms

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 8 + (8 - 2)e^{-t/\tau} = 8 - 6e^{-t/\tau} \text{ V}$$

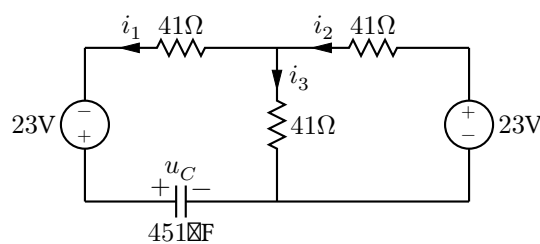
εφόσον στη νέα τελική κατάσταση ο πυκνωτής έχει στα άκρα του την τάση της πηγής των  $8$  V. Η πλήρης αναλυτική έκφραση είναι επομένως:

$$v_C(t) = \begin{cases} 2 & \text{για } t < 0 \\ 8 - 6e^{-t/\tau} & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

Το σκίτσο της τάσης φαίνεται στο σχ. 46. Βλέπουμε ότι ο πυκνωτής φορτίζεται από τα  $2$  V στα  $8$  V.

Την χρονική στιγμή  $t = 5$  ms έχουμε  $v_C(5 \text{ ms}) = 7.507$  V.

**Παράδειγμα 12.5** Στο παρακάτω κύκλωμα για  $t = 0$  ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ποια θα είναι τα ρεύματα  $i_1, i_2, i_3$  καθώς και η τάση  $v_C(t)$  στα άκρα του πυκνωτή; Πόσο χρόνο θα πάρει έτσι ώστε η τάση στα άκρα του πυκνωτή να είναι  $3/4$  της μέγιστης τιμής της;



Σχήμα 47: Αρχικό κύκλωμα.

Ο πυκνωτής ξεκινά αφόρτιστος την χρονική στιγμή  $t = 0$  και μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα καταλήγει σε μια καινούργια σταθερή κατάσταση. Εφόσον οι πηγές είναι συνεχούς τάσης, η καινούργια κατάσταση του πυκνωτή θα είναι σαν διακόπτης. Άρα  $i_1 = 0$ . Επίσης,

$$i_2 = i_3 = \frac{23}{2 \cdot 41} = 0.28 \text{ A} \quad \text{και} \quad v_C = 23 + i_3 \cdot 41 = 34.5 \text{ V}$$

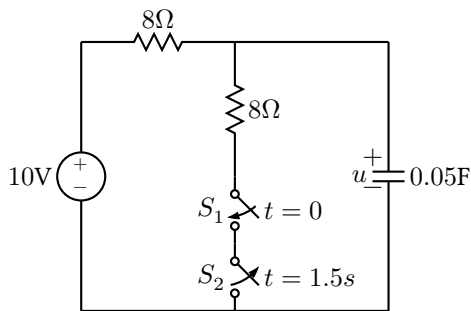
Στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα έχουμε

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 34.5[1 - e^{-t/\tau}]$$

όπου  $v_C(0) = 0$ ,  $v_C(\infty) = 34.5$  και  $\tau = RC = 27.7$  ms εφόσον  $R = 41 + (41 \parallel 41) = 61.5$  Ω. Προφανώς,  $v_{C \max} = 34.5$  V. Οπότε η χρονική στιγμή  $t = t_0$  όπου  $v_C = (3/4)v_{C \max}$  υπολογίζεται από

$$v_C(t_0) = \frac{3}{4}v_{C \max} = v_{C \max}[1 - e^{-t_0/\tau}] \Rightarrow t_0 = \tau \ln(4) = 38.4 \text{ ms}$$

**Παράδειγμα 12.6** Στο κύκλωμα του σχ. 48 ο διακόπτης  $S_1$  είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή  $t = 0$  κλείνει. Μετά από 1.5 s ο διακόπτης  $S_2$  ανοίγει. Ποια είναι η τάση  $v(t)$  για  $t > 0$ ;



Σχήμα 48: Κύκλωμα παραδείγματος 12.6.

Εφόσον ο διακόπτης  $S_1$  ήταν ανοικτός, δεν περνούσε ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο. Επίσης, εφόσον ο πυκνωτής δρα σαν διακόπτης, στη σταθερή κατάσταση, στο συνεχές, δεν έχουμε ρεύμα και στον εξωτερικό βρόγχο. Επομένως,  $v(0) = 10 \text{ V}$ .

Την χρονική στιγμή  $t = 0$  κλείνει ο διακόπτης  $S_1$ , άρα περνάει ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο. Αλλάζει επίσης η τάση στα άκρα του πυκνωτή άρα έχουμε και εκεί ρεύμα και ο πυκνωτής φορτίζεται/εκφορτίζεται (;) Η τελική κατάσταση εδώ, με τον διακόπτη  $S_1$  κλειστό είναι

$$v(\infty) = \frac{8}{8+8} 10 = 5 \text{ V}$$

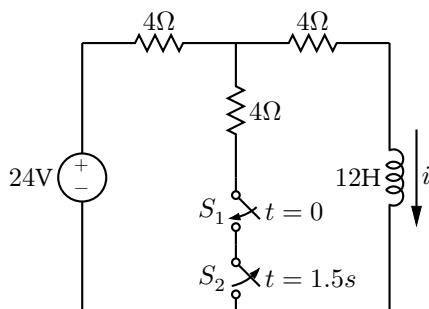
Η αντίσταση που βλέπει ο πυκνωτής είναι  $8 \parallel 8 = 4 \Omega$  άρα η σταθερά χρόνου είναι  $\tau_1 = RC = 0.2 \text{ s}$ . Η τάση για το διάστημα  $0 < t < 1.5$  είναι

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau_1} = 5 + (10 - 5)e^{-t/\tau_1} = 5 + 5e^{-5t} \text{ V}$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 1.5 \text{ s}$  ανοίγει ο διακόπτης  $S_2$ . Η τιμή της τάσης είναι  $v(1.5) = 5.003 \text{ V}$ . Όταν περάσει αρκετός χρόνος η τάση θα γίνει  $v(\infty) = 10 \text{ V}$ . Η αντίσταση που βλέπει ο πυκνωτής τώρα είναι  $8 \Omega$  άρα η σταθερά χρόνου είναι  $\tau_2 = RC = 0.4 \text{ s}$ . Η τάση για το διάστημα  $t > 1.5$  είναι

$$v(t) = v(\infty) + [v(1.5) - v(\infty)]e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 10 + (5.003 - 10)e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 10 - 4.997e^{-2.5(t-1.5)} \text{ V}$$

**Παράδειγμα 12.7** Στο κύκλωμα του σχ. 49 ο διακόπτης  $S_1$  είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή  $t = 0$  κλείνει. Μετά από 1.5 s ο διακόπτης  $S_2$  ανοίγει. Ποιο είναι το ρεύμα  $i(t)$  για  $t > 0$ ;



Σχήμα 49: Κύκλωμα παραδείγματος 12.7.

Εφόσον ο διακόπτης  $S_1$  ήταν ανοικτός, δεν περνούσε ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο. Επίσης, εφόσον το πηνίο δρα σαν βραχυκύκλωμα, στη σταθερή κατάσταση, στο συνεχές, το ρεύμα στον εξωτερικό βρόγχο είναι  $i(0) = 24/8 = 3 \text{ A}$ .

Την χρονική στιγμή  $t = 0$  κλείνει ο διακόπτης  $S_1$ , άρα περνάει ρεύμα από τον κεντρικό κλάδο και αλλάζει το ρεύμα που περνά από το πηνίο. Η τελική κατάσταση εδώ, με τον διακόπτη  $S_1$  κλειστό είναι

$$i(\infty) = \frac{8}{4} = 2 \text{ A}$$

όπου τα 8 V είναι η τάση στα άκρα του δεξιού κλάδου. Η αντίσταση που βλέπει το πηνίο είναι 6 Ω άρα η σταθερά χρόνου είναι  $\tau_1 = L/R = 2$  s. Το ρεύμα για το διάστημα  $0 < t < 1.5$  είναι

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau_1} = 2 + (3 - 2)e^{-t/\tau_1} = 2 + e^{-0.5t} \text{ A}$$

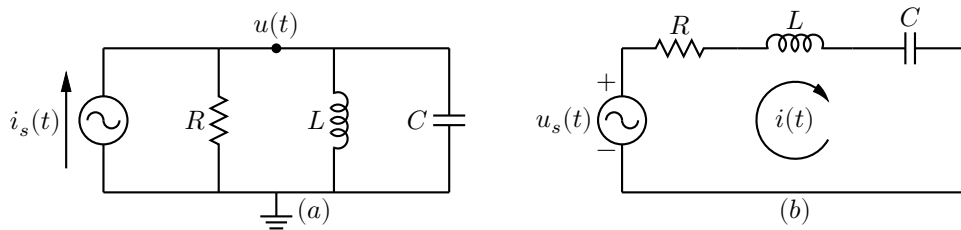
Τη χρονική στιγμή  $t = 1.5$  s ανοίγει ο διακόπτης  $S_2$ . Η τιμή του ρεύματος είναι  $i(1.5) = 2.4724$  A. Όταν περάσει αρκετός χρόνος το ρεύμα θα γίνει  $i(\infty) = 3$  A. Η αντίσταση που βλέπει το πηνίο τώρα είναι 8 Ω άρα η σταθερά χρόνου είναι  $\tau_2 = L/R = 1.5$  s. Το ρεύμα για το διάστημα  $t > 1.5$  είναι

$$i(t) = i(\infty) + [i(1.5) - i(\infty)]e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 3 + (2.4724 - 3)e^{-(t-1.5)/\tau_2} = 3 - 0.523e^{-0.667(t-1.5)} \text{ A}$$

## 13 130529

### 13.1 Συστήματα 2ας τάξης, με ένα βαθμό ελευθερίας

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας είναι τα συστήματα που μπορούν να περιγραφούν πλήρως με μια μεταβλητή (π.χ. τάση ή ρεύμα). Μια διαφορική εξίσωση αρκεί για την μαθηματική περιγραφή τους. 2ας τάξης είναι τα συστήματα με δυο στοιχεία ικανά να αποθηκεύσουν ενέργεια, δηλ. ένα πηνίο και ένα πυκνωτή, δυο πηνία ή δυο πυκνωτές. Στα παρακάτω θα δούμε την πρώτη περίπτωση, ένα πηνίο και ένα πυκνωτή σε παράλληλη ή εν σειρά συνδεσμολογία.



Σχήμα 50: Κύκλωμα 2ας τάξης RLC παράλληλο (a) και σε σειρά (b).

Στο κύκλωμα (a) για παράδειγμα, ο κανόνας Kirchhoff των ρευμάτων για τον επάνω κόμβο γίνεται

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t)dt + i_L(t_0) + C \frac{dv(t)}{dt} = i_s(t)$$

Ομοίως, για το κύκλωμα (b), ο κανόνας Kirchhoff των τάσεων για τον βρόγχο γίνεται

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t)dt + v_C(t_0) + L \frac{di(t)}{dt} = v_s(t)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παραγωγίζονται ως προς τον χρόνο για να φύγει το ολοκλήρωμα, διαιρούνται και με το συντελεστή της δευτέρας παραγώγου για να καταλήξουν αντίστοιχα

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{LC} = \frac{1}{C} \frac{di_s(t)}{dt}$$

και

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = \frac{1}{L} \frac{dv_s(t)}{dt}$$

Και οι δυο παραπάνω εξισώσεις είναι της μορφής

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (6)$$

όπου  $x(t)$  η μεταβλητή που χαρακτηρίζει το σύστημα (τάση ή ρεύμα),  $\alpha$ , ο συντελεστής απόσβεσης,  $\omega_0$ , η φυσική συχνότητα του συστήματος και  $f(t)$ , η εξωτερική διέγερση. Η φυσική συχνότητα και για τις δυο δομές είναι

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

γνωστή από το συντονισμό, ενώ ο συντελεστής απόσβεσης είναι

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$



για την παράλληλο και εν σειρά δομή αντίστοιχα.

Η πλήρης λύση της εξίσωσης 6 είναι το άθροισμα της λύσης για το ομογενές πρόβλημα,  $x_H(t)$ , όπου  $f(t) = 0$  και της μερικής λύσης,  $x_P(t)$ , όπου  $f(t) \neq 0$ .

### 13.1.1 Ομογενές πρόβλημα

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Δεχόμαστε λύση της μορφής  $Ae^{st}$  και έχουμε

$$Ae^{st}(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

εφόσον  $A \neq 0$ . Η χαρακτηριστική εξίσωση:  $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$ , έχει ρίζες:  $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ .

Όταν  $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$ , οι ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους και η λύση είναι της μορφής

$$x_H(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Όταν  $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$ , έχουμε διπλή, πραγματική ρίζα  $s_{1,2} = -\alpha$ , και η λύση είναι της μορφής

$$x_H(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

Όταν  $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ , έχουμε δυο μιγαδικές συζυγείς ρίζες και η λύση είναι της μορφής

$$x_H(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] \quad \text{όπου} \quad \omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

Και στις τρεις περιπτώσεις οι σταθερές  $A_1, A_2$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

**Παράδειγμα 13.1** Να βρεθεί η λύση του ομογενούς προβλήματος, για  $t > 0$ , για την παράλληλη δομή RLC, όταν  $R = 2/3 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1/2 \text{ F}$  και οι αρχικές συνθήκες είναι  $v(0) = 10 \text{ V}$ ,  $i_L(0) = 2 \text{ A}$ .

Έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 1.5 \Rightarrow \alpha^2 = 2.25 \quad \text{και} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2$$

Οπότε εφόσον  $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0.25 > 0$  έχουμε ισχυρή απόσβεση με δυο ρίζες πραγματικές:  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$ . Η λύση επομένως του ομογενούς προβλήματος για την τάση είναι

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

Μια από τις αρχικές συνθήκες είναι  $i_L(0) = 2$ . Η σχέση μεταξύ των  $i_L(t)$  και  $v(t)$  είναι  $v(t) = L di_L(t)/dt$ . Οπότε

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \int (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}) dt = -A_1 e^{-t} - \frac{A_2}{2} e^{-2t}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποφύγουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C \frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow i_L(t) = A_1 e^{-t} \left( C - \frac{1}{R} \right) + A_2 e^{-2t} \left( 2C - \frac{1}{R} \right) = -A_1 e^{-t} - \frac{A_2}{2} e^{-2t}$$

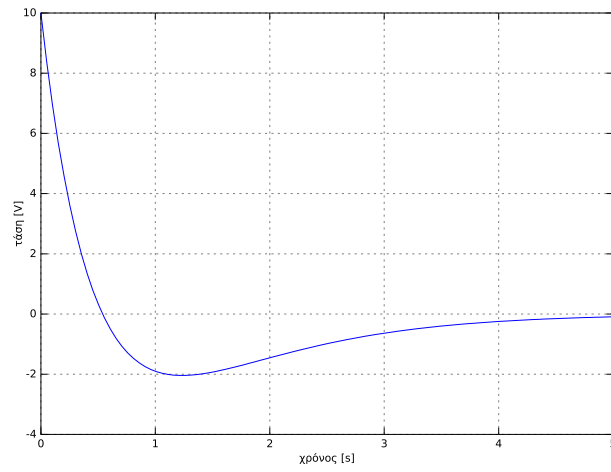
με ίδιο αποτέλεσμα. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = A_1 + A_2 \\ i_L(0) = -A_1 - A_2/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 = A_1 + A_2 \\ 2 = -A_1 - A_2/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 = A_1 + A_2 \\ 12 = A_2/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A_1 = -14 \\ A_2 = 24 \end{array} \right\}$$

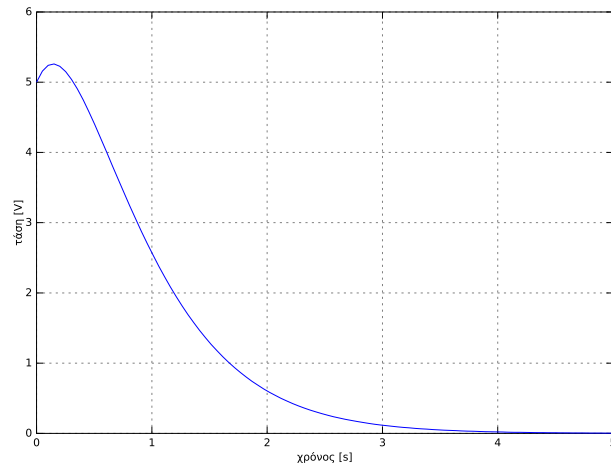
και η λύση είναι

$$v(t) = -14e^{-t} + 24e^{-2t} \text{ V}$$

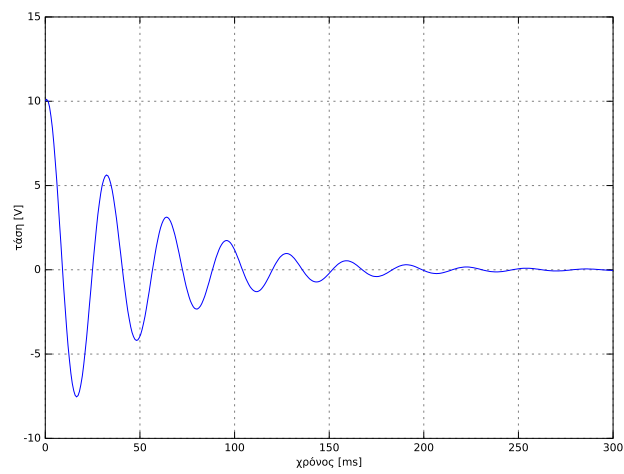
**Παράδειγμα 13.2** Να βρεθεί η λύση του ομογενούς προβλήματος, για  $t > 0$ , για την παράλληλη δομή RLC, όταν  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1/4 \text{ F}$  και οι αρχικές συνθήκες είναι  $v(0) = 5 \text{ V}$ ,  $i_L(0) = -6 \text{ A}$ .



Σχήμα 51: Απόκριση του κυκλώματος 13.1.



Σχήμα 52: Απόκριση του κυκλώματος 13.2.



Σχήμα 53: Απόκριση του κυκλώματος 13.3.

Έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \quad \text{και} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 4$$

Οπότε εφόσον  $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$  έχουμε κρίσιμη απόσβεση με μια διπλή ρίζα:  $s_1 = -2$ . Η λύση επομένως του ομογενούς προβλήματος για την τάση είναι

$$v(t) = e^{-2t}(A_1 t + A_2)$$

Μια από τις αρχικές συνθήκες είναι  $i_L(0) = -6$ . Η σχέση μεταξύ των  $i_L(t)$  και  $v(t)$  είναι  $v(t) = L di_L(t)/dt$ . Οπότε

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \int (A_1 t + A_2) e^{-2t} dt = \dots = -\left(\frac{2t+1}{4} A_1 + \frac{1}{2} A_2\right) e^{-2t}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποφύγουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C \frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow i_L(t) = \dots = -\left(\frac{2t+1}{4} A_1 + \frac{1}{2} A_2\right) e^{-2t}$$

με ίδιο αποτέλεσμα. Οπότε

$$\left. \begin{aligned} v(0) &= A_2 \\ i_L(0) &= -A_1/4 - A_2/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= 14 \\ A_2 &= 5 \end{aligned}$$

και η λύση είναι

$$v(t) = e^{-2t}(14t + 5) \text{ V}$$

**Παράδειγμα 13.3** Να βρεθεί η λύση του ομογενούς προβλήματος, για  $t > 0$ , για την παράλληλη δομή RLC, όταν  $R = 9 \Omega$ ,  $L = 8.4 \text{ mH}$ ,  $C = 3 \text{ mF}$  και οι αρχικές συνθήκες είναι  $v(0) = 10 \text{ V}$ ,  $i_L(0) = -2 \text{ A}$ .

Έχουμε

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 18.52 \Rightarrow \alpha^2 = 342.9 \quad \text{και} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 39683$$

Οπότε εφόσον  $\alpha^2 - \omega_0^2 = -39340 < 0$  έχουμε δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες. Μας ενδιαφέρει η συχνότητα απόσβεσης  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 198.3 \text{ rad/s}$  και η λύση του ομογενούς προβλήματος για την τάση είναι

$$v(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

Μια από τις αρχικές συνθήκες είναι  $i_L(0) = -2$ . Χρησιμοποιώντας τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\begin{aligned} \frac{v(t)}{R} + i_L(t) + C \frac{dv(t)}{dt} = 0 &\Rightarrow i_L(t) = -\frac{v(t)}{R} - C \frac{dv(t)}{dt} \\ &= -\frac{e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]}{R} - C e^{-\alpha t} [(-\alpha A_1 + \omega_d A_2) \cos(\omega_d t) - (\alpha A_2 + \omega_d A_1) \sin(\omega_d t)] \end{aligned}$$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} v(0) &= 10 = A_1 \\ i_L(0) &= -2 = \left(C\alpha - \frac{1}{R}\right) A_1 - C\omega_d A_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= 10 \\ A_2 &= 2.43 \end{aligned}$$

και η λύση είναι

$$v(t) = e^{-18.52t} [10 \cos(198.3t) + 2.43 \sin(198.3t)] \text{ V}$$

### 13.1.2 Μη ομογενές πρόβλημα

Στο μη ομογενές πρόβλημα δοκιμάζουμε λύση ίδιας μορφής με τη διέγερση. Π.χ. αν  $v_s(t) = V_0 \cos(\omega_s t)$  δοκιμάζουμε λύση της μορφής  $v_P(t) = B_1 \cos(\omega_s t) + B_2 \sin(\omega_s t)$ , προσδιορίζουμε τους συντελεστές και προσθέτουμε την  $v_P(t)$  στην  $v_H(t)$  για να έχουμε την ολική λύση. Η διαδικασία είναι επίπονη γιατί έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που την κάνουν πιο απλή. Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στον μετασχηματισμό Laplace που μετατρέπει διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές σε απλές αλγεβρικές λαμβάνοντας αυτόματα υπόψη τις αρχικές συνθήκες.

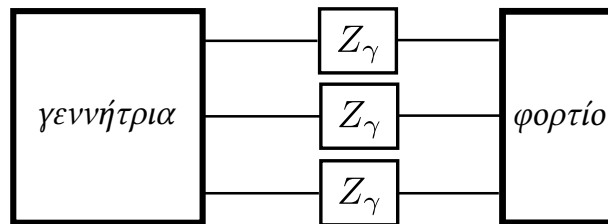
14.1 Τριφασικά συστήματα

Εδώ μελετούμε τριφασικά κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος, δηλ. κυκλώματα που περιέχουν τρεις πηγές τάσης με διαφορά φάσης  $120^\circ$  μεταξύ τους. Χρησιμοποιούνται ευρέως στα δίκτυα μεταφοράς, διανομής και κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας λόγω των πλεονεκτημάτων που παρουσιάζουν:

1. Οι απώλειες στις γραμμές μεταφοράς είναι μικρότερη για τριφασικά ρεύματα με αποτέλεσμα η απαιτούμενη διατομή των αγωγών να είναι μικρότερη από ότι σε αντίστοιχα μονοφασικά (εξοικονόμηση υλικού).
2. Στα τριφασικά η στιγμιαία ισχύς είναι σταθερή και ίση με τη μέση ισχύ εν αντιθέσει με τα μονοφασικά όπου η στιγμιαία ισχύς μεταβάλλεται συνεχώς (αποτελείται από μια σταθερά συνιστώσα και μια ημιτονοειδή διπλάσιας συχνότητας από τη συχνότητα του εναλλασσομένου). Στους ηλεκτρικούς κινητήρες (μηχανές/ γεννήτριες) η τριφασική τροφοδοσία έχει σαν αποτέλεσμα σταθερή ροπή στα περιστρεφόμενα μέρη του κινητήρα με λιγότερες καταπονήσεις και κραδασμούς που σημαίνει απλούστερη και οικονομικότερη κατασκευή τέτοιων συστημάτων.
3. Ο βαθμός απόδοσης στους τριφασικούς κινητήρες είναι ψηλότερος από ότι στους αντίστοιχους μονοφασικούς με καλύτερα χαρακτηριστικά λειτουργίας.

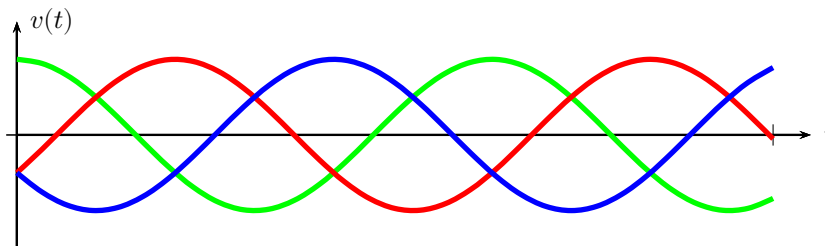
Τα παραπάνω ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε συμμετρικά ή ισορροπημένα (balanced) τριφασικά συστήματα, γεγονός που επιβάλλει περιορισμούς στα φορτία αυτών των συστημάτων.

Ένα τριφασικό σύστημα αποτελείται από τη γεννήτρια, τις γραμμές μεταφοράς και το φορτίο (σχ. 54). Η γεννήτρια παράγει ηλεκτρική ενέργεια μετατρέποντας άλλες μορφές ενέργειας όπως μηχανική ή θερμική σε ηλεκτρική (καύση άνθρακα, υδατοπτώσεις, πυρηνικά εργοστάσια, φωτοβολταϊκά, κλπ). Τα φορτία συμπεριλαμβάνουν όλες τις ηλεκτρικές συσκευές και μηχανήματα που τροφοδοτούνται από το δίκτυο. Οι γραμμές μεταφοράς είναι οι αγωγοί που συνδέουν τη γεννήτρια με τα φορτία. Εμφανίζουν μια σύνθετη αντίσταση  $Z_\gamma$  που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του αγωγού καθώς και τη συχνότητα του ρεύματος. Σε πραγματικό σύστημα υπάρχουν και πολλά ενδιάμεσα υποσυστήματα, συνήθως μετασχηματιστές υποβιβασμού/ανύψωσης τάσης καθώς και διακλαδώσεις.



Σχήμα 54: Ένα τριφασικό σύστημα αποτελείται από τη γεννήτρια, τις γραμμές μεταφοράς και το φορτίο.

Στο σχ. 55 παρατηρούμε τις κυματομορφές τριών τάσεων με ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης  $120^\circ$  μεταξύ τους,



Σχήμα 55: Τρεις τάσεις με ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης  $120^\circ$  μεταξύ τους.

Οι κυματομορφές που χρησιμοποιήθηκαν στο σχήμα είναι:

$$v_1(t) = V \cos(\omega t)$$

$$v_2(t) = V \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$v_3(t) = V \cos(\omega t - 240^\circ) = V \cos(\omega t + 120^\circ)$$

ή, σε μορφή φάσορα/παραστατικού μιγάδα

$$\dot{V}_1 = V \angle 0^\circ \quad \dot{V}_2 = V \angle -120^\circ \quad \dot{V}_3 = V \angle -240^\circ = V \angle 120^\circ$$

Η διαδοχή αυτή των φάσεων είναι γνωστή σαν *θετική ή ορθή διαδοχή φάσεων*

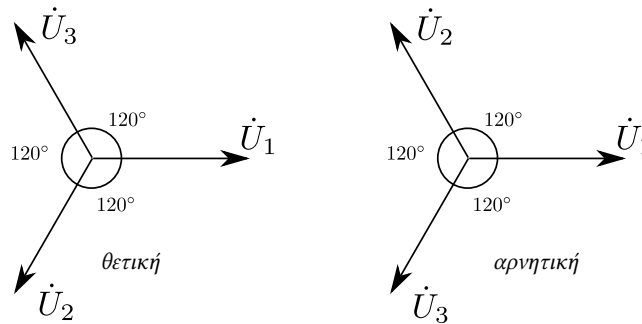
$$(0^\circ, -120^\circ, 120^\circ) \quad \text{ή} \quad (120^\circ, 0^\circ, -120^\circ) \quad \text{ή} \quad (-120^\circ, 120^\circ, 0^\circ)$$

επειδή στο διανυσματικό διάγραμμα τάσεων (σχ. 56) η σειρά των διανυσμάτων τάσης  $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$  έχει δεξιόστροφη φορά.

Φυσικά, υπάρχει και η *αρνητική ή ανάστροφη διαδοχή φάσεων*

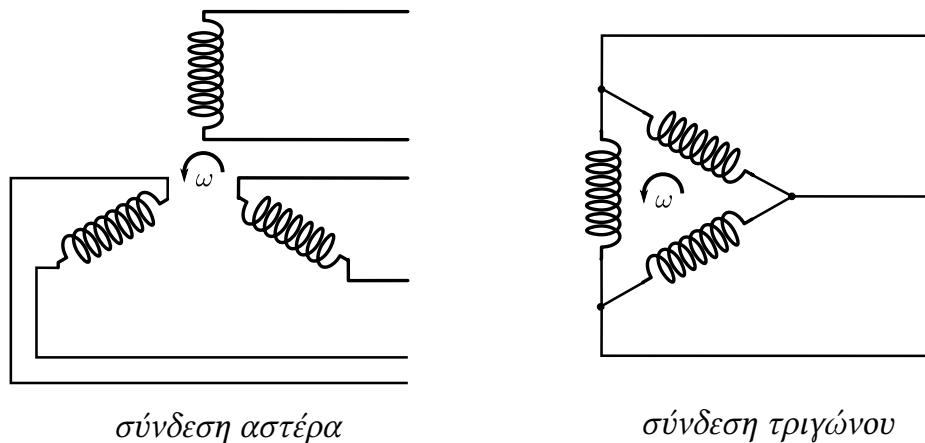
$$(0^\circ, 120^\circ, -120^\circ) \quad \text{ή} \quad (-120^\circ, 0^\circ, 120^\circ) \quad \text{ή} \quad (120^\circ, -120^\circ, 0^\circ)$$

επειδή στο διανυσματικό διάγραμμα τάσεων (σχ. 56) η σειρά των διανυσμάτων τάσης  $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$  έχει αριστερόστροφη φορά.



Σχήμα 56: Διάγραμμα τάσεων σε ορθή (ή θετική) και ανάστροφη (ή αρνητική) διαδοχή.

Τριφασικές κυματομορφές τάσεων παράγονται π.χ. από γεννήτριες εναλλασσομένου ρεύματος που αποτελούνται από 3 πηνία τοποθετημένα σε γωνία  $120^\circ$  μεταξύ τους. Ένας περιστρεφόμενος μαγνήτης στο κέντρο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και επάγει τάσεις στα πηνία που έχουν ίδιο μέτρο (αν τα πηνία είναι ίδια) και διαφορά φάσης  $120^\circ$  μεταξύ τους (σχ. 57). Οι περιελίξεις των πηνίων μπορεί να είναι σε συνδεσμολογία αστέρα ή τριγώνου.



Σχήμα 57: Αρχή τριφασικής γεννήτριας. Περιστρεφόμενος μαγνήτης επάγει ίσου μέτρου τάσεις στα πηνία με διαφορά φάσης  $120^\circ$ .

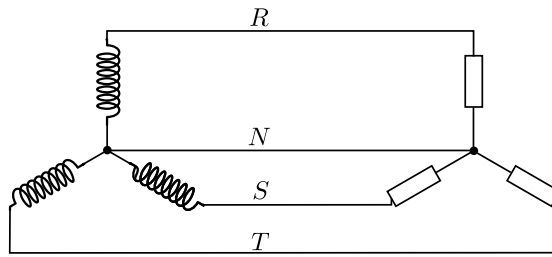
Στη συνδεσμολογία αστέρα ( $\Upsilon$ ), αν σε κάθε πηνίο συνδέσουμε στα άκρα του κάποιο φορτίο, έχουμε τρία κυκλώματα, ανεξάρτητα μεταξύ τους και ένα σύνολο 6 αγωγών που συνδέουν τις πηγές με τα φορτία. Στο παραπάνω σύστημα μπορούμε να ενώσουμε τα πηνία στο κέντρο (ουδέτερος κόμβος – σύμβολο  $N$ ) και να εξοικονομήσουμε αριθμό αγωγών από 6 σε 4 (σχ. 58).

Στη συνδεσμολογία τριγώνου ( $\Delta$ ) έχουμε εξαρχής μόνο τρεις εξωτερικούς αγωγούς (σχ. 59). Και στις δυο συνδεσμολογίες συνηθίζεται να ονομάζουμε τους αγωγούς R, S, T. Συνδεσμολογία αστέρα ή τριγώνου έχουμε και με τα φορτία επομένως οι δυνατές παραλλαγές συνδεσμολογία πηγής – φορτίου είναι: ( $\Upsilon$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Upsilon$ ), ( $\Upsilon$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Delta$ ), ( $\Delta$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Upsilon$ ), ( $\Delta$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Delta$ ).

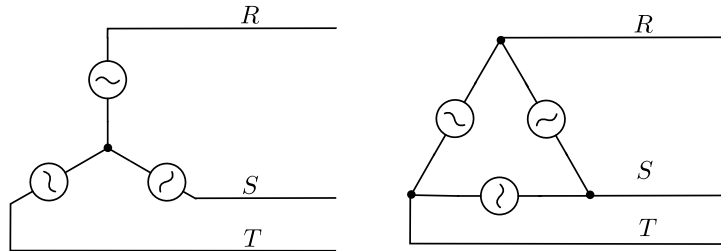
Μερικοί ορισμοί:

**Φασική τάση:** η τάση μεταξύ κάθε αγωγού της γραμμής και του ουδέτερου αγωγού. Όταν δεν υπάρχει ουδέτερος αγωγός, φασική τάση είναι η τάση μεταξύ κάθε αγωγού της γραμμής και του ουδέτερου κόμβου.

**Φασικό ρεύμα:** το ρεύμα που διαρρέει τις περιελίξεις της κάθε φάσης, δηλ. την κάθε πηγή της γεννήτριας.



Σχήμα 58: Σύνδεση τριφασικής πηγής και φορτίου σε αστέρα.



Σχήμα 59: Συνδεσμολογία πηγής σε αστέρα και τρίγωνο όπου τα πηνία έχουν αντικατασταθεί με πηγές. Σε πιο λεπτομερή μοντέλα μπορούμε να δούμε επίσης και τις εσωτερικές εμπεδησεις των πηγών. Οι εξωτερικοί ακροδέκτες των πηνίων/πηγών είναι οι πόλοι της γεννήτριας. Στη σύνδεση αστέρα έχουμε πρόσβαση και στον ουδέτερο κόμβο.

**Πολική τάση:** η τάση μεταξύ δυο αγωγών της γραμμής εξαιρουμένου του ουδετέρου.

**Ρεύμα γραμμής ή πολικό ρεύμα:** το ρεύμα που βγαίνει από τους πόλους (R, S, T κόμβους της γεννήτριας) και διαρρέει τους αγωγούς της γραμμής.

Προσέξτε στις παραπάνω τάσεις ότι τα σύμβολα R,S,T πάνε κυκλικά.

Αν δεν παρέχεται άλλη πληροφορία, για ορθή διαδοχή φάσεων δεχόμαστε ότι οι φασικές τάσεις είναι:

$$\dot{V}_{RN} = V \angle 90^\circ \quad \dot{V}_{SN} = V \angle -30^\circ \quad \dot{V}_{TN} = V \angle -150^\circ$$

ενώ οι πολικές τάσεις:

$$\dot{V}_{RS} = V' \angle 120^\circ \quad \dot{V}_{ST} = V' \angle 0^\circ \quad \dot{V}_{TR} = V' \angle -120^\circ$$

Αντίστοιχα, για ανάστροφη διαδοχή, οι φασικές τάσεις είναι:

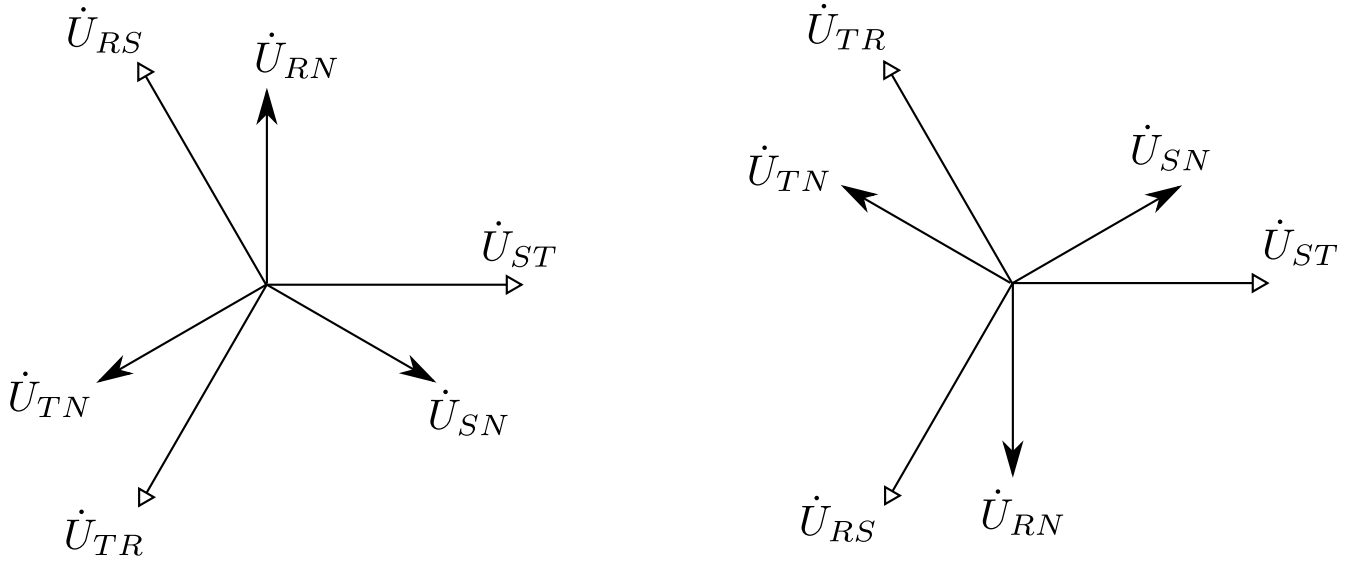
$$\dot{V}_{RN} = V \angle 90^\circ \quad \dot{V}_{SN} = V \angle -150^\circ \quad \dot{V}_{TN} = V \angle -30^\circ$$

ενώ οι πολικές τάσεις:

$$\dot{V}_{RS} = V' \angle 60^\circ \quad \dot{V}_{ST} = V' \angle 180^\circ \quad \dot{V}_{TR} = V' \angle -60^\circ$$

Το διάγραμμα του σχ. 60 δείχνει παραστατικά το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και για τις δυο φορές (ορθή και ανάστροφη). Φυσικά, το διάγραμμα φάσεων μπορεί να περιστραφεί κατά οποιαδήποτε γωνία  $\theta$  χωρίς να αλλάξει η σχέση μεταξύ των τριών τάσεων.

Δοθείσης μιας τριφασικής τάσης είτε φασικής είτε πολικής μπορούμε να βρούμε τις άλλες τάσεις της κατηγορίας (φασικές ή πολικές) ως εξής: Για ορθή φορά περιστρέφουμε αρχικά την τάση δεξιά κατά  $120^\circ$  και επανερχόμενοι, αριστερά κατά  $120^\circ$ . Για ανάστροφη φορά περιστρέφουμε αρχικά την τάση αριστερά κατά  $120^\circ$  και επανερχόμενοι, δεξιά κατά  $120^\circ$ .



Σχήμα 60: Διάγραμμα φασικών και πολικών τάσεων σε ορθή (αριστερά) και ανάστροφη (δεξιά) διαδοχή φάσεων.

Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα των 3 φασικών τάσεων σε συμμετρικό σύστημα (Y) ↔ (Y) είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{RN} + \dot{V}_{SN} + \dot{V}_{TN} &= V(e^{j90^\circ} + e^{-j30^\circ} + e^{-j150^\circ}) = \\ V[\cos(90^\circ) + j \sin(90^\circ) + \cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ) + \cos(-150^\circ) + j \sin(-150^\circ)] &= 0 \end{aligned}$$

Εφόσον το σύστημα είναι συμμετρικό έχουμε φορτία ίσα, έστω  $Z$ , άρα και το ρεύμα στον ουδέτερο είναι:

$$\dot{I}_N = (\dot{V}_{RN} + \dot{V}_{SN} + \dot{V}_{TN})/Z = 0$$

Οι σχέσεις μεταξύ φασικών και πολικών τάσεων για ορθή διαδοχή είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{RS} &= \dot{V}_{RN} - \dot{V}_{SN} = V(e^{j90^\circ} - e^{-j30^\circ}) = \\ &= V(\cos(90^\circ) + j \sin(90^\circ) - \cos(-30^\circ) - j \sin(-30^\circ)) = \\ V\left(0 + j - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) &= V\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}\right) = V\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = V\sqrt{3} \underline{/120^\circ} \\ \dot{V}_{ST} &= \dot{V}_{SN} - \dot{V}_{TN} = V(e^{-j30^\circ} - e^{-j150^\circ}) = \dots = V\sqrt{3} \underline{/0^\circ} \\ \dot{V}_{TR} &= \dot{V}_{TN} - \dot{V}_{RN} = V(e^{-j150^\circ} - e^{j90^\circ}) = \dots = V\sqrt{3} \underline{-120^\circ} = V\sqrt{3} \underline{/240^\circ} \end{aligned}$$

Με αντίστοιχο τρόπο βγαίνουν οι σχέσεις και για ανάστροφη διαδοχή.

Όπως παρατηρούμε από το διάγραμμα τάσεων για ορθή διαδοχή, αρκεί μια αριστερόστροφη περιστροφή κατά  $30^\circ$  για να συμπέσουν οι φασικές με τις πολικές τάσεις, δηλ.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{RS} &= \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} \\ \dot{V}_{ST} &= \dot{V}_{SN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} = \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \underline{-90^\circ} \\ \dot{V}_{TR} &= \dot{V}_{TN} \sqrt{3} \underline{/30^\circ} = \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \underline{/150^\circ} \end{aligned}$$

Για ανάστροφη διαδοχή η περιστροφή είναι δεξιόστροφη, άρα:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{RS} &= \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \underline{-30^\circ} \\ \dot{V}_{ST} &= \dot{V}_{SN} \sqrt{3} \underline{-30^\circ} = \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \underline{-180^\circ} \\ \dot{V}_{TR} &= \dot{V}_{TN} \sqrt{3} \underline{-30^\circ} = \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \underline{-60^\circ} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 14.1** Έστω σύστημα ορθής διαδοχής με  $\dot{V}_{SN} = 220 \angle 10^\circ$  V. Ποιες είναι οι άλλες φασικές καθώς και οι πολικές τάσεις του συστήματος;

Εφόσον έχουμε ορθή διαδοχή περιστρέφουμε αρχικά την τάση δεξιά κατά  $120^\circ$  και επανερχόμενοι, αριστερά κατά  $120^\circ$ .

$$\begin{aligned}\dot{V}_{TN} &= \dot{V}_{SN} \angle -120^\circ = 220 \angle -110^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{RN} &= \dot{V}_{SN} \angle 120^\circ = 220 \angle 130^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{RS} &= \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 220\sqrt{3} \angle 160^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{ST} &= \dot{V}_{RS} \angle -120^\circ = 220\sqrt{3} \angle 40^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{TR} &= \dot{V}_{RS} \angle 120^\circ = 220\sqrt{3} \angle 280^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 14.2** Έστω σύστημα αρνητικής διαδοχής με  $\dot{V}_{ST} = 410 \angle -108^\circ$  V. Ποιες είναι οι άλλες πολικές καθώς και οι φασικές τάσεις του συστήματος;

Εφόσον έχουμε αρνητική διαδοχή περιστρέφουμε αρχικά την τάση αριστερά κατά  $120^\circ$  και επανερχόμενοι, δεξιά κατά  $120^\circ$ .

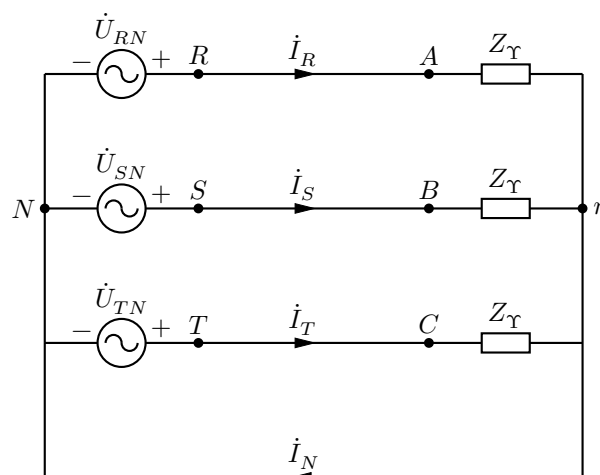
$$\begin{aligned}\dot{V}_{TR} &= \dot{V}_{ST} \angle 120^\circ = 410 \angle 12^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{RS} &= \dot{V}_{ST} \angle -120^\circ = 410 \angle -228^\circ = 410 \angle 132^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση προσθέσαμε  $360^\circ$  για να είναι το αποτέλεσμα μέσα στο διάστημα  $[-180^\circ, 180^\circ]$ . Το βήμα αυτό είναι προαιρετικό. Χρησιμοποιώντας πάλι το διάγραμμα τάσεων:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{RN} &= (\dot{V}_{RS}/\sqrt{3}) \angle 30^\circ = 236.7 \angle 162^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{SN} &= \dot{V}_{RN} \angle 120^\circ = 236.7 \angle 282^\circ = 236.7 \angle -78^\circ \text{ V} \\ \dot{V}_{TN} &= \dot{V}_{RN} \angle -120^\circ = 236.7 \angle 42^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

## 15 130605

### 15.1 Συμμετρική σύνδεση (Υ) ↔ (Υ)



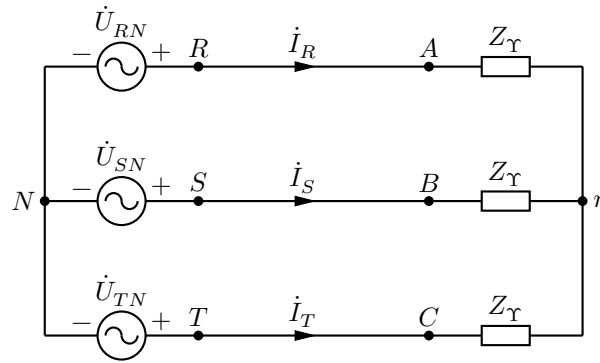
**Σχήμα 61:** Συμμετρική σύνδεση τριφασικής πηγής και φορτίου (Υ) ↔ (Υ) όπου έχει συμπεριληφθεί ο τέταρτος αγωγός.

Στο σχ. 61 βλέπουμε τη συμμετρική τριφασική σύνδεση (Υ) ↔ (Υ) όπου έχει συμπεριληφθεί ο τέταρτος αγωγός. Για συμμετρικό σύστημα μπορεί να παραληφθεί οπότε θα έχουμε το σχ. 62.

Οι φασικές τάσεις με θετική διαδοχή φάσεων είναι

$$\dot{V}_{RN} = V_Y \angle 90^\circ \quad \dot{V}_{SN} = V_Y \angle -30^\circ \quad \dot{V}_{TN} = V_Y \angle -150^\circ$$





Σχήμα 62: Συμμετρική σύνδεση τριφασικής πηγής και φορτίου (Y) ↔ (Y) με τρεις αγωγούς.

όπου  $V_Y$  το κοινό μέτρο της φασικής τάσης.

Οι αντίστοιχες πολικές τάσεις, ή τάσεις μεταξύ γραμμών μεταφοράς, είναι

$$\dot{V}_{RS} = V_Y \sqrt{3} / 120^\circ \quad \dot{V}_{ST} = V_Y \sqrt{3} / 0^\circ \quad \dot{V}_{TR} = V_Y \sqrt{3} / -120^\circ$$

όπου  $V_Y \sqrt{3}$  το κοινό μέτρο της πολικής τάσης ή τάσης γραμμής. Σε αυτή τη συνδεσμολογία τα φασικά ρεύματα που διέρχονται από τις πηγές και τα φορτία είναι ίδια με τα πολικά ρεύματα ή ρεύματα γραμμής.

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_{RN}}{Z_Y} = \frac{V_Y / 90^\circ}{Z_Y} \quad \dot{I}_S = \frac{\dot{V}_{SN}}{Z_Y} = \frac{V_Y / -30^\circ}{Z_Y} \quad \dot{I}_T = \frac{\dot{V}_{TN}}{Z_Y} = \frac{V_Y / -150^\circ}{Z_Y}$$

$$\dot{I}_N = 0$$

Εάν μάλιστα  $Z_Y = |Z_Y| \angle \theta$  και  $I_Y = V_Y / |Z_Y|$ , όπου  $I_Y$  το μέτρο του ρεύματος γραμμής, τότε

$$\dot{I}_R = I_Y \angle -\theta + 90^\circ \quad \dot{I}_S = I_Y \angle -\theta - 30^\circ \quad \dot{I}_T = I_Y \angle -\theta - 150^\circ$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία φάσεων των ρευμάτων είναι ίδια με την ακολουθία φάσεων των πηγών μετατοπισμένη απλώς με την γωνία της εμπέδησης του φορτίου κατανάλωσης.

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$\dot{S} = 3 |\dot{I}_R|^2 Z_Y$$

Η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$P = 3 |\dot{I}_R|^2 \Re\{Z_Y\}$$

Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$\dot{S} = \dot{V}_{RN} \dot{I}_R^* + \dot{V}_{SN} \dot{I}_S^* + \dot{V}_{TN} \dot{I}_T^* = \dot{V}_{RN} \dot{I}_R^* + \dot{V}_{RN} \angle -120^\circ \dot{I}_R^* \angle 120^\circ + \dot{V}_{RN} \angle 120^\circ \dot{I}_R^* \angle -120^\circ = 3 \dot{V}_{RN} \dot{I}_R^*$$

Το συμμετρικό σύστημα είναι πολύ απλό στην ανάλυση γιατί βασικά αναλύουμε τη μια φάση μόνο και κατόπιν, από τις γνωστές σχέσεις, υπολογίζουμε όλα τα μεγέθη για όλες τις υπόλοιπες φάσεις. Στον ουδέτερο αγωγό, εφόσον  $\dot{I}_N = 0$ , μπορεί να υπάρχει μια οποιαδήποτε εμπέδηση και να μην αλλάζει τίποτα στην ανάλυσή μας.

**Παράδειγμα 15.1** Τριφασική πηγή με θετική διαδοχή φάσεων συνδέεται συμμετρικά σε συνδεσμολογία αστέρα με τάση γραμμής  $\dot{V}_{RS} = 381 \angle -30^\circ$ . Ποιες είναι οι φασικές τάσεις;

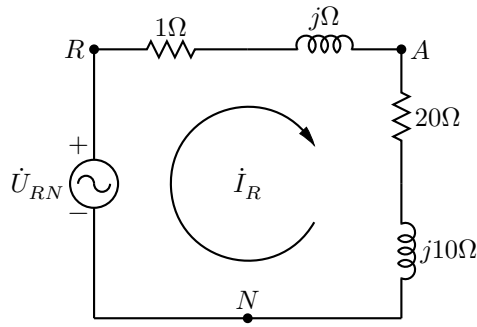
Η τάση γραμμής που δίνεται είναι μια από τις πολικές τάσεις. Άρα το μέτρο της φασικής τάσης είναι  $V_\phi = 381 / \sqrt{3} = 220$  V. Έχουμε κατόπιν

$$\dot{V}_{RN} = \dot{V}_{RS} \angle -30^\circ = V_\phi \angle -60^\circ$$

$$\dot{V}_{SN} = \dot{V}_{RN} \angle -120^\circ = V_\phi \angle -180^\circ$$

$$\dot{V}_{TN} = \dot{V}_{RN} \angle 120^\circ = V_\phi \angle 60^\circ$$

**Παράδειγμα 15.2** Τριφασική πηγή με θετική διαδοχή φάσεων συνδέεται συμμετρικά με συνδεσμολογία αστέρα σε τριφασικό φορτίο  $Z_Y = 20 + j10 \Omega$ . Η κάθε γραμμή μεταφοράς έχει εμπέδηση  $Z_\gamma = 1 + j \Omega$  και το μέτρο της φασικής τάσης είναι 120 V. Ποιά είναι τα ρεύματα γραμμής και οι τάσεις στα φορτία;



Σχήμα 63: Μονοφασικό κύκλωμα για την πρώτη φάση στο παρ. 15.2.

Οι φασικές τάσεις με θετική διαδοχή φάσεων είναι

$$\dot{V}_{RN} = 120/90^\circ \quad \dot{V}_{SN} = 120/-30^\circ \quad \dot{V}_{TN} = 120/-150^\circ \text{ V}$$

Από το κύκλωμα μιας φάσης στο σχήμα 63 έχουμε

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_{RN}}{Z_\gamma + Z_T} = \frac{120 \angle 90^\circ}{21 + j11} = 5.06 \angle 62.35^\circ \text{ A}$$

Η τάση στο φορτίο είναι

$$\dot{V}_{AN} = \dot{I}_R \cdot Z_T = 5.06 \angle 62.35^\circ \cdot (20 + j10) = 113.19 \angle 88.92^\circ \text{ V}$$

Τα αντίστοιχα ρεύματα και τάσεις για τις άλλες φάσεις είναι

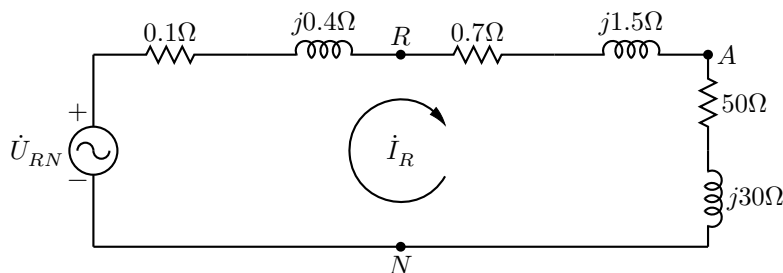
$$\dot{I}_S = \dot{I}_R \angle -120^\circ = 5.06 \angle -57.65^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_T = \dot{I}_R \angle 120^\circ = 5.06 \angle 182.35^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_{BN} = \dot{V}_{AN} \angle -120^\circ = 113.19 \angle -31.08^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CN} = \dot{V}_{AN} \angle 120^\circ = 113.19 \angle 208.92^\circ \text{ V}$$

**Παράδειγμα 15.3** Συμμετρική τριφασική γεννήτρια, θετικής διαδοχής φάσεων, σε σύνδεση αστέρα, έχει εσωτερική εμπέδηση  $0.1 + j0.4 \Omega$  ανά φάση και φασική τάση  $\dot{V}_{RN} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ . Η γεννήτρια τροφοδοτεί συμμετρικό φορτίο εμπέδησης  $50 + j30 \Omega$  ανά φάση, σε σύνδεση αστέρα. Η γραμμή μεταφοράς έχει εμπέδηση  $0.7 + j1.5 \Omega$  ανά φάση. Να υπολογιστούν:

1. Τα ρεύματα γραμμής.
2. Οι φασικές τάσεις στο φορτίο.
3. Οι πολικές τάσεις στο φορτίο.
4. Οι φασικές τάσεις στην έξοδο της γεννήτριας.
5. Οι πολικές τάσεις στην έξοδο της γεννήτριας.
6. Η μιγαδική ισχύ που καταναλώνεται στο φορτίο, στη γραμμή μεταφοράς και εσωτερικά στη γεννήτρια καθώς επίσης και η συνολική μιγαδική ισχύς που παράγεται από τη γεννήτρια.



Σχήμα 64: Μονοφασικό κύκλωμα για την πρώτη φάση στο παρ. 15.3.

Εφόσον το σύστημα είναι συμμετρικό αρκεί να εξετάσουμε το κύκλωμα μιας φάσης, της  $R$ . Το ρεύμα γραμμής υπολογίζεται από το σχήμα 64:

$$\dot{I}_R = \frac{220 \angle 0^\circ}{0.1 + 0.7 + 50 + j(0.4 + 1.5 + 30)} = 3.668 \angle -32.13^\circ \text{ A}$$

Για τις υπόλοιπες φάσεις και εφόσον η διαδοχή φάσεων είναι θετική

$$\dot{I}_S = \dot{I}_R \angle -120^\circ = 3.668 \angle -152.13^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_T = \dot{I}_R \angle 120^\circ = 3.668 \angle 87.87^\circ \text{ A}$$

Η φασική τάση στον ακροδέκτη  $A$  του φορτίου είναι

$$\dot{V}_{AN} = (50 + j30)\dot{I}_R = (58.31 \angle 30.96^\circ)(3.668 \angle -32.13^\circ) = 213.85 \angle -1.17^\circ \text{ V}$$

και στους αντίστοιχους ακροδέκτες  $B, C$  στα υπόλοιπα φασικά φορτία

$$\dot{V}_{BN} = \dot{V}_{AN} \angle -120^\circ = 213.85 \angle -121.17^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CN} = \dot{V}_{AN} \angle 120^\circ = 213.85 \angle 118.83^\circ \text{ V}$$

Οι πολικές τάσεις στο φορτίο (υποτίθεται ότι το έχουμε μετασχηματίσει σε τρίγωνο) είναι

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 370.41 \angle 28.83^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{AB} \angle -120^\circ = 370.41 \angle -91.17^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{AB} \angle 120^\circ = 370.41 \angle 148.83^\circ \text{ V}$$

Οι φασικές τάσεις στην έξοδο της γεννήτριας είναι

$$\dot{V}_{RN} = 220 - \dot{I}_R(0.1 + j0.4) = 218.91 \angle -0.27^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{SN} = \dot{V}_{RN} \angle -120^\circ = 218.91 \angle -120.27^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{TN} = \dot{V}_{RN} \angle 120^\circ = 218.91 \angle 119.73^\circ \text{ V}$$

Οι πολικές τάσεις στην έξοδο της γεννήτριας είναι

$$\dot{V}_{RS} = \dot{V}_{RN} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 379.17 \angle 29.73^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{ST} = \dot{V}_{RS} \angle -120^\circ = 379.17 \angle -90.27^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{TR} = \dot{V}_{RS} \angle 120^\circ = 379.17 \angle 149.73^\circ \text{ V}$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στα 3 φασικά φορτία είναι

$$\dot{S}_{\text{φορτίο}} = 3Z_{\text{φορτίο}}|\dot{I}_R|^2 = 3(50 + j30)3.668^2 = 2017.6 + j1210.6 \text{ VA}$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στη γραμμή μεταφοράς είναι

$$\dot{S}_L = 3Z_L|\dot{I}_R|^2 = 28.25 + j60.53 \text{ VA}$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται εσωτερικά στη γεννήτρια είναι

$$\dot{S}_{\text{γεννήτρια}} = 3Z_{\text{γεννήτρια}}|\dot{I}_R|^2 = 4.04 + j16.14 \text{ VA}$$

και η συνολική μιγαδική ισχύς που παράγεται από τη γεννήτρια

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{παράγεται}} &= 3(220 \angle 0^\circ)\dot{I}_R^* = 3(220 \angle 0^\circ)(3.668 \angle 32.13^\circ) = \\ &= 2049.9 + j1287.3 \text{ VA} \end{aligned}$$

Όπως παρατηρούμε, όση ισχύς παράγεται, τόση καταναλώνεται.

## 16 130607

### 16.1 Μετασχηματισμός ( $\Upsilon$ ) $\leftrightarrow$ ( $\Delta$ )

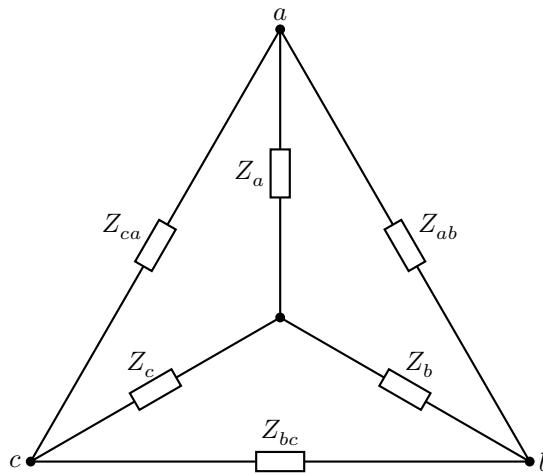
Υπενθυμίζονται οι σχέσεις μετασχηματισμού αστέρα τριγώνου για σύνθετες αντιστάσεις (φορτία/εμπεδήσεις):

$$Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad Z_b = \frac{Z_{bc}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad Z_c = \frac{Z_{ca}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} \quad Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a}$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b}$$

και οι μνημονικοί κανόνες:



Σχήμα 65: Μετασχηματισμός φορτίων/εμπεδήσεων (Υ) ↔ (Δ)

**Μνημονικός κανόνας για Υ → Δ:** Η εμπέδηση κάθε πλευράς του ισοδύναμου τριγώνου Δ είναι ίση με το άθροισμα των τριών γινομένων των εμπεδήσεων του αστέρα Υ, αν πάρουμε τις πλευρές ανά δύο, που διαιρείται με την εμπέδηση του αντίθετου κλάδου του αστέρα.

**Μνημονικός κανόνας για Δ → Υ:** Η εμπέδηση σε κάθε κλάδο του ισοδύναμου αστέρα Υ είναι ίση με το γινόμενο των εμπεδήσεων των διπλανών πλευρών του τριγώνου Δ που περικλείουν τον κλάδο, διαιρούμενο με το άθροισμα των εμπεδήσεων του τριγώνου.

Αν οι τρεις πλευρές του αστέρα είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή  $Z_Y$  τότε και οι τρεις πλευρές του τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή

$$Z_{\Delta} = \frac{3Z_Y^2}{Z_Y} = 3Z_Y$$

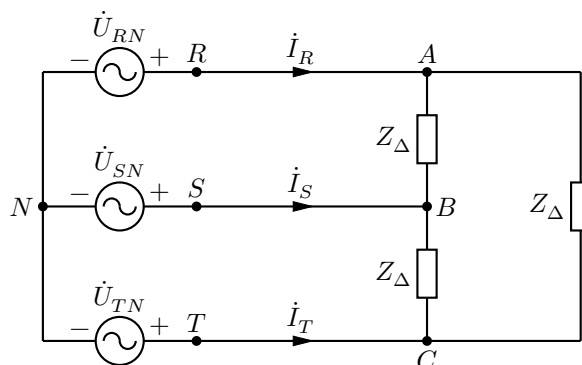
Ομοίως, αν οι τρεις πλευρές του τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή  $Z_{\Delta}$  τότε και οι τρεις πλευρές του αστέρα είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}^2}{3Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

## 16.2 Συμμετρική σύνδεση (Υ) ↔ (Δ)

Στο σχ. 66 βλέπουμε τη συμμετρική τριφασική σύνδεση (Υ) ↔ (Δ). Παρατηρούμε εδώ ότι οι πολικές τάσεις είναι ίσες με τις τάσεις στους ακροδέκτες των φορτίων. Επομένως, εάν οι φασικές τάσεις με θετική διαδοχή φάσεων είναι:

$$\dot{V}_{RN} = V_Y \angle 90^\circ \quad \dot{V}_{SN} = V_Y \angle -30^\circ \quad \dot{V}_{TN} = V_Y \angle -150^\circ$$



Σχήμα 66: Συμμετρική σύνδεση τριφασικής πηγής και φορτίου (Υ) ↔ (Δ).

όπου  $V_T$  το κοινό μέτρο της φασικής τάσης, οι αντίστοιχες πολικές τάσεις είναι:

$$\dot{V}_{RS} = V_{\Delta} / \underline{120^{\circ}} \quad \dot{V}_{ST} = V_{\Delta} / \underline{0^{\circ}} \quad \dot{V}_{TR} = V_{\Delta} / \underline{-120^{\circ}}$$

όπου  $V_{\Delta} = V_T \sqrt{3}$  το κοινό μέτρο της πολικής τάσης ή τάσης γραμμής. Όπως φαίνεται στο σχ. 66, οι πολικές τάσεις είναι οι τάσεις στις εμπειδήσεις του τριγώνου. Για συμμετρικό φορτίο, έστω  $Z_{\Delta} = |Z_{\Delta}| \angle \theta$ . Τα πολικά ρεύματα για το φορτίο είναι τότε:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{RS}}{Z_{\Delta}} = I_{\Delta} \angle \underline{120^{\circ} - \theta}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{V}_{ST}}{Z_{\Delta}} = I_{\Delta} \angle \underline{-\theta}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{V}_{TR}}{Z_{\Delta}} = I_{\Delta} \angle \underline{-120^{\circ} - \theta}$$

όπου

$$I_{\Delta} = \frac{V_{\Delta}}{|Z_{\Delta}|}$$

ενώ τα ρεύματα γραμμής, από κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} =$$

$$I_{\Delta} (e^{j(120^{\circ} - \theta)} - e^{-j(120^{\circ} + \theta)}) = I_{\Delta} e^{-j\theta} (e^{j120^{\circ}} - e^{-j120^{\circ}}) = I_{\Delta} e^{-j\theta} 2j \sin(120^{\circ}) \Rightarrow$$

$$\dot{I}_R = I_{\Delta} e^{-j\theta} 2j \frac{\sqrt{3}}{2} = I_{\Delta} \sqrt{3} \angle \underline{90^{\circ} - \theta}$$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_R \angle \underline{-120^{\circ}} = I_{\Delta} \sqrt{3} \angle \underline{-30^{\circ} - \theta}$$

$$\dot{I}_T = \dot{I}_R \angle \underline{120^{\circ}} = I_{\Delta} \sqrt{3} \angle \underline{210^{\circ} - \theta} = I_{\Delta} \sqrt{3} \angle \underline{-150^{\circ} - \theta}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία των φάσεων μεταξύ των ρευμάτων γραμμής είναι όπως στις φασικές τάσεις με μετατόπιση κατά  $\theta$  που οφείλεται στη σύνθετη αντίσταση του φορτίου κατανάλωσης. Το μέτρο όμως των ρευμάτων είναι αυξημένο κατά  $\sqrt{3}$  σε σχέση με το ρεύμα που διαρρέει τα φορτία. Δηλ.

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= (\dot{I}_{AB} \sqrt{3}) \angle \underline{-30^{\circ}} & \dot{I}_{AB} &= (\dot{I}_R / \sqrt{3}) \angle \underline{30^{\circ}} \\ \dot{I}_S &= (\dot{I}_{BC} \sqrt{3}) \angle \underline{-30^{\circ}} & \dot{I}_{BC} &= (\dot{I}_S / \sqrt{3}) \angle \underline{30^{\circ}} \\ \dot{I}_T &= (\dot{I}_{CA} \sqrt{3}) \angle \underline{-30^{\circ}} & \dot{I}_{CA} &= (\dot{I}_T / \sqrt{3}) \angle \underline{30^{\circ}} \end{aligned} \quad \eta$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$\dot{S} = 3|\dot{I}_{AB}|^2 Z_{\Delta}$$

Η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$P = 3|\dot{I}_{AB}|^2 \Re\{Z_{\Delta}\}$$

Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$\dot{S} = 3\dot{V}_{RN}\dot{I}_R^*$$

### 16.3 Συμμετρική σύνδεση ( $\Delta$ ) $\leftrightarrow$ ( $\Delta$ )

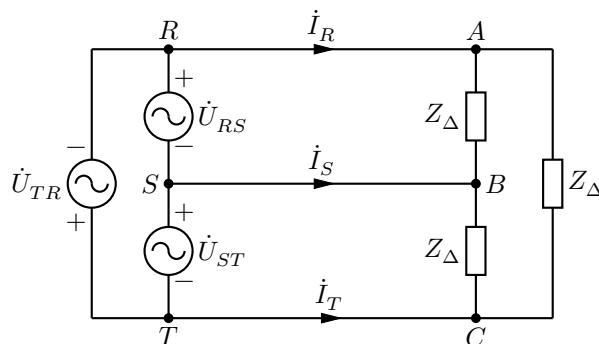
Στο σχ. 67 βλέπουμε τη σύνδεση ( $\Delta$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Delta$ ). Παρατηρούμε και εδώ ότι οι πολικές τάσεις είναι ίσες με τις τάσεις στους ακροδέκτες των φορτίων και εάν  $V_{\Delta}$  το κοινό μέτρο της πολικής τάσης, οι πολικές τάσεις, για ορθή διαδοχή φάσεων, είναι:

$$\dot{V}_{RS} = V_{\Delta} / \underline{120^{\circ}} \quad \dot{V}_{ST} = V_{\Delta} / \underline{0^{\circ}} \quad \dot{V}_{TR} = V_{\Delta} / \underline{-120^{\circ}}$$

Για συμμετρικό φορτίο, έστω  $Z_{\Delta} = |Z_{\Delta}| \angle \theta$ . Τα πολικά ρεύματα για το φορτίο είναι τότε:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{RS}}{Z_{\Delta}} = I_{\Delta} \angle \underline{120^{\circ} - \theta}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{V}_{ST}}{Z_{\Delta}} = I_{\Delta} \angle \underline{-\theta}$$



Σχήμα 67: Συμμετρική σύνδεση τριφασικής πηγής και φορτίου ( $\Delta$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Delta$ ).

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{V}_{TR}}{Z_{\Delta}} = I_{\Delta} \angle -120^{\circ} - \theta$$

όπου

$$I_{\Delta} = \frac{V_{\Delta}}{|Z_{\Delta}|}$$

ενώ τα ρεύματα γραμμής, από κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \\ I_{\Delta}(e^{j(120^{\circ}-\theta)} - e^{-j(120^{\circ}+\theta)}) &= I_{\Delta}e^{-j\theta}(e^{j120^{\circ}} - e^{-j120^{\circ}}) = I_{\Delta}e^{-j\theta}2j \sin(120^{\circ}) \Rightarrow \\ \dot{I}_R &= I_{\Delta}e^{-j\theta}2j \frac{\sqrt{3}}{2} = I_{\Delta}\sqrt{3} \angle 90^{\circ} - \theta \\ \dot{I}_S &= \dot{I}_R \angle -120^{\circ} = I_{\Delta}\sqrt{3} \angle -30^{\circ} - \theta \\ \dot{I}_T &= \dot{I}_R \angle 120^{\circ} = I_{\Delta}\sqrt{3} \angle 210^{\circ} - \theta = I_{\Delta}\sqrt{3} \angle -150^{\circ} - \theta \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία των φάσεων μεταξύ των ρευμάτων γραμμής είναι όπως στις φασικές τάσεις με μετατόπιση κατά  $\theta$  που οφείλεται στη σύνθετη αντίσταση του φορτίου κατανάλωσης. Το μέτρο όμως των ρευμάτων είναι αυξημένο κατά  $\sqrt{3}$  σε σχέση με το ρεύμα που διαρρέει τα φορτία. Δηλ.

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= (\dot{I}_{AB}\sqrt{3}) \angle -30^{\circ} & \dot{I}_{AB} &= (\dot{I}_R/\sqrt{3}) \angle 30^{\circ} \\ \dot{I}_S &= (\dot{I}_{BC}\sqrt{3}) \angle -30^{\circ} & \dot{I}_{BC} &= (\dot{I}_S/\sqrt{3}) \angle 30^{\circ} \\ \dot{I}_T &= (\dot{I}_{CA}\sqrt{3}) \angle -30^{\circ} & \dot{I}_{CA} &= (\dot{I}_T/\sqrt{3}) \angle 30^{\circ} \end{aligned} \quad \eta$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$\dot{S} = 3|\dot{I}_{AB}|^2 Z_{\Delta}$$

Η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$P = 3|\dot{I}_{AB}|^2 \Re\{Z_{\Delta}\}$$

Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$\dot{S} = 3\dot{V}_{RN}\dot{I}_R^* = 3 \frac{\dot{V}_{RS} \angle -30^{\circ}}{\sqrt{3}} (\dot{I}_{AB}^* \sqrt{3}) \angle 30^{\circ} = 3\dot{V}_{RS}\dot{I}_{AB}^*$$

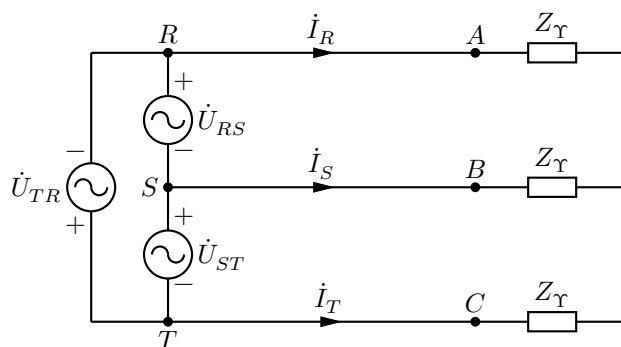
## 16.4 Συμμετρική σύνδεση ( $\Delta$ ) $\leftrightarrow$ ( $\Upsilon$ )

Στη τελευταία συνδεσμολογία ( $\Delta$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Upsilon$ ) που φαίνεται στο σχ. 68, για ορθή διαδοχή φάσεων, έχουμε τις πολικές τάσεις:

$$\dot{V}_{RS} = V_{\Delta} \angle 120^{\circ} \quad \dot{V}_{ST} = V_{\Delta} \angle 0^{\circ} \quad \dot{V}_{TR} = V_{\Delta} \angle -120^{\circ}$$

Ο μετασχηματισμός στις αντίστοιχες φασικές από το διάγραμμα τάσεων είναι:

$$\dot{V}_{RN} = (\dot{V}_{RS}/\sqrt{3}) \angle -30^{\circ} \quad \dot{V}_{SN} = (\dot{V}_{ST}/\sqrt{3}) \angle -30^{\circ} \quad \dot{V}_{TN} = (\dot{V}_{TR}/\sqrt{3}) \angle -30^{\circ}$$



Σχήμα 68: Συμμετρική σύνδεση τριφασικής πηγής και φορτίου ( $\Delta$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Upsilon$ ).

Οπότε, για  $Z_Y = |Z_Y| \angle \theta$ :

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_{RN}}{Z_Y} = \frac{\dot{V}_{RS} \angle -30^\circ}{Z_Y \sqrt{3}} \quad \dot{I}_S = \frac{\dot{V}_{SN}}{Z_Y} = \frac{\dot{V}_{ST} \angle -30^\circ}{Z_Y \sqrt{3}} \quad \dot{I}_T = \frac{\dot{V}_{TN}}{Z_Y} = \frac{\dot{V}_{TR} \angle -30^\circ}{Z_Y \sqrt{3}}$$

Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$\dot{S} = 3|\dot{I}_R|^2 Z_Y$$

Η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$P = 3|\dot{I}_R|^2 \Re\{Z_Y\}$$

Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$\dot{S} = 3\dot{V}_{RN}\dot{I}_R^* = 3 \frac{\dot{V}_{RS} \angle -30^\circ}{\sqrt{3}} \dot{I}_R^* = \sqrt{3} \dot{V}_{RS} \angle -30^\circ \dot{I}_R^*$$

## 16.5 Ασκήσεις

**Άσκηση 16.1** Έγινε το Θέμα 2 της εξεταστικής Φεβρουαρίου 2009.

**Άσκηση 16.2** Έγινε το Θέμα 2 της εξεταστικής Φεβρουαρίου 2011.

Ένας εναλλακτικός, και ίσως πιο απλός τρόπος να βρεθεί η εμπέδηση  $Z$ , είναι να μετασχηματιστεί το φορτίο σε αστέρα. Η εμπέδηση γίνεται τότε  $Z/3$  και έχουμε μια απλή συνδεσμολογία ( $\Upsilon$ )  $\leftrightarrow$  ( $\Upsilon$ ).

$$\dot{V}_{RN} = \dot{I}_R \frac{Z}{3} \Rightarrow Z = \frac{3\dot{V}_{RN}}{\dot{I}_R} = 16.908 \angle -67^\circ \Omega$$

Οπότε το ρεύμα  $\dot{I}_{AC}$  βρίσκεται από:

$$\dot{I}_{AC} = -\dot{I}_{CA} = -\frac{\dot{V}_{CA}}{Z} = \frac{\dot{V}_{BC} \angle -120^\circ}{Z} = 24.249 \angle 145^\circ \text{ A}$$

και για την ολική μιγαδική ισχύ που παρέχει η πηγή:

$$\dot{S} = 3\dot{V}_{RN}\dot{I}_R^* = 29.826 \angle -67^\circ \text{ kVA}$$

## 17 130612

### 17.1 Ασκήσεις

**Άσκηση 17.1** Έγινε το Θέμα 2 της εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2008.

**Άσκηση 17.2** Έγινε το Θέμα 2 της εξεταστικής Φεβρουαρίου 2012.

### 18.1 Μετασχηματιστές

Κυκλώματα που περιέχουν στοιχεία που αλληλεπιδρούν με μαγνητικά πεδία ονομάζονται κυκλώματα μαγνητικής σύζευξης. Ο μετασχηματιστής είναι ο δομικός λίθος για τέτοιου είδους κυκλώματα. Χρησιμοποιεί δυο πηνία που είναι μαγνητικά συζευγμένα για να μεταφέρει ενέργεια από το ένα στο άλλο. Οι μετασχηματιστές είναι βασικά στοιχεία σε κυκλώματα ισχύος όπου χρησιμοποιούνται στην αλλαγή της τιμής της τάσης ή του ρεύματος. Χρησιμοποιούνται επίσης και σε άλλα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα για προσαρμογή εμπεδήσεων και ηλεκτρική απομόνωση μεταξύ διαφορετικών τμημάτων του κυκλώματος.

### 18.2 Αμοιβαία επαγωγή

Ο νόμος της επαγωγής του Faraday λέει ότι, αν έχουμε ένα πηνίο στο οποίο υπάρχει μεταβολή της μαγνητικής ροής  $\phi$  που διέρχεται μέσα από τις σπείρες του πηνίου, τότε στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$E = N \frac{d\phi}{dt}$$

με πολικότητα που να αντιτίθεται στο αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή της  $\phi$ . Η μαγνητική ροή οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει το πηνίο. Π.χ. για σωληνοειδές μήκους  $\ell$ , έχουμε

$$\phi(t) = B(t)S = \frac{\mu_0 i(t)N}{\ell} S = kNi(t)$$

Ίδια σχέση με κάποιο συντελεστή  $k$  που εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά και μαγνητικά χαρακτηριστικά ισχύει για οποιοδήποτε πηνίο.

Επομένως, αν έχουμε δυο πηνία 1 και 2 μέσα από τα οποία διέρχεται ρεύμα  $i_1(t)$  και  $i_2(t)$  αντίστοιχα, και τα πηνία είναι μακριά το ένα από το άλλο, οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές θα είναι

$$\phi_1(t) = k_1 N_1 i_1(t) \quad \phi_2(t) = k_2 N_2 i_2(t)$$

και οι αντίστοιχες ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις στα άκρα κάθε πηνίου:

$$v_{11}(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad v_{22}(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = k_2 N_2^2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Οι δυο δείκτες 12 σημαίνουν ότι το αποτέλεσμα στο στοιχείο 1 δημιουργείται από το αίτιο στο στοιχείο 2. Επομένως, η τάσεις  $v_{11}(t)$ ,  $v_{22}(t)$  είναι οι τάσεις εξ αυτεπαγωγής στα δυο πηνία.

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο πηνία με αυτεπαγωγές  $L_1$ ,  $L_2$  που βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο. Το πηνίο 1 έχει  $N_1$  τυλίγματα ενώ το πηνίο 2 έχει  $N_2$  τυλίγματα. Μέρος της μαγνητικής ροής κάθε πηνίου εμπλέκεται και διέρχεται από τις σπείρες του άλλου πηνίου. Υπάρχει αμοιβαία επαγωγή (mutual inductance). Οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές είναι

$$\phi_{12}(t) = k_{12} N_2 i_2(t) \quad \phi_{21}(t) = k_{21} N_1 i_1(t)$$

Η ροή  $\phi_{12}(t)$  είναι η ροή στο πηνίο 1 λόγω του ρεύματος στο πηνίο 2 και η ροή  $\phi_{21}(t)$  είναι η ροή στο πηνίο 2 λόγω του ρεύματος στο πηνίο 1. Όταν οι ροές/ρεύματα μεταβάλλονται, τότε έχουμε την εμφάνιση τάσεων εξ επαγωγής

$$v_{12}(t) = N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} = k_{12} N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad v_{21}(t) = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = k_{21} N_2 N_1 \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

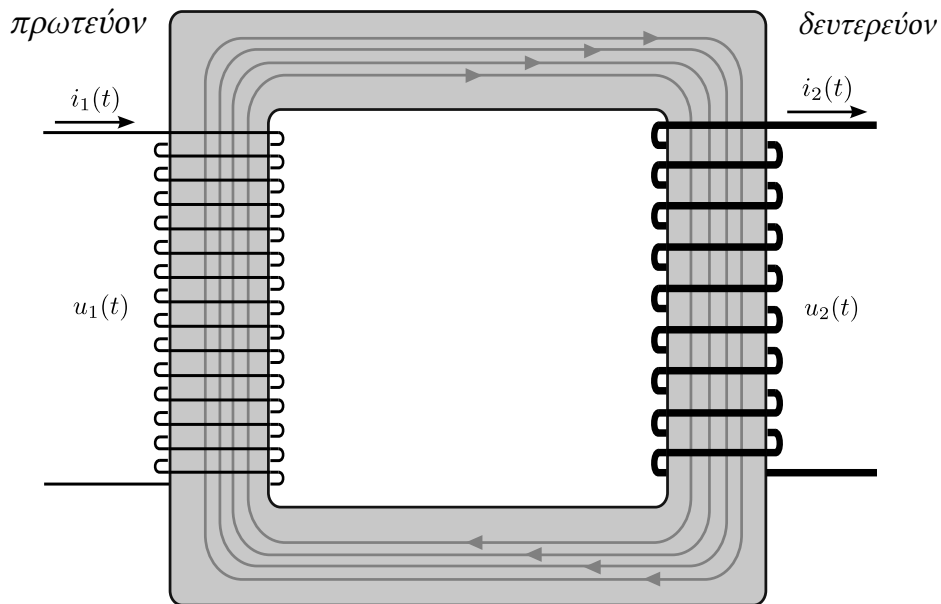
όπου  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  είναι οι συντελεστές αμοιβαίας επαγωγής. Για γραμμικά μαγνητικά υλικά  $k_{12} = k_{21} = k_M$  οπότε και  $M_{12} = M_{21} = M$ . Οπότε οι ολικές τάσεις σε κάθε πηνίο είναι

$$v_1(t) = v_{11}(t) + v_{12}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad v_2(t) = v_{22}(t) + v_{21}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

### 18.3 Σύμβαση τελείας

Η αμοιβαία επαγωγή είναι η ιδιότητα ενός επαγωγέα να δημιουργεί επαγωγικά μια τάση στα άκρα ενός άλλου, γειτονικού επαγωγέα, ανάλογα με την μεταβολή του ρεύματος στον πρώτο. Σαν φυσικό μέγεθος, η αμοιβαία επαγωγή είναι πάντοτε θετική. Η επαγόμενη τάση όμως  $M di/dt$  μπορεί να είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Αντίθετα με την τάση εξ



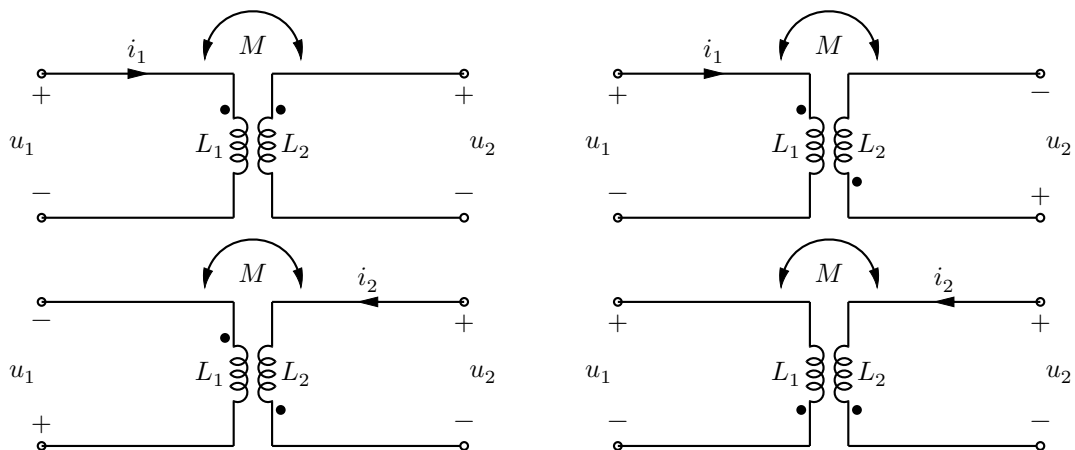


Σχήμα 69: Μαγνητική αλληλεπίδραση δυο πηνίων

αυτεπαγωγής  $L di/dt$ , της οποίας η πολικότητα εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει τον επαγωγέα και τον νόμο του Lenz, η πολικότητα της αμοιβαίας επαγωγής  $M di/dt$  εξαρτάται από το τι γίνεται σε 4 ακροδέκτες συμπεριλαμβανομένου του τρόπου περιτύλιξης των δυο πηνίων.

Στο σχ. 69 έχουμε ένα ζεύγος πηνίων με κοινό πυρήνα (για να φαίνεται καλύτερα ο τρόπος περιέλιξης). Η ολική μαγνητική ροή που φαίνεται στο σχήμα έχει τέσσερις συνιστώσες,  $\phi_{11}(t)$ ,  $\phi_{22}(t)$ ,  $\phi_{21}(t)$  και  $\phi_{12}(t)$ . Μας ενδιαφέρουν οι δυο τελευταίες που αντιπροσωπεύουν την ροή λόγω αμοιβαίας επαγωγής από το πηνίο 1 στο 2 και από το πηνίο 2 στο 1 αντίστοιχα. Ανάλογα με την φορά περιέλιξης των πηνίων και τη φορά των ρευμάτων που κυκλοφορούν σε αυτά, οι επαγόμενες τάσεις μπορεί να εμφανίζονται με θετική ή αρνητική πολικότητα.

Επειδή σε σχηματικό διάγραμμα δεν μπορεί να συμπεριληφθεί η φορά περιέλιξης κάθε πηνίου, ακολουθείται η σύμβαση τελείας (dot convention). Σύμφωνα με αυτήν, τοποθετείται μια τελεία στον ακροδέκτη κάθε πηνίου σε ένα ζευγάρι συζευγμένων πηνίων, που δείχνει την φορά της μαγνητικής ροής εάν το ρεύμα εισέρχεται στο πηνίο από αυτόν τον ακροδέκτη. Η τελεία χρησιμεύει στον προσδιορισμό της πολικότητας της αμοιβαίας επαγωγής όπως φαίνεται στο σχ. 70.



Σχήμα 70: Πολικότητα επαγόμενης τάσης σύμφωνα με τη σύμβαση τελείας.

Εάν το ρεύμα εισέρχεται στον ακροδέκτη τελεία ενός πηνίου, η πολικότητα της επαγόμενης τάσης είναι θετική στον ακροδέκτη τελεία του δεύτερου πηνίου.

Εάν το ρεύμα εξέρχεται από τον ακροδέκτη τελεία ενός πηνίου, η πολικότητα της επαγόμενης τάσης είναι αρνητική στον ακροδέκτη τελεία του δεύτερου πηνίου.

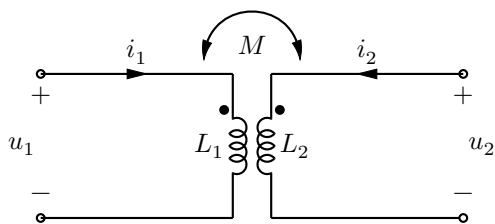
Στην πράξη, όταν αναλύουμε ένα κύκλωμα, σχεδιάζουμε πρώτα τα κλαδικά ρεύματα. Στην περίπτωση αυτή είναι πιο εύχρηστος ο παρακάτω ορισμός της σύμβασης τελείας.

Εάν τα ρεύματα που διέρχονται από τα πηνία εισέρχονται ή εξέρχονται και τα δυο από τους ακροδέκτες τελεία, το πρόσημο της εξ επαγωγής τάσης θα είναι το ίδιο με το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης.

Εάν το ένα ρεύμα εισέρχεται στον ακροδέκτη τελεία του ενός πηνίου και το άλλο εξέρχεται από τον ακροδέκτη τελεία του άλλου πηνίου τότε το πρόσημο της εξ επαγωγής τάσης θα είναι αντίθετο με το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης.

όπου το πρόσημο της εξ αυτεπαγωγής τάσης είναι θετικό στον ακροδέκτη που εισέρχεται το ρεύμα που διαρρέει το εκάστοτε πηνίο.

#### 18.4 Ενέργεια σε κύκλωμα μαγνητικής σύζευξης



Σχήμα 71: Κύκλωμα για υπολογισμό ενέργειας

Η στιγμιαία ισχύς σε κάθε πηνίο στο σχ. 71 είναι

$$p_1(t) = v_1(t)i_1(t) = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \pm M i_1 \frac{di_2}{dt} \quad p_2(t) = v_2(t)i_2(t) = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \pm M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

και η ολική ισχύς του συστήματος

$$\begin{aligned} p(t) &= p_1(t) + p_2(t) = L_1 \left[ i_1 \frac{di_1}{dt} \right] \pm M \left[ i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 \left[ i_2 \frac{di_2}{dt} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right] \end{aligned}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι η ισχύς, οπότε η ενέργεια του συστήματος είναι

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

όπου το πρόσημο + είναι για την περίπτωση όπου και τα δυο ρεύματα εισέρχονται ή εξέρχονται από τους ακροδέκτες τελεία, ενώ το πρόσημο - είναι για την περίπτωση όπου το ένα ρεύμα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται από τους αντίστοιχους ακροδέκτες τελεία.

Για τον υπολογισμό των ορίων μέσα στα οποία κυμαίνεται η αμοιβαία επαγωγή  $M$  παρατηρούμε ότι η ενέργεια είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση με μηδέν. Άρα,

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \geq 0$$

Εάν προσθαφαιρέσουμε τον όρο  $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$  και συμπληρώσουμε το τετράγωνο, έχουμε

$$\frac{1}{2} (i_1 \sqrt{L_1} - i_2 \sqrt{L_2})^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) \geq 0$$

οπότε

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \geq 0 \Rightarrow 0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

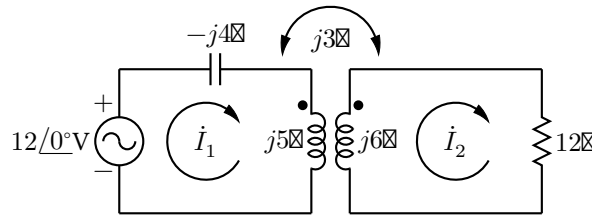
Δηλ. η αμοιβαία επαγωγή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τον γεωμετρικό μέσο των αυτεπαγωγών των δυο πηνίων. Την ποιότητα της σύζευξης την ποσοτικοποιούμε με τον συντελεστή σύζευξης  $k$  όπου

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{με} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Για  $k = 1$  έχουμε 100% σύζευξη, την οποία ονομάζουμε ιδανική ή τέλεια γιατί σημαίνει ότι όλη η μαγνητική ροή από το ένα πηνίο περνάει επίσης και από το άλλο. Για  $k > 0.5$  έχουμε ισχυρή σύζευξη, ενώ για  $k < 0.5$  έχουμε ασθενή σύζευξη. Το  $k$  δείχνει το ποσοστό της μαγνητικής ροής από το ένα πηνίο που διέρχεται από το άλλο.

Περιμένουμε ότι η πειραματική τιμή του  $k$  εξαρτάται από το πόσο κοντά είναι τα πηνία, το τι πυρήνα έχουν, ποια είναι η οριοθέτησή τους στο χώρο (παράλληλη ή κάθετη μεταξύ τους) και τον αριθμό των τυλιγμάτων τους.

**Παράδειγμα 18.1** Να βρεθούν τα ρεύματα  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$  στο κύκλωμα του σχ. 72.



Σχήμα 72: Κύκλωμα παραδείγματος 18.1.

Από τη σύμβαση τελείας ( $\dot{I}_1$  εισέρχεται,  $\dot{I}_2$  εξέρχεται) η αμοιβαία επαγωγή είναι αρνητική. Στον αριστερό βρόγχο έχουμε

$$-12 + (-j4 + j5)\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow j\dot{I}_1 - j3\dot{I}_2 = 12$$

Στον δεξιό βρόγχο

$$-j3\dot{I}_1 + (12 + j6)\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{(12 + j6)\dot{I}_2}{j3} = (2 - j4)\dot{I}_2$$

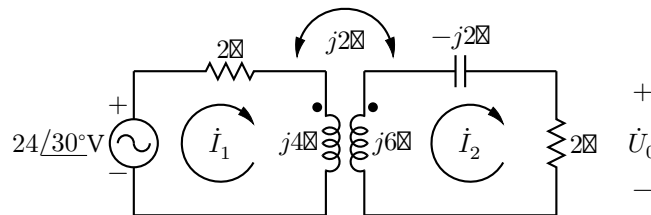
Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση

$$(j2 + 4 - j3)\dot{I}_2 = (4 - j)\dot{I}_2 = 12 \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{12}{4 - j} = 2.91 \angle 14.036^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{I}_1 = (2 - j4)\dot{I}_2 = 13.02 \angle -49.399^\circ \text{ A}$$

**Παράδειγμα 18.2** Να βρεθεί η τάση εξόδου  $\dot{V}_0$  στο κύκλωμα του σχ. 73.



Σχήμα 73: Κύκλωμα παραδείγματος 18.2.

Και εδώ από τη σύμβαση τελείας ( $\dot{I}_1$  εισέρχεται,  $\dot{I}_2$  εξέρχεται) η αμοιβαία επαγωγή είναι αρνητική. Οι εξισώσεις για τους δυο βρόγχους είναι

$$(2 + j4)\dot{I}_1 - j2\dot{I}_2 = 24 \angle 30^\circ$$

$$-j2\dot{I}_1 + (2 + j6 - j2)\dot{I}_2 = 0$$

Λύνοντας την δεύτερη ως προς  $\dot{I}_1$  και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

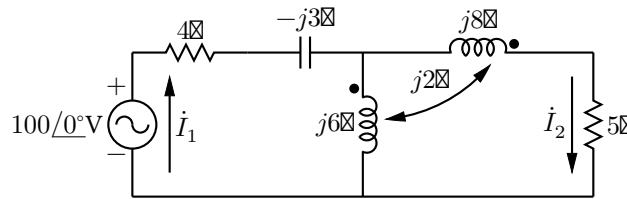
$$(2 - j)(2 + j4)\dot{I}_2 - j2\dot{I}_2 = 24 \angle 30^\circ \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{24 \angle 30^\circ}{8 + j4} = 2.683 \angle 3.435^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{V}_o = 2\dot{I}_2 = 5.367 \angle 3.435^\circ \text{ V}$$

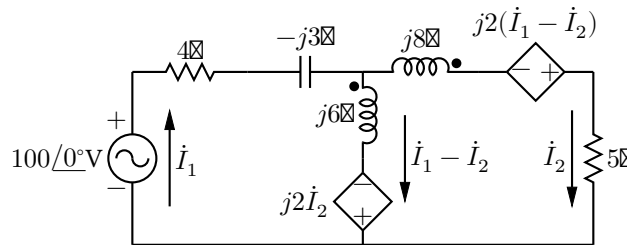
## 19 130619

**Παράδειγμα 19.1** Να βρεθούν τα ρεύματα  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$  στο κύκλωμα του σχ. 74.



Σχήμα 74: Κύκλωμα παραδείγματος 19.1.

Έστω ότι έχουμε ένα ζευγάρι πηνίων που έχουν μαγνητική σύζευξη μεταξύ τους. Πολλές φορές βολεύει να συμβολίσουμε την επαγωγική τάση στα πηνία με ένα ζευγάρι εξαρτημένων πηγών τάσης, μια για κάθε πηνίο, όπως φαίνεται στο σχ. 75. Καταρχήν σχεδιάζουμε όλα τα κλαδικά ρεύματα. Το μέτρο κάθε εξαρτημένης πηγής είναι ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής επί το ρεύμα που προκαλεί την επαγωγή. Επίσης, η πολικότητα των πηγών εξαρτάται από τον κανόνα τελείας.



Σχήμα 75: Κύκλωμα με εξαρτημένες πηγές επαγωγικής τάσης.

Από τον κανόνα τελείας το  $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$  εισέρχεται σε τελεία, το  $\dot{I}_2$  εξέρχεται. Άρα η τάση εξ' επαγωγής είναι αρνητική. Στον αριστερό βρόγχο έχουμε:

$$-100 + \dot{I}_1(4 - j3) + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)j6 - j2\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow (4 + j3)\dot{I}_1 - j8\dot{I}_2 = 100$$

Στο δεξιό βρόγχο έχουμε:

$$j8\dot{I}_2 - j2(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + 5\dot{I}_2 + j2\dot{I}_2 - j6(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = 0 \Rightarrow -j8\dot{I}_1 + (5 + j18)\dot{I}_2 = 0$$

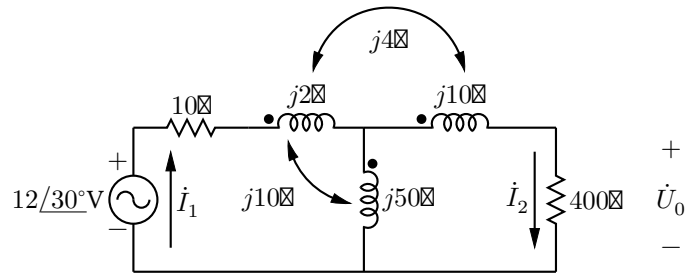
Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{I}_1 = 20.3 \angle 3.504^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 8.693 \angle 19.03^\circ \text{ A}$$

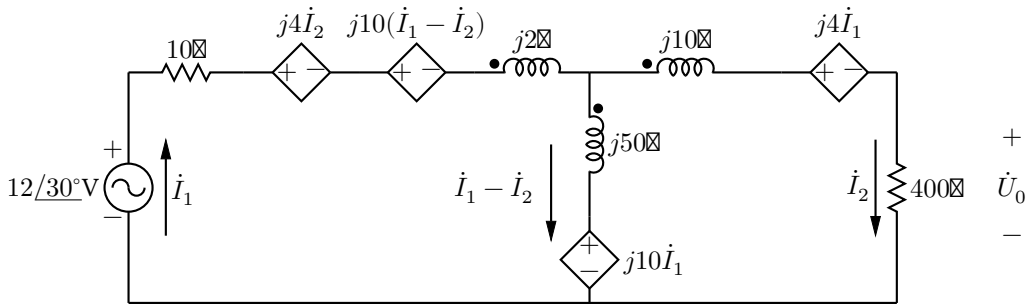
**Παράδειγμα 19.2** Να βρεθεί η τάση εξόδου  $\dot{V}_o$  στο κύκλωμα του σχ. 76.

Όπως παρατηρούμε έχουμε 3 πηνία όπου αριστερό και μεσαίο, αριστερό και δεξιό είναι μαγνητικά συζευγμένα, ενώ μεσαίο και δεξιό δεν είναι. Τοποθετώντας εξαρτημένες πηγές επαγωγικής τάσης κατάλληλα, έχουμε το κύκλωμα του σχ. 77.

Οι εξισώσεις για τους δυο οφθαλμούς/βρόγχους σύμφωνα με τη σύμβαση τελείας είναι



Σχήμα 76: Κύκλωμα παραδείγματος 19.2.



Σχήμα 77: Το κύκλωμα με εξαρτημένες πηγές επαγωγικής τάσης.

$$\left. \begin{aligned} 10\dot{I}_1 + j4\dot{I}_2 + j10(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + j2\dot{I}_1 + j50(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + j10\dot{I}_1 &= 12 \angle 30^\circ \\ j10\dot{I}_2 + j4\dot{I}_1 + 400\dot{I}_2 - j10\dot{I}_1 - j50(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (10 + j72)\dot{I}_1 - j56\dot{I}_2 &= 12 \angle 30^\circ \\ -j56\dot{I}_1 + (400 + j60)\dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\dot{I}_1 = 0.1643 \angle -45.998^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 0.0227 \angle 35.471^\circ \text{ A}$$

και

$$V_o = 400\dot{I}_2 = 9.101 \angle 35.471^\circ \text{ V}$$

## 20 130621

### 20.1 Ιδανικοί μετασχηματιστές

Ο μετασχηματιστής είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που χρησιμοποιεί τη μαγνητική σύζευξη μεταξύ δυο πηνίων. Βρίσκει εφαρμογή σε πολλές ηλεκτρικές συσκευές αλλά η κύρια εφαρμογή του είναι σε συσκευές ισχύος και στο ηλεκτρικό δίκτυο όπου παίζει το ρόλο μεταφοράς ενέργειας μεταξύ πηγής και φορτίου. Η συνήθης δομή του είναι δυο πηνία, το πρωτεύον (συνδεδεμένο με την πηγή) και το δευτερεύον (συνδεδεμένο με το φορτίο). Η βασική του λειτουργία είναι να αλλάζει τάσεις και ρεύματα μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος έτσι ώστε η μεταφορά ενέργειας από πηγή σε φορτίο να γίνεται με τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση.

Θέλουμε επομένως μεγιστοποίηση της μαγνητικής σύζευξης και ελαχιστοποίηση των απωλειών. Στην ιδανική περίπτωση, στον ιδανικό μετασχηματιστή, αυτό σημαίνει τέλεια σύζευξη ( $k = 1$ ) και μηδενικές απώλειες.

Επομένως, αν έχουμε δυο πηνία 1 (πρωτεύον) και 2 (δευτερεύον) μέσα από τα οποία διέρχεται ρεύμα  $i_1(t)$  και  $i_2(t)$  αντίστοιχα, οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές είναι:

$$\phi_1(t) = k_1 N_1 i_1(t) \quad \phi_2(t) = k_2 N_2 i_2(t)$$

ενώ οι αντίστοιχες μαγνητικές ροές λόγω μαγνητικής σύζευξης είναι

$$\phi_{12}(t) = k_{12} N_2 i_2(t) \quad \phi_{21}(t) = k_{21} N_1 i_1(t)$$

Τέλεια σύζευξη σημαίνει  $\phi_{21}(t) = \phi_1(t)$  και  $\phi_{12}(t) = \phi_2(t)$  καθώς επίσης και  $k_1 = k_2 = k_{12} = k_{21} = k_M$ . Οι σχέσεις τάσεις-ρεύματος μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος γίνονται τότε:

$$v_1(t) = k_M N_1^2 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_1 N_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = \pm k_M N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} + k_M N_2^2 \frac{di_2}{dt}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα  $N_1$  από την πρώτη εξίσωση και  $\pm N_2$  από τη δεύτερη:

$$v_1(t) = N_1 \left( k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$v_2(t) = \pm N_2 \left( k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

οπότε διαιρώντας τη δεύτερη με τη πρώτη έχουμε:

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \pm \frac{N_2}{N_1} = \pm n$$

όπου το (+) αναφέρεται σε μαγνητική σύζευξη που προστίθεται και το (-) σε μαγνητική σύζευξη που αφαιρείται. Ο λόγος  $n$  είναι ο λόγος τυλιγμάτων του δευτερεύοντος ως προς το πρωτεύον. Για  $n > 1$  έχουμε ανύψωση τάσης, με την τάση στο δευτερεύον να είναι μεγαλύτερη από την τάση στο πρωτεύον, ενώ για  $n < 1$  έχουμε υποβιβασμό τάσης, με την τάση στο δευτερεύον να είναι μικρότερη από την τάση στο πρωτεύον. Σε εφαρμογές δικτύου οι μεταβολές αυτές μπορεί να είναι της τάξης των εκατοντάδων kV.

Μηδενική απώλεια ισχύος σημαίνει ότι η συνολική ισχύς στο πρωτεύον και δευτερεύον είναι μηδενική:

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

δηλαδή, ότι ισχύς εισέρχεται στο πρωτεύον εξέρχεται από το δευτερεύον χωρίς καμία απώλεια ή συσσώρευση ενέργειας μέσα στον ίδιο το μετασχηματιστή. Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην πιο γνωστή:

$$\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = -\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \mp \frac{1}{n}$$

ή στις

$$v_2(t) = \pm n v_1(t) \quad \text{και} \quad i_2(t) = \mp \frac{1}{n} i_1(t)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για τους παραστατικούς μιγάδες (φάσορες) τάσης και ρεύματος:

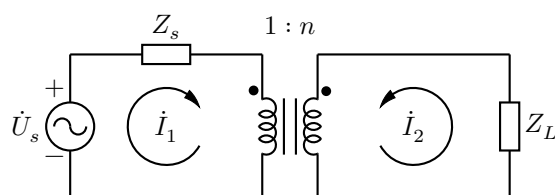
$$\dot{V}_2 = \pm n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = \mp \frac{1}{n} \dot{I}_1$$

Ισχύει και εδώ ο κανόνας τελείας όπου αν τα ρεύματα  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  εισέρχονται ή εξέρχονται από τις αντίστοιχες τελείες έχουμε:

$$\dot{V}_2 = n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1$$

ενώ αν το ένα εισέρχεται και το άλλο εξέρχεται από την αντίστοιχη τελεία:

$$\dot{V}_2 = -n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{n} \dot{I}_1$$



Σχήμα 78: Τυπική διάταξη ιδανικού μετασχηματιστή.

Στο σχ. 78 βλέπουμε μια τυπική διάταξη ιδανικού μετασχηματιστή (το σύμβολο του ιδανικού μετασχηματιστή περιέχει γραμμές μεταξύ των πηνίων που δηλώνουν ισχυρή/ιδανική σύζευξη). Τα ρεύματα εισέρχονται στις τελείες επομένως

$$\dot{V}_2 = n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1$$

Η εμπέδηση στην είσοδο του μετασχηματιστή είναι:

$$Z_i = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

ενώ η εμπέδηση στην έξοδο είναι:

$$Z_L = -\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{n\dot{V}_1}{\dot{I}_1/n} = n^2 Z_i$$

Αυτό σημαίνει ότι με κατάλληλο λόγο τυλιγμάτων  $n$  μπορούμε να κάνουμε το κύκλωμα στο πρωτεύον να βλέπει αντίσταση (προσαρμογή εμπέδησης):

$$Z_i = \frac{Z_L}{n^2}$$

**Παράδειγμα 20.1** Στο κύκλωμα ιδανικού μετασχηματιστή στο σχ. 78 έχουμε  $n = 5$ ,  $Z_s = 2.5 + j1.5 \Omega$ ,  $Z_L = 75 + j10 \Omega$ . Να βρεθούν οι τάσεις και τα ρεύματα  $\dot{V}_1$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{V}_2$ ,  $\dot{I}_2$  όταν  $\dot{V}_s = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ .

Έχουμε

$$Z_i = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{75 + j10}{25} = 3 + j0.4 \Omega$$

Η πηγή βλέπει ολική εμπέδηση  $Z_s + Z_i$  οπότε

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_s}{Z_s + Z_i} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5.5 + j1.9} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5.82 \angle 19.1^\circ} = 37.8 \angle -19.1^\circ \text{ A}$$

και

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_i = 37.8 \angle -19.1^\circ \cdot 3.03 \angle 7.6^\circ = 114 \angle -11.5^\circ \text{ V}$$

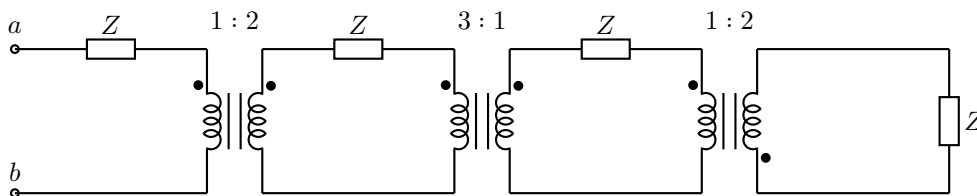
Εφόσον τα ρεύματα εισέρχονται στις τελείες

$$\dot{V}_2 = n \dot{V}_1 \quad \text{και} \quad \dot{I}_2 = -\frac{1}{n} \dot{I}_1$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= 5\dot{V}_1 = 570 \angle -11.5^\circ \text{ V} \\ \dot{I}_2 &= \frac{-37.8 \angle -19.1^\circ}{5} = 7.56 \angle 160.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 20.2** Στο δικτύωμα μετασχηματιστών / αντιστάσεων του σχ. 79 υπολογίστε την αντίσταση  $Z_{ab}$ .



Σχήμα 79: Δικτύωμα μετασχηματιστών / αντιστάσεων.

Στον τρίτο μετασχηματιστή δεξιά, η αντίσταση που φαίνεται στο πρωτεύον είναι  $Z/4$ . Αυτή βρίσκεται σε σειρά με τη  $Z$  και μαζί κάνουν μια αντίσταση  $Z + Z/4$ . Στο πρωτεύον του δεύτερου μετασχηματιστή φαίνεται η αντίσταση  $9Z(1 + 1/4)$  η οποία είναι σε σειρά με την αντίστοιχη  $Z$  και κάνουν την  $Z[1 + 9(1 + 1/4)]$ . Στο πρωτεύον του πρώτου μετασχηματιστή φαίνεται η αντίσταση  $Z[1 + 9(1 + 1/4)]/4$  η οποία είναι σε σειρά με την αντίστοιχη  $Z$  και τελικά

$$Z_{ab} = Z \left[ 1 + \frac{[1 + 9(1 + 1/4)]}{4} \right] = 4.0625 Z$$

---

**21 130626**

Θέμα 1 εξεταστικής 5/9/12, Θέμα 2 εξεταστικής 25/6/13.

**22 130628**

Θέμα 1 εξεταστικής 25/6/13.