Ηλεκτρικά Κυκλώματα II

Διάλεξη 06

Α. Δροσόπουλος

27-04-2023

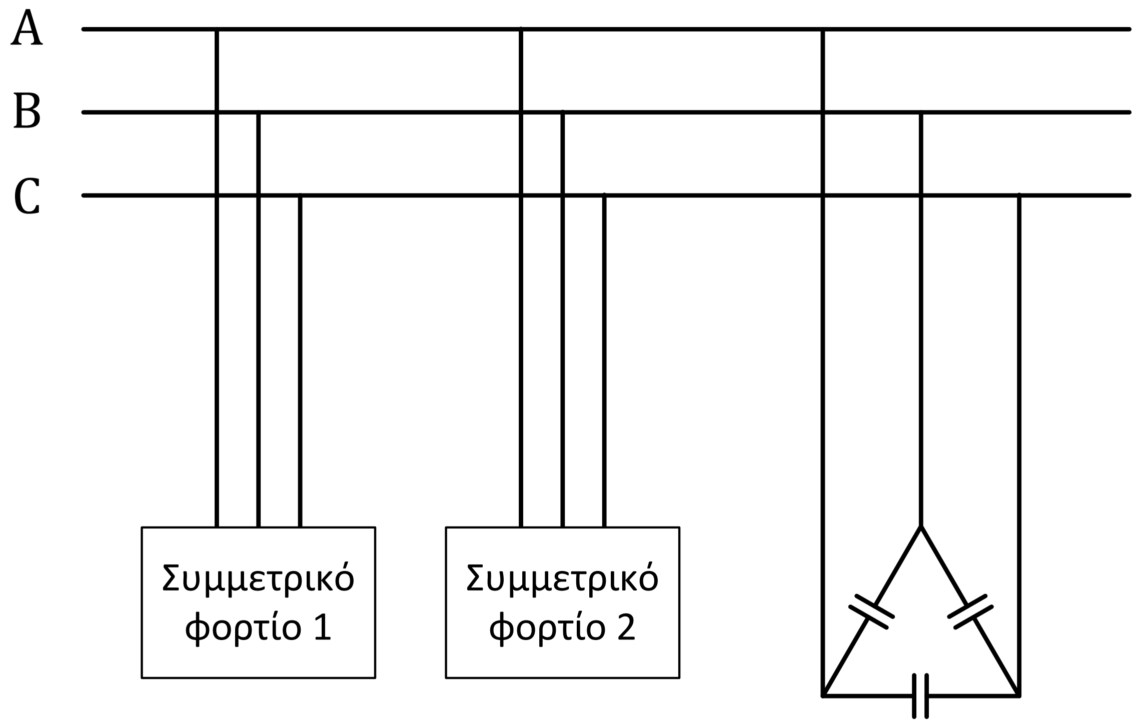
Outline

Topic

1. Τριφασικά Κυκλώματα
2. Απόκριση συχνότητας - Συντονισμός
3. Μεταβατικά φαινόμενα

Παράδειγμα 2

- Δύο συμμετρικά τριφασικά φορτία συνδέονται σε γραμμή $400\ \mathrm{V}$, $50\ \mathrm{Hz}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το φορτίο 1 απορροφά $9\ \mathrm{kW}$ με συντελεστή ισχύος 0.8 επαγωγικό και το φορτίο 2 απορροφά $15\ \mathrm{kVar}$ με συντελεστή ισχύος 0.7 επαγωγικό.



- Παράλληλα στα φορτία συνδέεται συστοιχία πυκνωτών συνδεδεμένων σε Δ για αύξηση του συνολικού συντελεστή ισχύος σε 0.93 επαγωγικό.
- Να βρεθεί το ρεύμα γραμμής, η συνολική ενεργός και άεργος ισχύς του φορτίου και η τιμή της χωρητικότητας κάθε πυκνωτή της συστοιχίας. Θεωρούμε θετική ακολουθία φάσεων.

Παράδειγμα 2

Απάντηση:

- Όταν δίνεται τιμή τάσης χωρίς να διευκρινίζεται αν είναι πολική ή φασική τότε θεωρούμε ότι είναι πολική.
- Για το φορτίο 1 η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης – ρεύματος σε κάθε κλάδο είναι

$$\varphi_1 = \cos^{-1}0.8 = 36.9°$$

- Η φαινομένη ισχύς είναι

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_1} = 11.3 \text{ kVA}$$

- Η μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S}_1 = 11.3\angle 36.9° = 9 + j6.8 \text{ kVA}$$

- Το ρεύμα είναι

$$I_1 = \frac{S_1}{\sqrt{3}U} = 16.2 \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = 16.2\angle(-36.9°) \text{ A}$$

Παράδειγμα 2

- Για το φορτίο 2:

$$\varphi_2 = \cos^{-1}0.7 = 45.6°$$

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin \varphi_2} = 21 \text{ kVA}$$

$$\dot{S}_2 = 21\angle 45.6° = 14.7 + j15 \text{ kVA}$$

$$I_2 = \frac{S_2}{\sqrt{3}U} = 30.3 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 30.3\angle(-45.6°) \text{ A}$$

- Το συνολικό ρεύμα γραμμής θα είναι

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 34.2 - j31.4 = 46.4\angle(-42.5°) \text{ A}$$

- Η συνολική μιγαδική ισχύς είναι

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = 23.7 + j21.8 = 32.2\angle 42.5° \text{ kVA}$$

- Επομένως η διαφορά φάσης για το **συνολικό φορτίο** είναι $42.5°$.
- Η συνολική ενεργός ισχύς είναι

$$P = 23.7 \text{ kW}$$

Παράδειγμα 2

- Η γωνία του διορθωμένου συντελεστή ισχύος του συνολικού φορτίου πρέπει να είναι

$$\varphi' = \cos^{-1}(0.93) = 21.6°$$

- Άρα οι πυκνωτές πρέπει να παράγουν

$$Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi') = 23.7(\tan 42.5° - \tan 21.6°) = 12.4\ \text{kVar}$$

- Ο κάθε πυκνωτής πρέπει να παράγει

$$Q_{C1} = \frac{Q_C}{3} = 4.13\ \text{kVar}$$

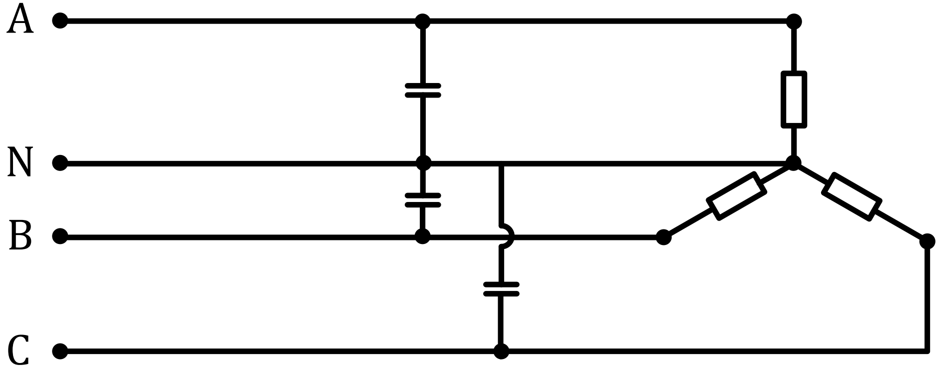
- Και επειδή η τάση στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι η πολική τάση της πηγής U πρέπει ο κάθε πυκνωτής να έχει χωρητικότητα

$$C = \frac{Q_{C1}}{2\pi f U^2} = 82\ \mu\text{F}$$

- Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό ρεύμα γραμμής στην περίπτωση αυτή. Προσοχή: Δεν προστίθενται αλγεβρικά τα επιμέρους ρεύματα.

Παράδειγμα 3

- Ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεσμολογίας Y 4 αγωγών τροφοδοτείται από πηγή $U = 40\ \mathrm{kV}$, $50\ \mathrm{Hz}$. Η φαινομένη ισχύς του φορτίου είναι $3.5\ \mathrm{kVA}$ και ο συντελεστής ισχύος του 0.72 επαγωγικός. Να βρεθεί η χωρητικότητα των πυκνωτών που πρέπει να συνδεθούν παράλληλα στο φορτίο ώστε ο συντελεστής ισχύος να γίνει 0.94 επαγωγικός. Να θεωρήσετε ότι οι πυκνωτές συνδέονται επίσης σε Y, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Απάντηση:

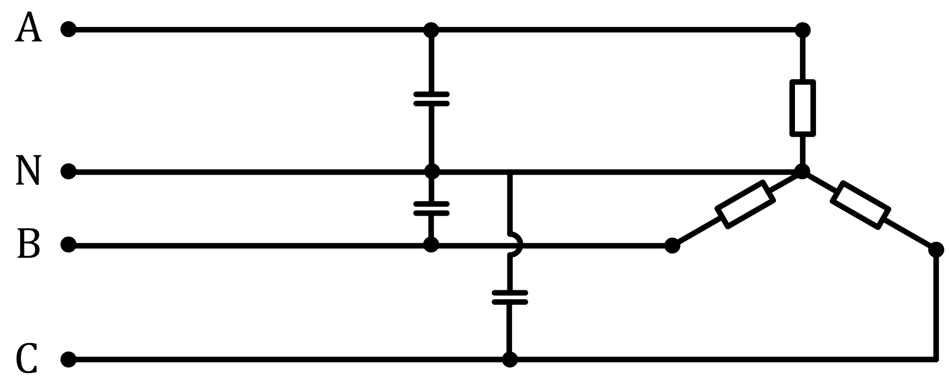
- Η γωνία του αρχικού συντελεστή ισχύος είναι

$$\varphi = \cos^{-1} 0.72 = 43.9°$$

- Η γωνία του διορθωμένου συντελεστή ισχύος είναι

$$\varphi' = \cos^{-1} 0.94 = 19.9°$$

Παράδειγμα 3



- Η ενεργός ισχύς του φορτίου είναι

$$P = 0.72 \cdot 3500 = 2520\ \mathrm{W}$$

- Η άεργος της συστοιχίας των πυκνωτών πρέπει να είναι

$$Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi') = 1514\ \mathrm{Var}$$

- Ο κάθε πυκνωτής της συστοιχίας θα παράγει

$$Q_{C1} = \frac{Q_C}{3} = 504.8\ \mathrm{Var}$$

- Η τάση στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι ίση με τη φασική τάση της πηγής. Άρα η χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή πρέπει να είναι

$$C = \frac{Q_{C1}}{2\pi f \left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2} = 30.1\ \mathrm{\mu F}$$

Topic

Εισαγωγή

- Στην προηγούμενη ανάλυση ασχοληθήκαμε με την εύρεση τάσεων και ρευμάτων σε κυκλώματα με πηγές σταθερής συχνότητας.
- Αν διατηρήσουμε το πλάτος της τάσης σταθερό και μεταβάλλουμε τη συχνότητα λαμβάνουμε την απόκριση συχνότητας του κυκλώματος.
- Μας ενδιαφέρει σε πολλές περιπτώσεις. Παράδειγμα εφαρμογής: Τα φίλτρα που επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων ορισμένων συχνοτήτων και αποκόπτουν τα υπόλοιπα.
- Θα εξετάσουμε πρώτα την επίδραση της μεταβαλλόμενης συχνότητας σε αντιστάτη, επαγωγό και πυκνωτή.
- Για τα στοιχεία αυτά είναι γνωστές οι σχέσεις που συνδέουν το μέτρο και τη φάση της σύνθετης αντίστασης με τη συχνότητα.

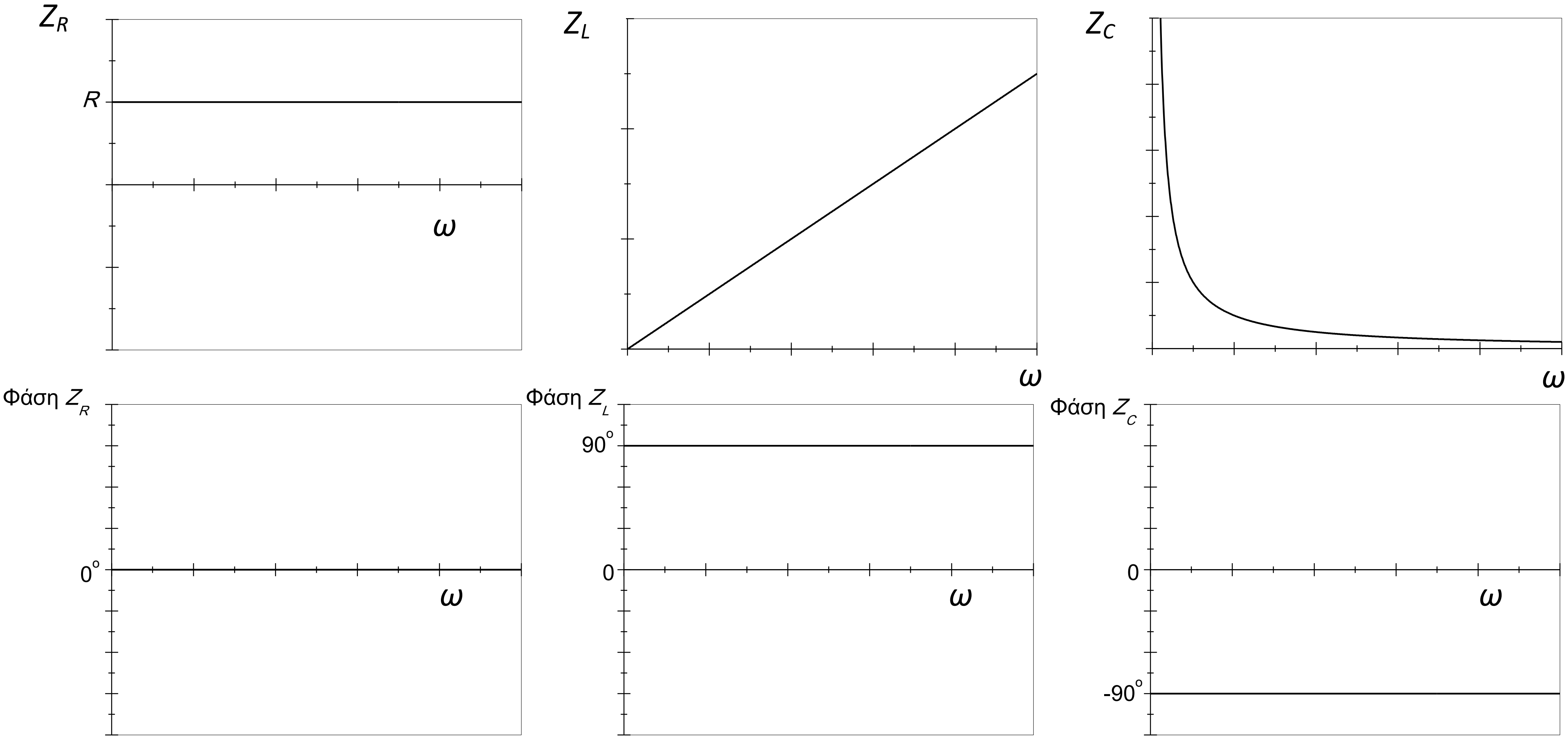
$$\dot{Z}_R = R\angle 0^\circ$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L\angle 90^\circ$$

$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle(-90^\circ)$$

Εισαγωγή

- Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις συναρτήσει της συχνότητας φαίνονται στα επόμενα σχήματα.

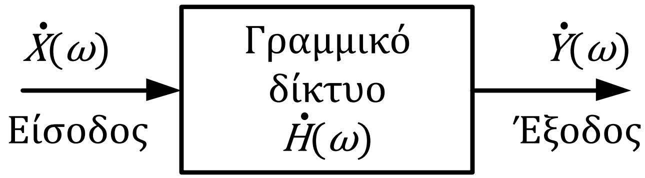


Εισαγωγή

- Παρατηρούμε ότι σε πολύ χαμηλές συχνότητες ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σχεδόν ως ανοιχτοκύκλωμα και η σύνθετη αντίσταση είναι πολύ υψηλή.
- Σε υψηλές συχνότητες ο πυκνωτής παρουσιάζει μικρή σύνθετη αντίσταση.
- Το αντίστροφο συμβαίνει με τον επαγωγό, αφού η σύνθετη αντίσταση του επαγωγού αυξάνεται με τη συχνότητα.

Συνάρτηση μεταφοράς

- Ένα γραμμικό κύκλωμα μπορεί να παρασταθεί από το παρακάτω διάγραμμα:



όπου με $\dot{X}(\omega)$, $\dot{Y}(\omega)$ παριστάνονται οι φάσορες εισόδου και εξόδου του δικτύου.

- Η συνάρτηση μεταφοράς $\dot{H}(\omega)$ ενός κυκλώματος είναι το πηλίκο ενός φάσορα εξόδου $\dot{Y}(\omega)$, δηλαδή της τάσης κάποιου στοιχείου ή του ρεύματος, προς ένα φάσορα εισόδου $\dot{X}(\omega)$, δηλαδή την τάση ή το ρεύμα της πηγής.

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}$$

- Θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Συνάρτηση μεταφοράς

- Η είσοδος και η έξοδος μπορούν να είναι είτε τάση είτε ρεύμα σε οποιοδήποτε σημείο του κυκλώματος, οπότε υπάρχουν 4 δυνατές συναρτήσεις. Αν συμβολίσουμε με δείκτες o, i τα μεγέθη εξόδου και εισόδου αντίστοιχα, τότε οι συναρτήσεις αυτές είναι οι εξής:

$$\dot{H}(\omega) = \text{κέρδος τάσης} = \frac{\dot{U}_o\ (\omega)}{\dot{U}_i\ (\omega)}$$

$$\dot{H}(\omega) = \text{κέρδος ρεύματος} = \frac{\dot{I}_o\ (\omega)}{\dot{I}_i\ (\omega)}$$

$$\dot{H}(\omega) = \text{σύνθετη αντίσταση μεταφοράς} = \frac{\dot{U}_o\ (\omega)}{\dot{I}_i\ (\omega)}$$

$$\dot{H}(\omega) = \text{σύνθετη αγωγιμότητα μεταφοράς} = \frac{\dot{I}_o\ (\omega)}{\dot{U}_i\ (\omega)}$$

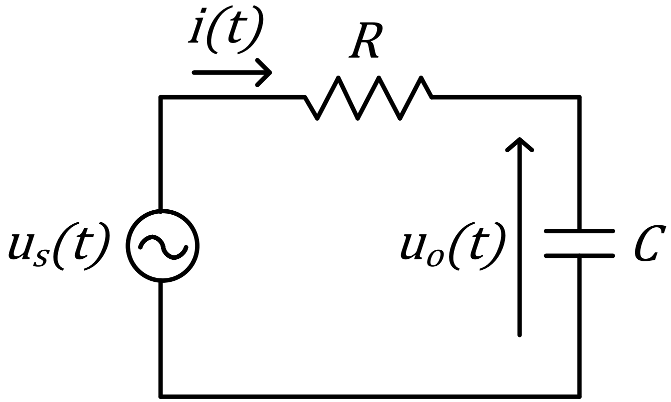
Συνάρτηση μεταφοράς

- Για να βρούμε κάποιο από τα παραπάνω μεγέθη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από τις τεχνικές επίλυσης θέλουμε.
- Η συνάρτηση μεταφοράς γενικά είναι

$$\dot{H}(\omega) = H(\omega)\angle\varphi$$

- Η απόκριση συχνότητας ενός κυκλώματος είναι γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς $\dot{H}(\omega)$ συναρτήσει της συχνότητας ω, καθώς η συχνότητα μεταβάλλεται από $\omega = 0$ έως ∞.

Παράδειγμα 1



- Στο RC κύκλωμα του σχήματος είναι

$$u_s(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$$

- Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_s}$ και η απόκριση συχνότητας.

Απάντηση:

- Με διαιρέτη τάσης:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_s} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)} = \frac{1 - j\omega RC}{1^2 - (j\omega RC)^2} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j\frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Παράδειγμα 1

- Το μέτρο και η γωνία της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{1}{[1+(\omega RC)^2]^2} + \frac{(\omega RC)^2}{[1+(\omega RC)^2]^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+(\omega RC)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}}{\frac{1}{1+(\omega RC)^2}}\right) = \tan^{-1}(-\omega RC)$$

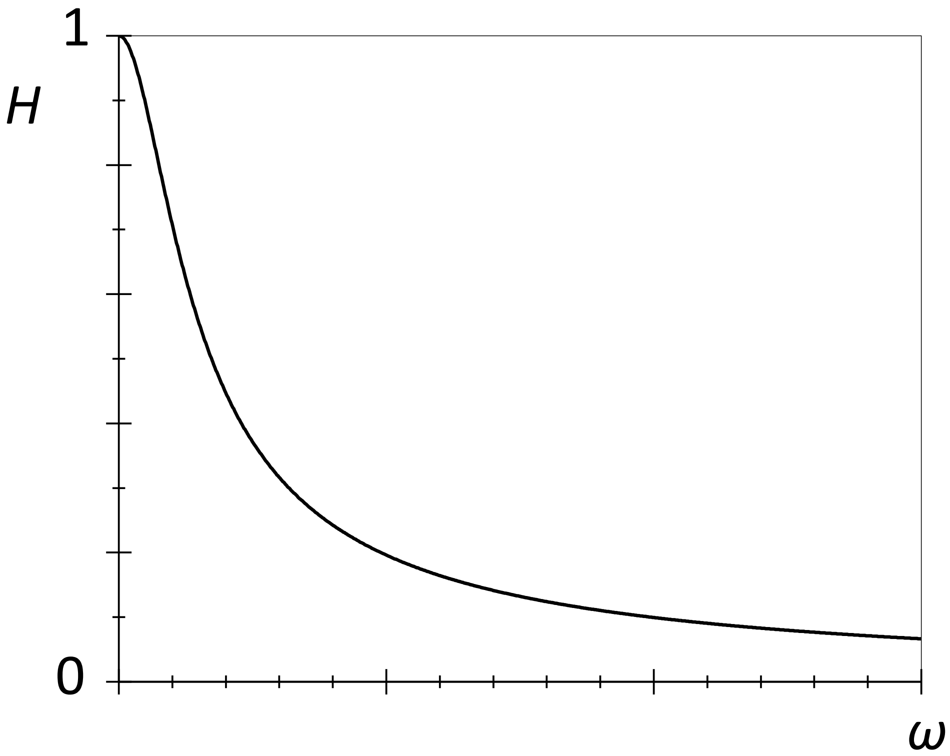
- Έστω $\omega_f = \frac{1}{RC}$. Τότε

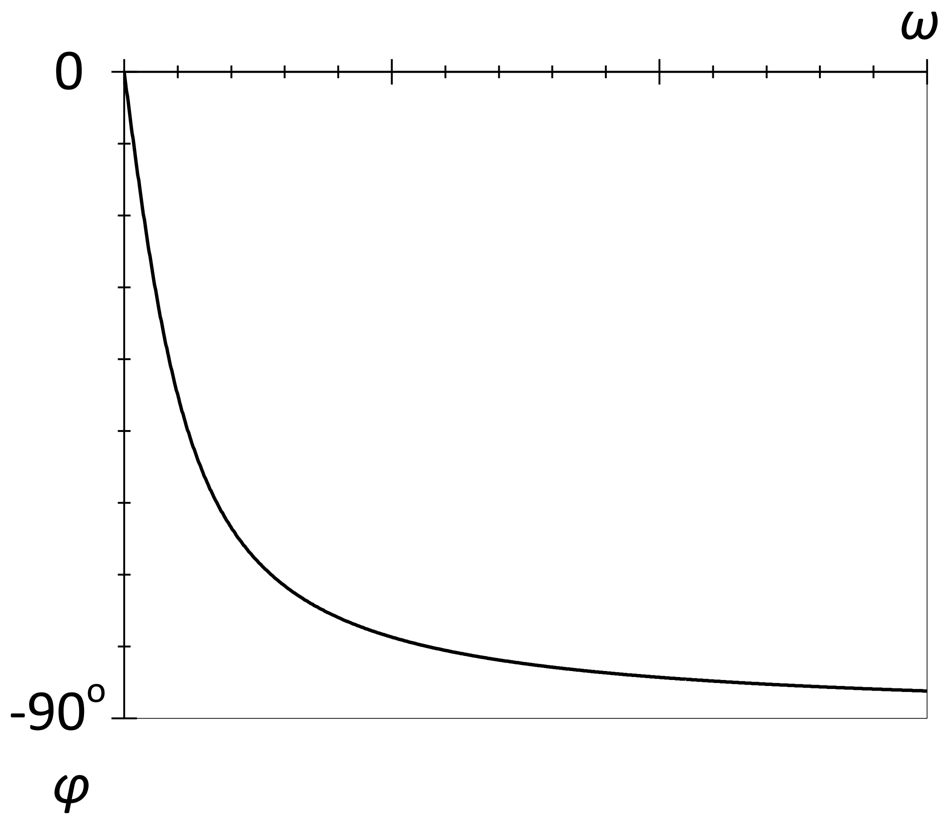
$$H(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_f}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_f}\right)$$

Παράδειγμα 1

- Οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της γωνίας της συνάρτησης μεταφοράς φαίνονται παρακάτω.





Συνάρτηση μεταφοράς

- Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του πολυωνύμου του αριθμητή και του πολυωνύμου του παρονομαστή ως εξής:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{N}(\omega)}{\dot{D}(\omega)}$$

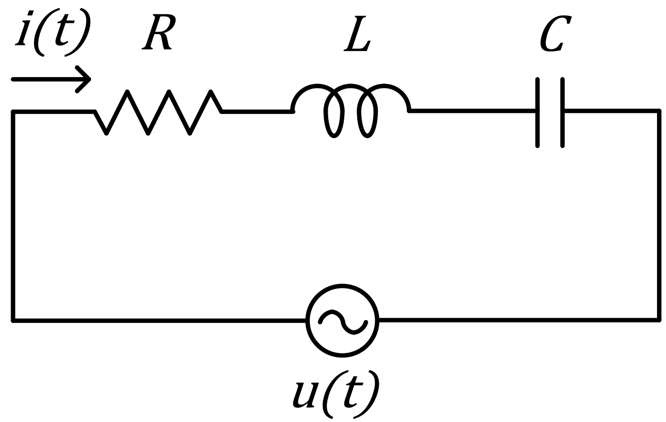
  όπου κοινοί παράγοντες έχουν αλληλοαναιρεθεί. Δηλαδή τα δύο πολυώνυμα δεν είναι απαραίτητα οι ίδιες εκφράσεις με τις συναρτήσεις εισόδου και εξόδου.

- Οι ρίζες της $N(\omega) = 0$ ονομάζονται μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς και παριστάνονται με $j\omega = z_1, z_2, \dots$. Οι ρίζες της $D(\omega) = 0$ ονομάζονται πόλοι και παριστάνονται με $j\omega = p_1, p_2, \dots$.
- Στα μηδενικά η τιμή της συνάρτησης γίνεται μηδέν ενώ στους πόλους άπειρη.

Συντονισμός

- Το πιο χαρακτηριστικό σημείο της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος είναι η οξεία κορυφή που μπορεί να εμφανίζει η χαρακτηριστική του πλάτους του.
- Ο συντονισμός είναι ένα φαινόμενο που προκύπτει σε οποιοδήποτε φυσικό σύστημα όταν μια συνάρτηση διέγερσης που ταλαντεύεται με σταθερό πλάτος παράγει απόκριση με μέγιστο πλάτος. Το σύστημα μπορεί να είναι ηλεκτρικό, μηχανικό κλπ.
- Η κατάσταση αυτή μπορεί να είναι επιθυμητή ή το αντίθετο ανάλογα με το σκοπό του συστήματος.
- Πιο συγκεκριμένος ορισμός: Σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο που περιλαμβάνει τουλάχιστον έναν επαγωγό και έναν πυκνωτή ο συντονισμός είναι η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα όταν η τάση και το ρεύμα στους ακροδέκτες του δικτύου είναι σε φάση. Σε αυτή την κατάσταση η απόκριση του δικτύου παρουσιάζει μέγιστο πλάτος.

Συντονισμός σε RLC σειράς



- Ας εξετάσουμε το κύκλωμα RLC σειράς.
- Η σύνθετη αντίσταση είναι

$$\dot{Z} = \dot{H}(\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

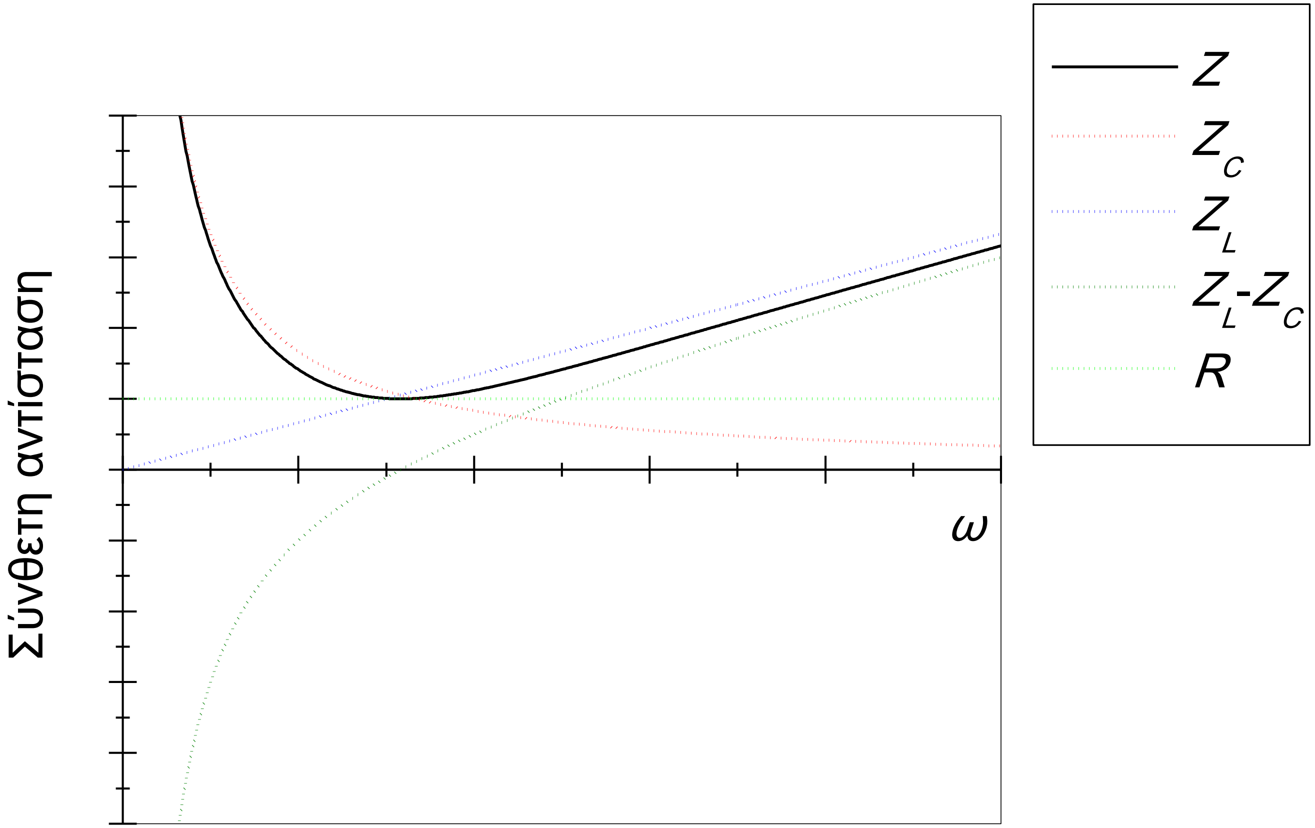
- Το μέτρο και η γωνία της σύνθετης αντίστασης είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

- Οι γραφικές παραστάσεις τους φαίνονται παρακάτω.

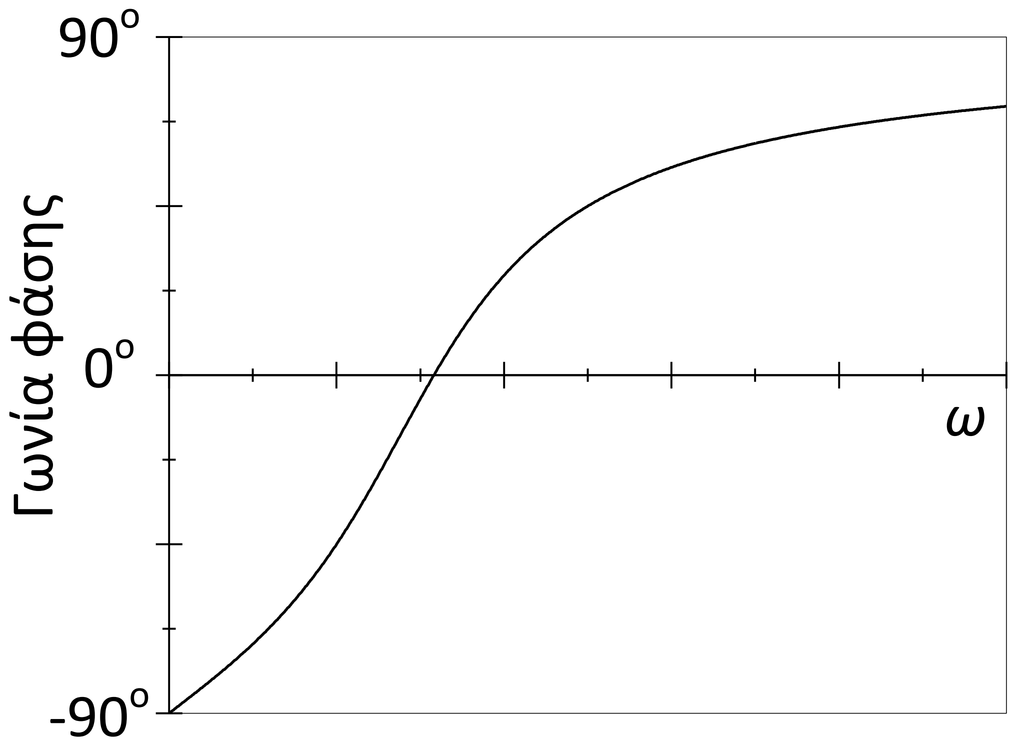
Μέτρο του Z

- Η συνολική σύνθετη αντίσταση και οι επιμέρους των στοιχείων του κυκλώματος συναρτήσει της συχνότητας έχουν την εξής μορφή:



- Παρατηρούμε ότι σε χαμηλές συχνότητες επικρατεί ο πυκνωτής ενώ σε υψηλές ο επαγωγός.

Γωνία του Z



- Παρατηρούμε ότι η διαφορά φάσης τάσης-ρεύματος στο κύκλωμα για μικρές συχνότητες είναι αρνητική ενώ από μια τιμή συχνότητας και πάνω γίνεται θετική.
- Δηλαδή ο συνολικός χαρακτήρας του κυκλώματος αλλάζει από χωρητικός σε επαγωγικό ανάλογα με τη συχνότητα.

Συχνότητα συντονισμού

- Σε ποια συχνότητα αλλάζει η συμπεριφορά του κυκλώματος;
- Όπως αναφέρθηκε, η σύνθετη αντίσταση είναι

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- Το φανταστικό μέρος της σύνθετης αντίστασης γίνεται μηδέν όταν

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

- Αυτό συμβαίνει στη συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Τότε

$$\dot{Z}_0 = R$$

- Δηλαδή η τάση και το ρεύμα είναι σε φάση, ο χαρακτήρας του κυκλώματος είναι καθαρά ωμικός και ο συντελεστής ισχύος είναι μονάδα.

Συντονισμός σε RLC σειράς

- Το ρεύμα στο κύκλωμα γενικά είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

- Η rms τιμή του είναι

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- Η rms τιμή του ρεύματος γίνεται μέγιστη στη συχνότητα ω_0. Τότε

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{R}$$

- Εφόσον η rms τιμή του ρεύματος γίνεται μέγιστη, η κυματομορφή του ρεύματος στη συχνότητα αυτή θα εμφανίζει το μέγιστο πλάτος. Τότε λέμε ότι έχουμε συντονισμό ρεύματος και η συχνότητα ω_0 ονομάζεται συχνότητα συντονισμού.

Συντονισμός σε RLC σειράς

- Αν $\dot{U}_L, \dot{U}_C, \dot{U}_R$ είναι οι πτώσεις τάσεις στα L, C, R αντίστοιχα τότε ισχύουν τα εξής:

➢ Σε μια συχνότητα ω μικρότερη της συχνότητας συντονισμού:

$$\left|j\omega L\dot{I}\right| < \left|\frac{1}{j\omega C}\dot{I}\right| \Rightarrow \left|\dot{U}_L\right| < \left|\dot{U}_C\right|$$

➢ Στη συχνότητα συντονισμού ω_0:

$$\left|j\omega_0 L\dot{I}_0\right| = \left|\frac{1}{j\omega_0 C}\dot{I}_0\right| \Rightarrow \left|\dot{U}_L\right| = \left|\dot{U}_C\right|$$

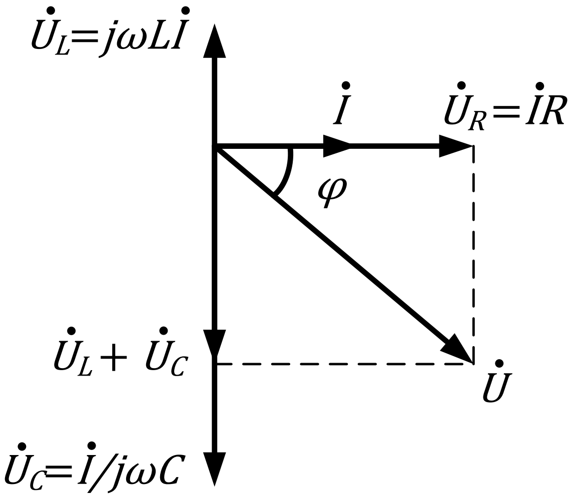
➢ Σε μια συχνότητα ω' μεγαλύτερη της συχνότητας συντονισμού:

$$\left|j\omega' L\dot{I}'\right| > \left|\frac{1}{j\omega' C}\dot{I}'\right| \Rightarrow \left|\dot{U}_L'\right| > \left|\dot{U}_C'\right|$$

- Η συνισταμένη των τάσεων των στοιχείων φαίνεται στα διανυσματικά διαγράμματα που ακολουθούν.

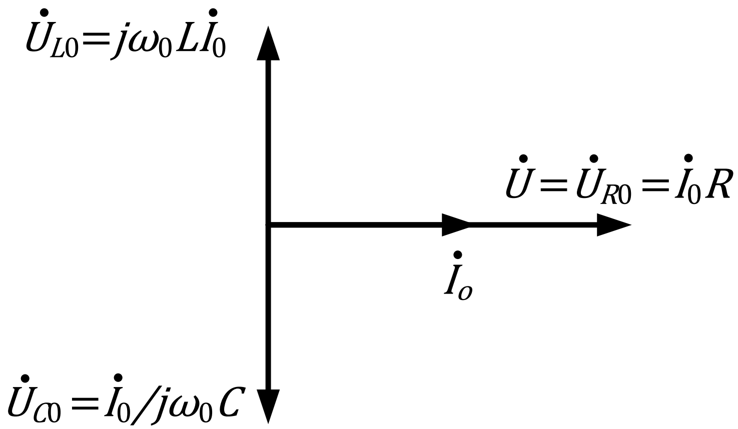
Συντονισμός σε RLC σειράς

Για συχνότητα $\omega < \omega_0$:



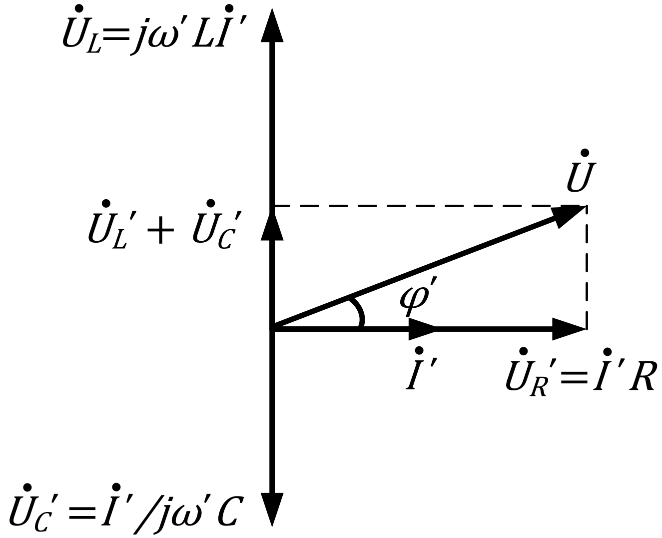
Χωρητικός χαρακτήρας

Για συχνότητα ω_0:



Ωμικός χαρακτήρας

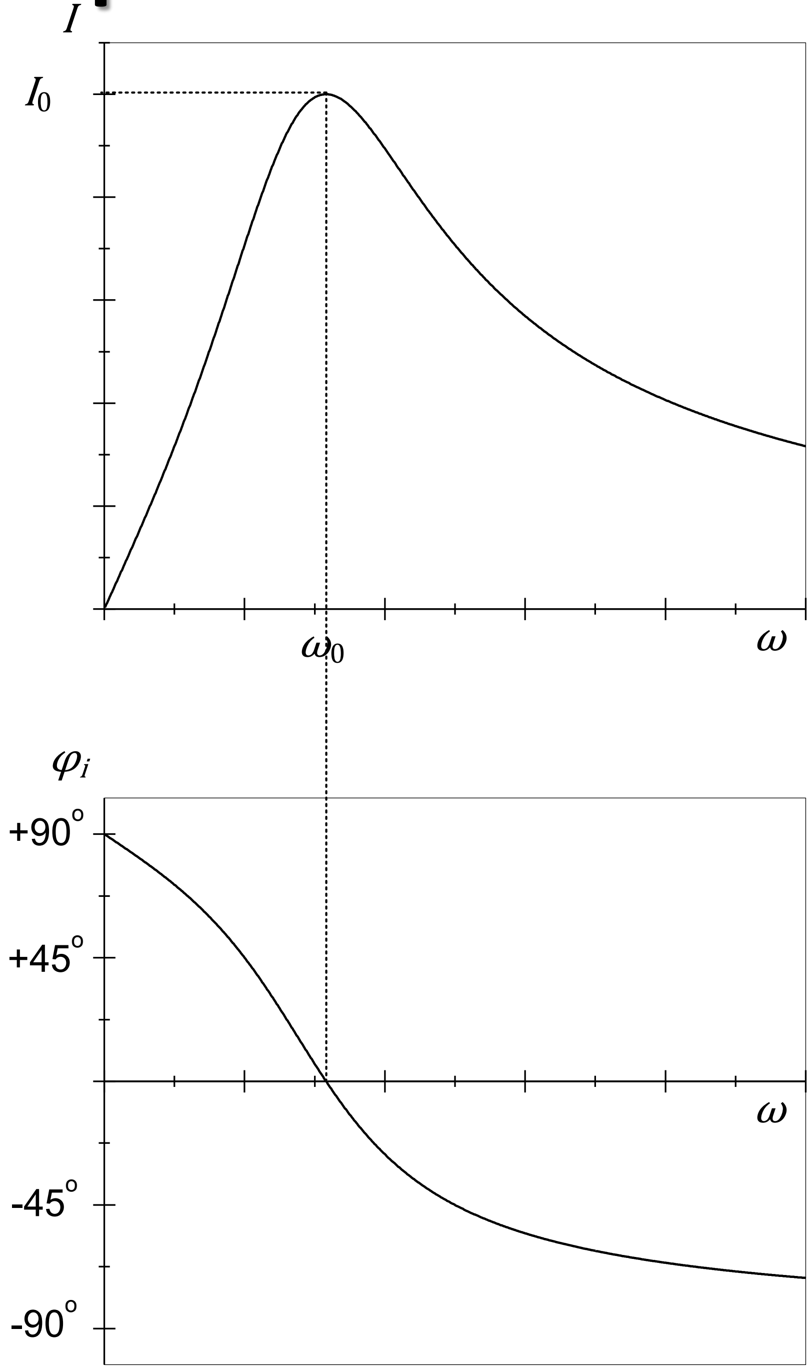
Για συχνότητα $\omega' > \omega_0$:



Επαγωγικός χαρακτήρας

Καμπύλη συντονισμού

- Η απόκριση συχνότητας του ρεύματος του κυκλώματος φαίνεται στο σχήμα.
- Βασικό χαρακτηριστικό της απόκρισης συχνότητας ενός κυκλώματος που εμφανίζει συντονισμό σε κάποια συχνότητα είναι η εμφάνιση οξείας κορυφής στην χαρακτηριστική του πλάτους του.
- Όπως θα δούμε παρακάτω το πόσο οξεία είναι η καμπύλη συντονισμού καθορίζεται από το μέγιστο ποσό ενέργειας που μπορεί να αποθηκεύεται στο κύκλωμα σε σχέση με την ενέργεια που χάνεται κατά τη διάρκεια μιας πλήρους περιόδου της απόκρισης.



Συντελεστής ποιότητας

- Για το κύκλωμα σειράς ορίζεται ο συντελεστής ποιότητας:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Παρατηρούμε ότι ένα κύκλωμα με χαμηλή τιμή R έχει υψηλή τιμή Q.
- Στο συντονισμό προκύπτουν οι εξής τιμές:

$$I_0 = \frac{U}{R} \Rightarrow U_{R0} = U$$

$$U_{L0} = \omega_0 L I_0 = \omega_0 L \frac{U}{R} = QU$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{U}{\omega_0 C R} = QU$$

- Κατά το συντονισμό υπάρχει άνοδος της τάσης κατά μήκος του επαγωγού και του πυκνωτή ίση με το γινόμενο του συντελεστή ποιότητας και της τάσης της πηγής.

Παρατήρηση

- Όπως προέκυψε παραπάνω, στο συντονισμό σειράς ο συνδυασμός πηνίου-πυκνωτή λειτουργεί ως βραχυκύκλωμα και όλη η τάση της πηγής εφαρμόζεται στα άκρα της αντίστασης.
- Οι τάσεις στον επαγωγό και στον πυκνωτή είναι ίσες και αντίθετες, ωστόσο προσοχή: Η κάθε μία ξεχωριστά μπορεί να λάβει πολύ υψηλή τιμή. Πιο συγκεκριμένα, στα στοιχεία αυτά λαμβάνεται η τάση της πηγής ενισχυμένη κατά το συντελεστή ποιότητας.

Συντελεστής ποιότητας

- Το ρεύμα του κυκλώματος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του συντελεστή ποιότητας ως εξής:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\dot{U}}{R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega L}{RQ} - \frac{1}{\omega CRQ}\right)\right]}$$

$$= \frac{\dot{U}}{R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}$$

Εύρος ζώνης

- Επειδή ο εντοπισμός της συχνότητας ω_0 δεν είναι τόσο εύκολος, ορίζεται το εύρος ζώνης.
- Ορίζεται ως εύρος ζώνης το εύρος μεταξύ των συχνοτήτων ω_1 και ω_2, στις οποίες η ενεργός ισχύς του κυκλώματος είναι ίση με τη μισή της ισχύος που καταναλώνεται στο συντονισμό. Οι συχνότητες ονομάζονται συχνότητες μισής ισχύος.
- Οι συχνότητες μισής ισχύος προκύπτουν δηλαδή όταν

$$P_{hp} = \frac{{I_0}^2 R}{2} \Rightarrow I_{hp} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

- Άρα στις συχνότητες μισής ισχύος το ρεύμα του κυκλώματος είναι

$$\frac{\dot{U}}{R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} = \frac{\dot{U}}{R\sqrt{2}}$$

Εύρος ζώνης

- Για το μέτρο ισχύει

$$\frac{U}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}=\frac{U}{R\sqrt{2}}$$

- Επομένως

$$1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=2 \Rightarrow Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=\pm 1$$

- Λύνοντας την εξίσωση και λαμβάνοντας μόνο τις θετικές λύσεις βρίσκουμε

$$\omega_1=\omega_0\left[-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2+1}\right]$$

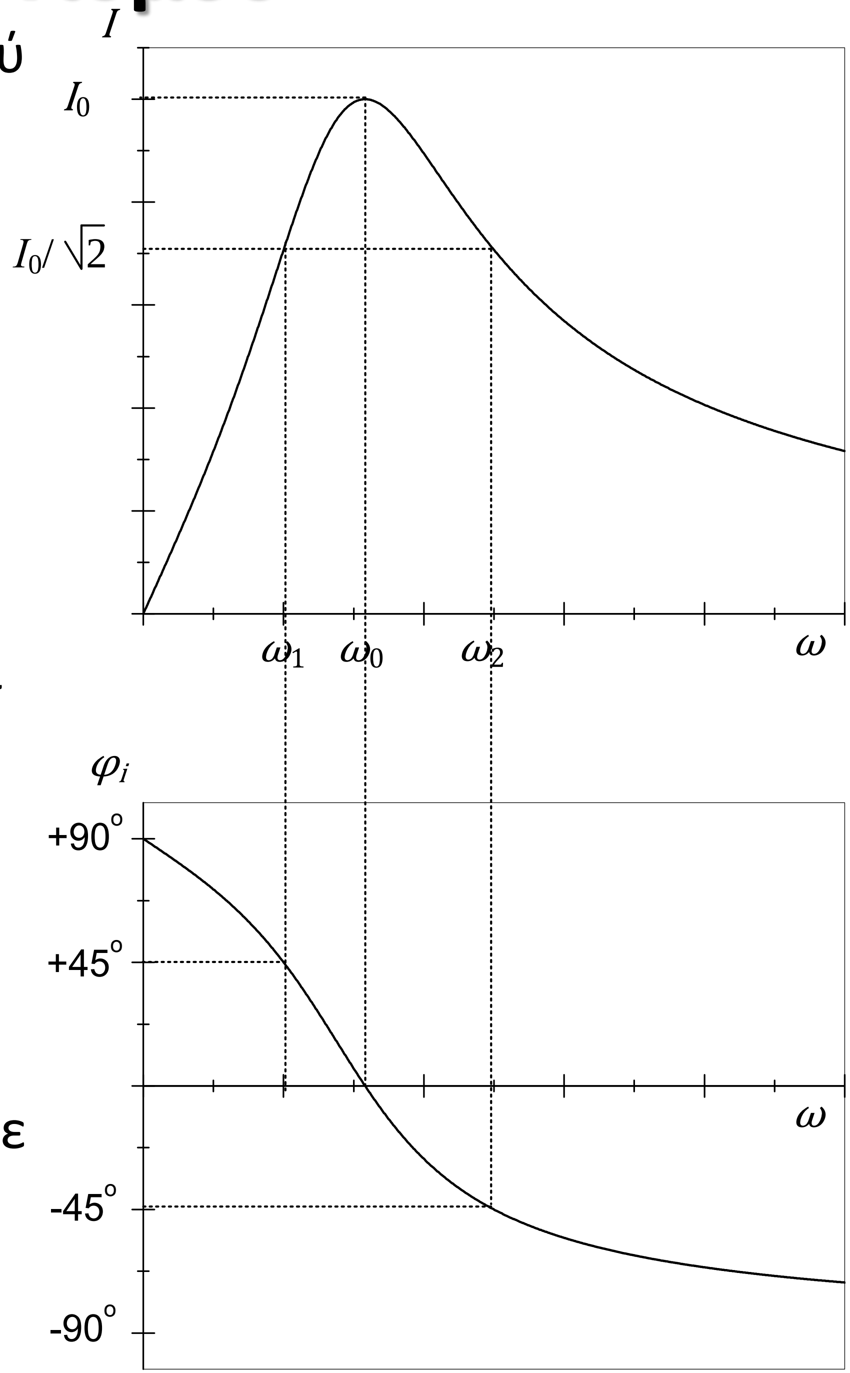
$$\omega_2=\omega_0\left[\frac{1}{2Q}+\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2+1}\right]$$

Καμπύλη συντονισμού

- Βλέπουμε ξανά εδώ την καμπύλη συντονισμού με τις συχνότητες μισής ισχύος.
- Με αφαίρεση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει ότι το εύρος ζώνης είναι

$$BW = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

- Το εύρος ζώνης μειώνεται όσο αυξάνεται ο συντελεστής ποιότητας και η καμπύλη γίνεται πιο οξεία.
- Η δυνατότητα εντοπισμού της συχνότητας συντονισμού εξαρτάται λοιπόν από το Q.
- Αν εφαρμόσουμε ένα σήμα με μεγάλο εύρος συχνοτήτων σε ένα κύκλωμα με υψηλό Q, τότε μόνο οι συχνότητες εντός του εύρους ζώνης δεν θα αποσβεστούν. Το κύκλωμα δρα ως φίλτρο για τις υπόλοιπες.

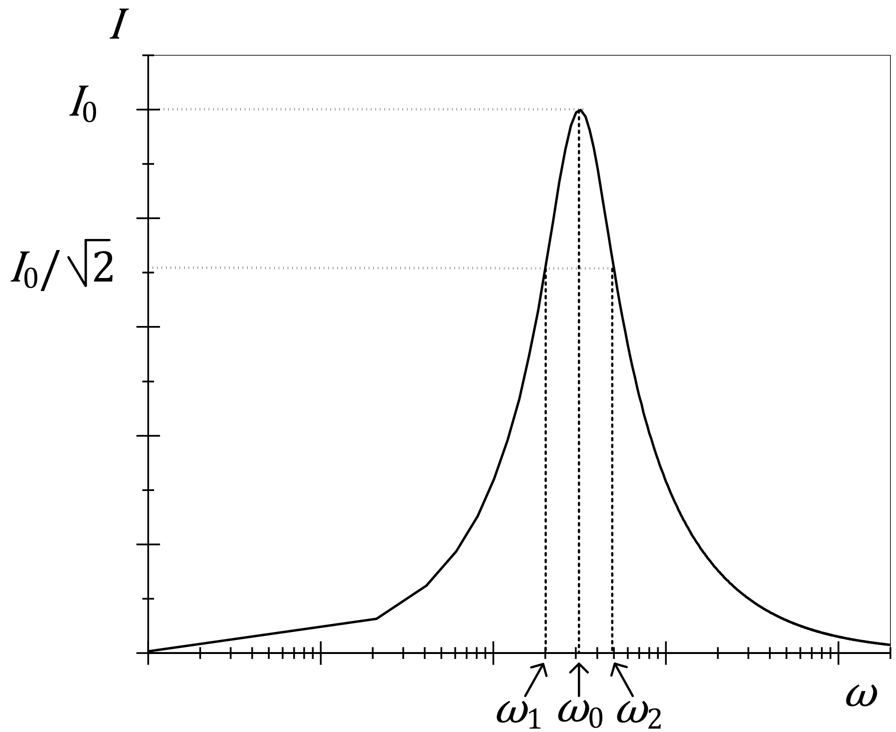


Καμπύλη συντονισμού

- Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων που δίνουν τις πλευρικές συχνότητες προκύπτει επίσης ότι

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

- Αν για τον άξονα των συχνοτήτων χρησιμοποιηθεί λογαριθμική κλίμακα τότε μπορεί να καλυφθεί μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων.
- Τότε παρατηρούμε ότι η καμπύλη έχει τη συμμετρική μορφή του σχήματος.



Συντελεστής ποιότητας Q

- Ο Q έχει πιο γενική σημασία η οποία μπορεί να διερευνηθεί μέσω ανάλυσης ενέργειας του κυκλώματος που εξετάζουμε.
- Έστω ότι εφαρμόζουμε στο RLC σειράς τάση στη συχνότητα συντονισμού.

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega_0 t$$

- Το ρεύμα θα είναι

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{R}\cos\omega_0 t$$

- Η τάση στον πυκνωτή θα είναι

$$u_C(t) = \frac{U\sqrt{2}}{\omega_0 RC}\cos(\omega_0 t - 90°) = \frac{U\sqrt{2}}{\omega_0 RC}\sin\omega_0 t$$

- Η ενέργεια που αποθηκεύεται σε επαγωγό είναι

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}L\left(\frac{U\sqrt{2}}{R}\cos\omega_0 t\right)^2 = \frac{2U^2L}{2R^2}\cos^2\omega_0 t \quad [\mathrm{J}]$$

Συντελεστής ποιότητας Q

- Και σε πυκνωτή είναι

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C {u_C}^2(t) = \frac{1}{2} C \left(\frac{U\sqrt{2}}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \right)^2 = \frac{2U^2}{2{\omega_0}^2 R^2 C} \sin^2 \omega_0 t \quad [\mathrm{J}]$$

- Η συχνότητα συντονισμού είναι

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Άρα η ενέργεια του πυκνωτή γράφεται

$$w_C(t) = \frac{2U^2 L}{2R^2} \sin^2 \omega_0 t$$

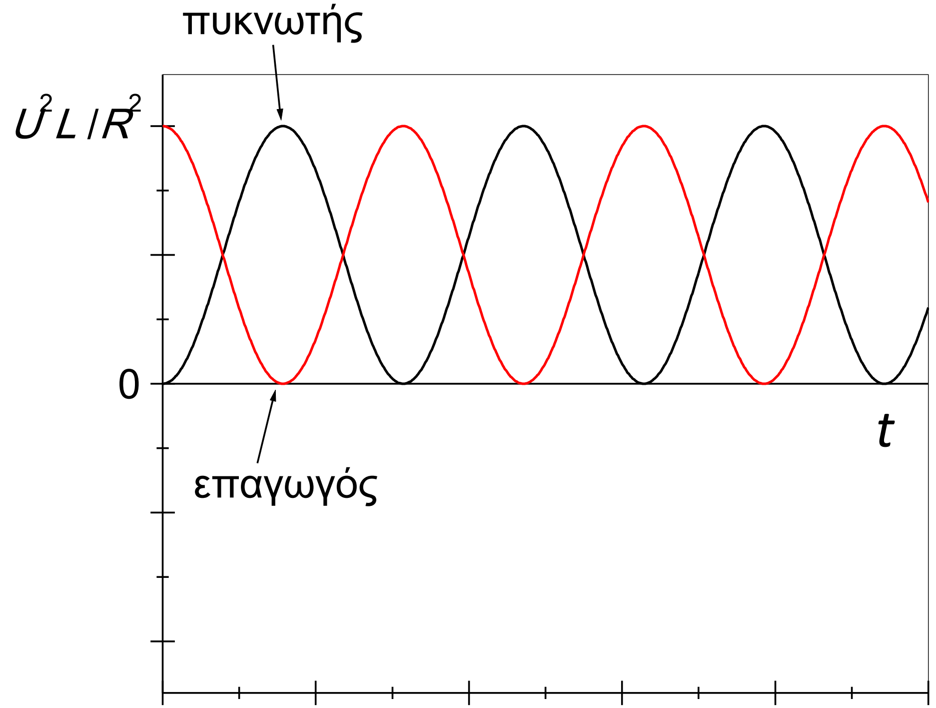
- Η συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο κύκλωμα είναι

$$w_L(t) + w_C(t) = \frac{U^2 L}{R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{U^2 L}{R^2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{U^2 L}{R^2}$$

- Δηλαδή η συνολική ενέργεια είναι μια σταθερά.

Συντελεστής ποιότητας Q

- Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι κυματομορφές της ενέργειας των δύο στοιχείων.
- Παρατηρούμε ότι στο συντονισμό υπάρχει συνεχής ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του μαγνητικού πεδίου του επαγωγού και του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.



- Όταν η ενέργεια στο ένα στοιχείο είναι μέγιστη στο άλλο είναι ελάχιστη.
- Η συνολική όμως ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο κύκλωμα κάθε στιγμή είναι σταθερή.

Συντελεστής ποιότητας Q

- Η ενέργεια που καταναλώνεται από το κύκλωμα σε μία περίοδο είναι

$$W_D = \int_0^T i^2(t)Rdt = \int_0^T \left(\frac{2U^2}{R^2}\cos^2\omega_0 t\right)Rdt$$

- Με δεδομένο ότι $\cos^2\omega t = \frac{\cos 2\omega t+1}{2}$, θα είναι

$$W_D = \frac{U^2T}{R}$$

- Η ενέργεια που αποθηκεύεται βρέθηκε παραπάνω και είναι

$$W_S = \frac{U^2L}{R^2}$$

- Το πηλίκο τους είναι

$$\frac{W_S}{W_D} = \frac{\frac{U^2L}{R^2}}{\frac{U^2T}{R}} = \frac{L}{RT} = \frac{\omega_0 L}{2\pi R}$$

Συντελεστής ποιότητας Q

- Επομένως

$$Q = 2\pi \frac{W_S}{W_D}$$

- Δηλαδή ο συντελεστής ποιότητας συσχετίζει την μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται με την ενέργεια που καταναλώνεται στο κύκλωμα ανά κύκλο της ταλάντωσης.
- Αυτή η έκφραση του συντελεστή εφαρμόζεται σε ηλεκτρικά, μηχανικά, ακουστικά κλπ συστήματα και γι’ αυτό θεωρείται ότι είναι ο ορισμός του.

Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Έστω ότι $R = 2\ \Omega$, $C = 0.001\ \mathrm{F}$, $L = 0.1\ \mathrm{H}$. Επίσης

$$u(t) = 14.142\sqrt{2}\cos\omega t\ \ \mathrm{V}$$

- Η συχνότητα συντονισμού υπολογίζεται ως εξής:

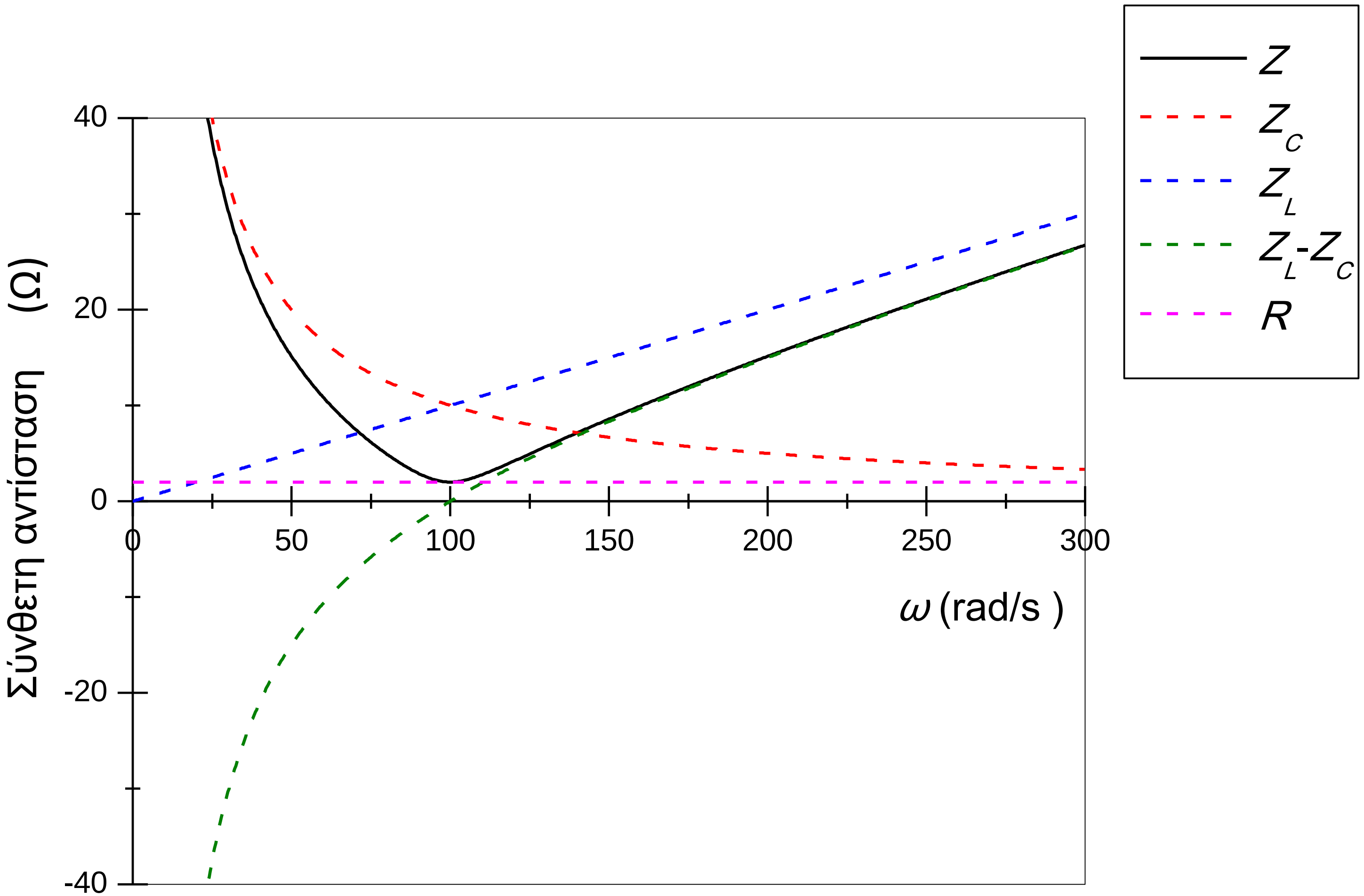
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100\ \mathrm{rad/s}$$

ή

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 15.915\ \mathrm{Hz}$$

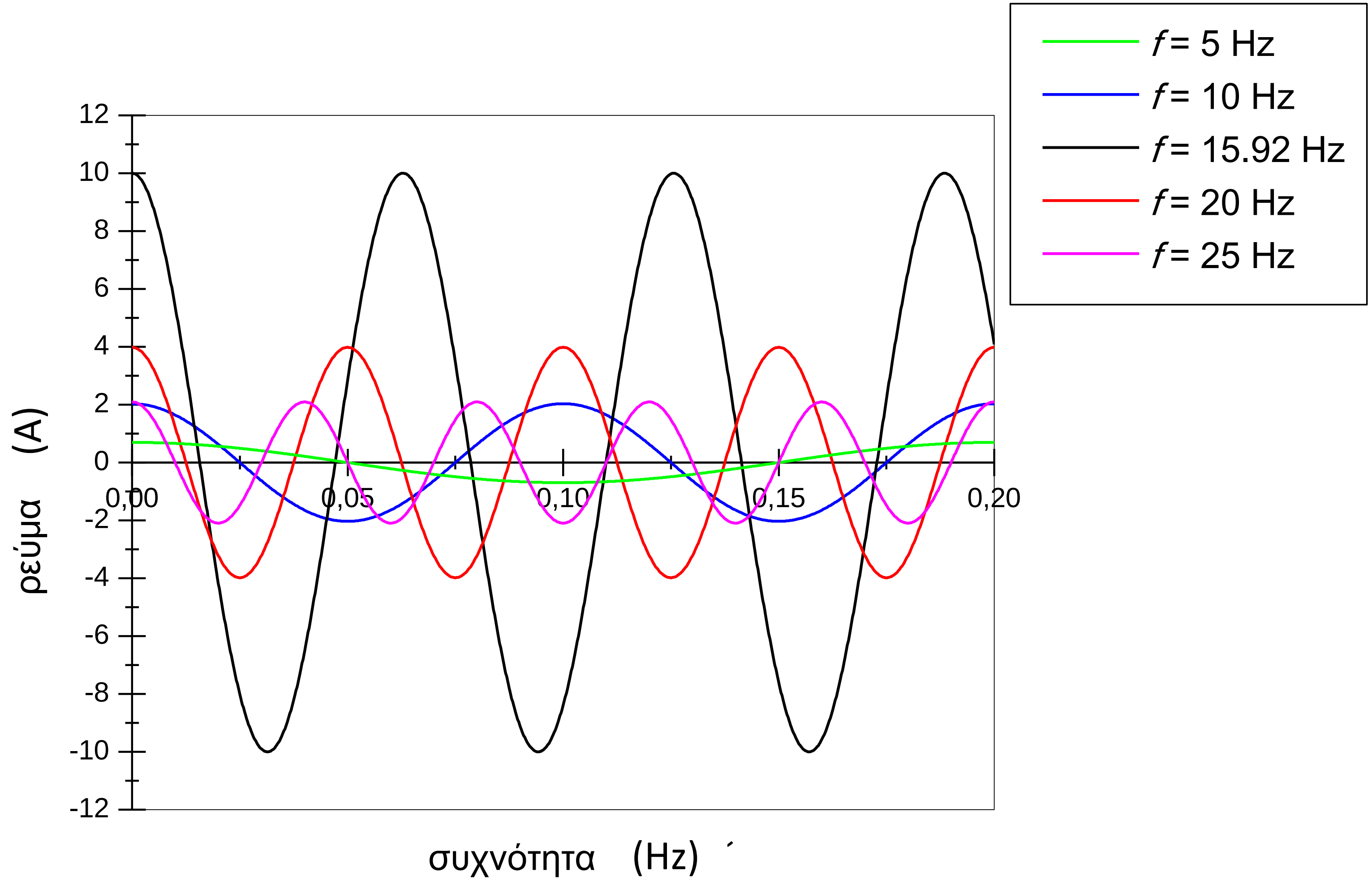
Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Στο διάγραμμα φαίνεται η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος. Γίνεται ελάχιστη στη συχνότητα συντονισμού.



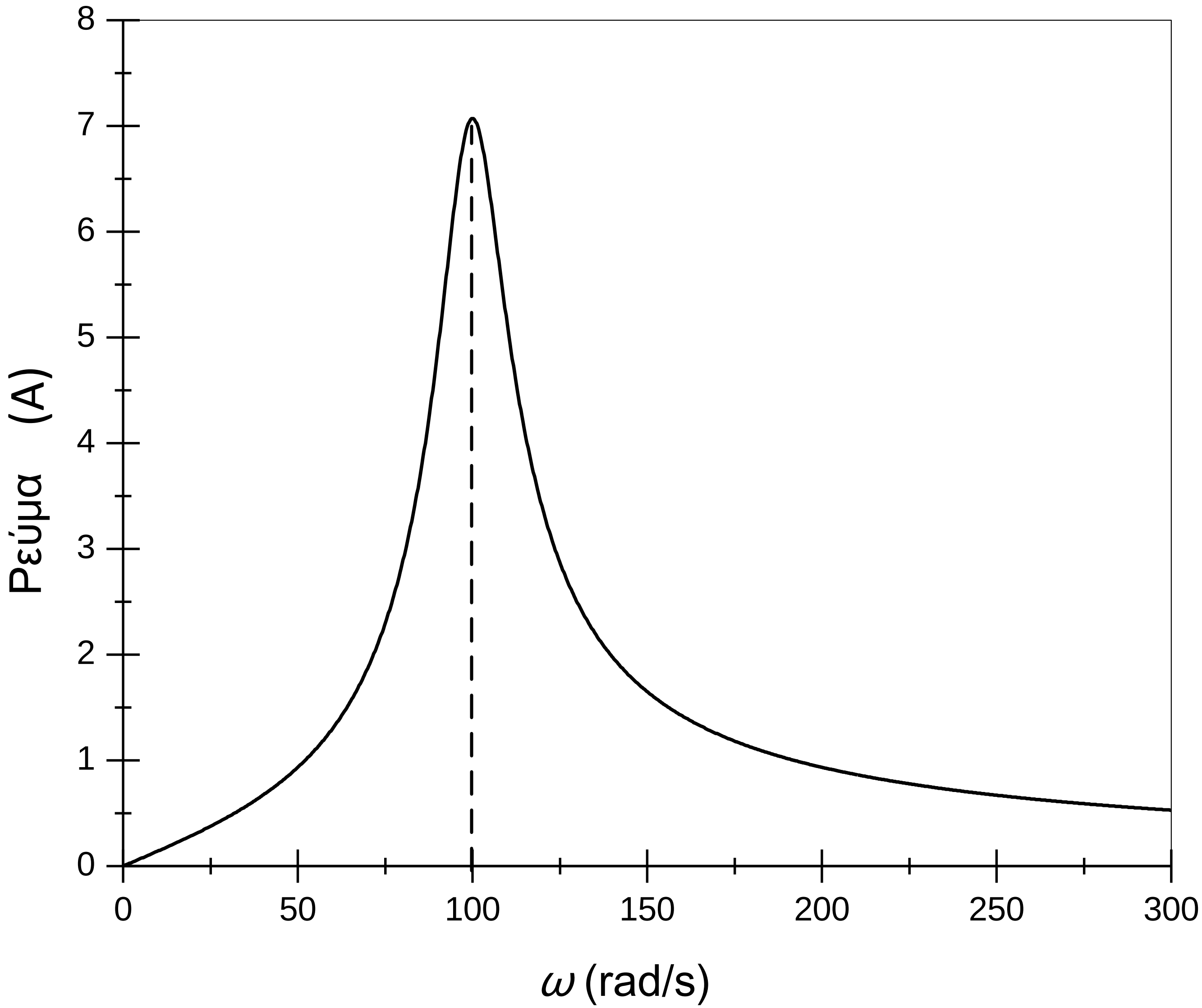
Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Για διάφορες συχνότητες αλλάζει το πλάτος του ρεύματος. Γίνεται μέγιστο στη συχνότητα συντονισμού.



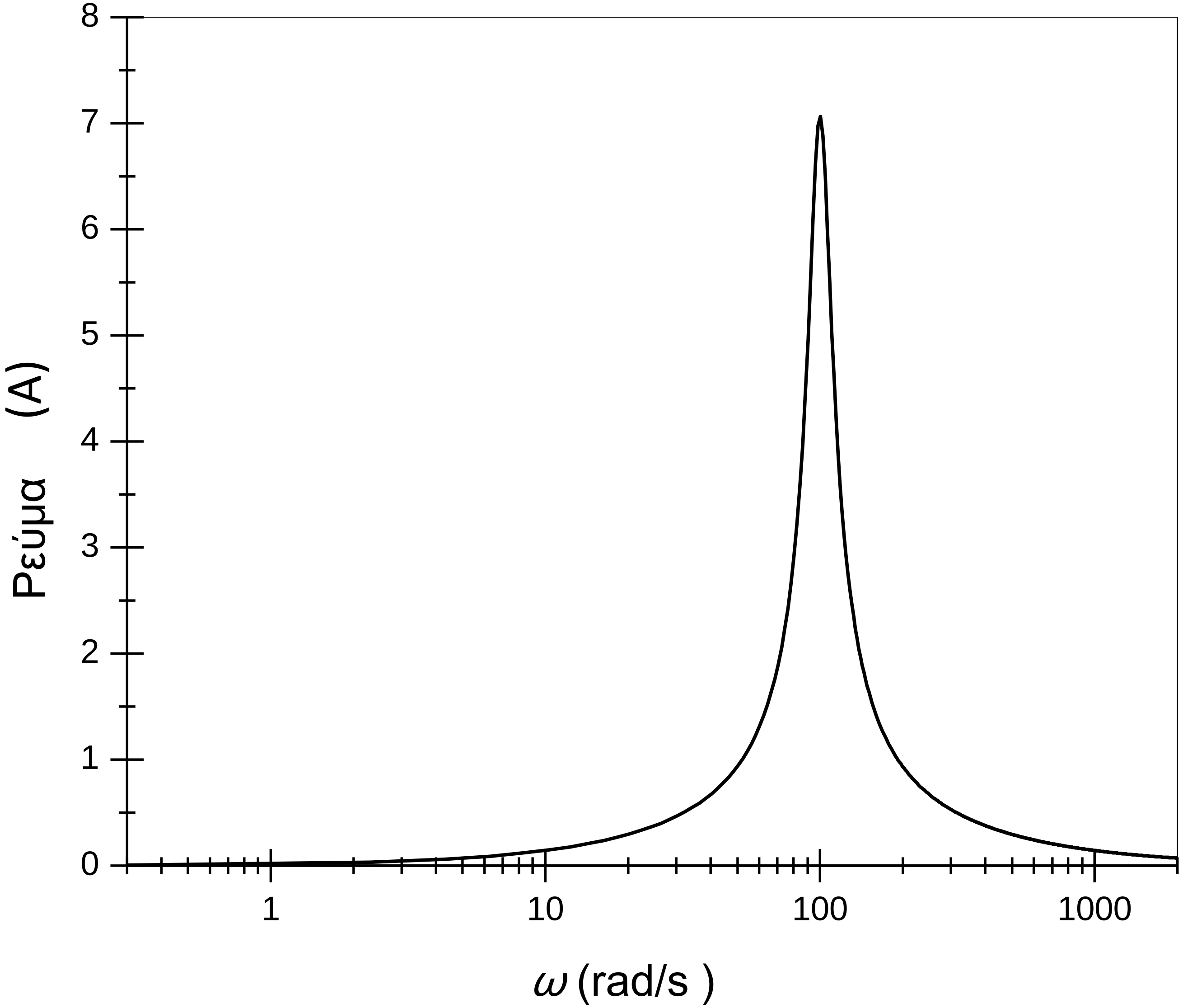
Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Η καμπύλη συντονισμού είναι:



Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Ή αλλιώς:



Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Παρατηρούμε ότι πράγματι $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$.
- Οι συχνότητες μισής ισχύος προκύπτουν όταν

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 5 \text{ A}$$

- Ο συντελεστής ποιότητας είναι

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 5$$

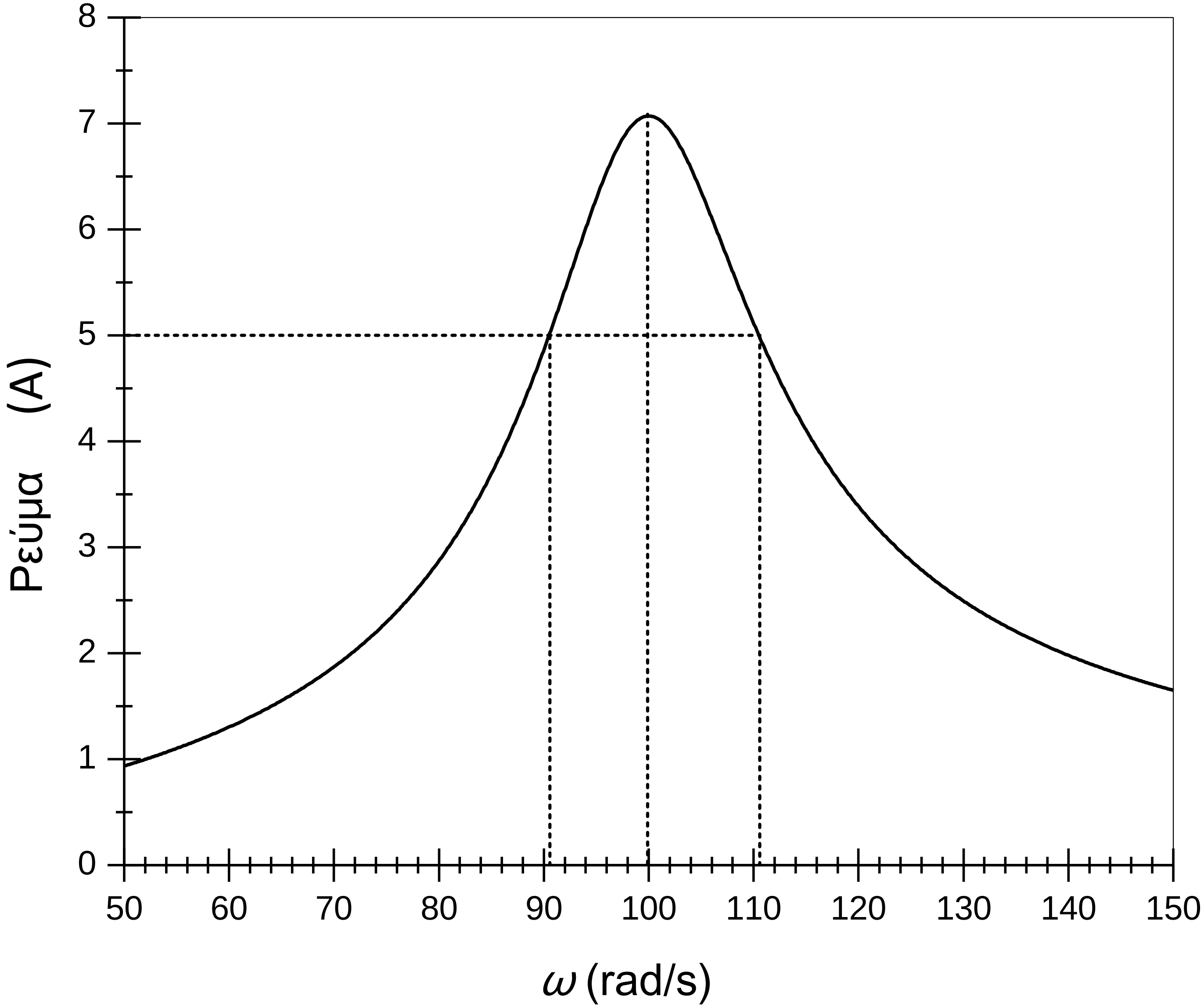
- Οι συχνότητες μισής ισχύος είναι

$$\omega_1 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] = 90.5 \text{ rad/s}$$

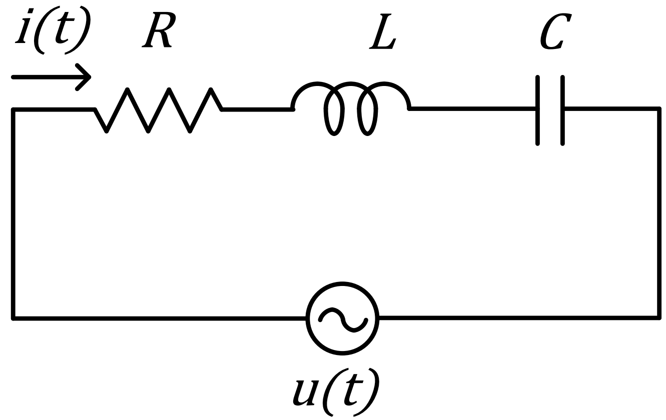
$$\omega_2 = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] = 110.5 \text{ rad/s}$$

Παράδειγμα κυκλώματος RLC σειράς

- Πράγματι από την παραπάνω καμπύλη βρίσκουμε:



Παράδειγμα 2



- Το κύκλωμα του σχήματος θέλουμε να λειτουργεί με συχνότητα συντονισμού $\omega_0 = 1000\ \mathrm{rad}/s$ και εύρος ζώνης $100\ \mathrm{rad}/s$. Αν $C = 1\ \mu\mathrm{F}$ να βρεθούν οι τιμές των άλλων δύο στοιχείων.

Απάντηση:

- Η συχνότητα συντονισμού είναι

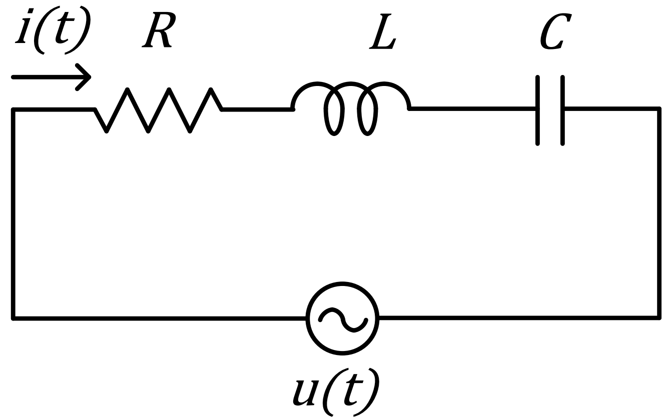
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{1}{LC} = 10^6 \Rightarrow L = 1\ \mathrm{H}$$

- Το εύρος ζώνης είναι

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \Rightarrow \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{1}{100} \Rightarrow R = 100\ \Omega$$

Παράδειγμα 3

- Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι $R = 4\ \Omega$, $L = 25\ \mathrm{mH}$. Το κύκλωμα θέλουμε να λειτουργεί με συντελεστή ποιότητας 50. Να βρεθούν οι συχνότητες μισής ισχύος, το εύρος ζώνης και η τιμή του C.



Απάντηση:

- Η συχνότητα συντονισμού είναι

$$\omega_0 = \frac{QR}{L} = 8000\ \mathrm{rad/s}$$

- Το εύρος ζώνης είναι

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 160\ \mathrm{rad/s}$$

- Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C = \frac{1}{Q\omega_0 R} = 0.625\ \mu\mathrm{F}$$

Παράδειγμα 3

- Οι συχνότητες μισής ισχύος είναι

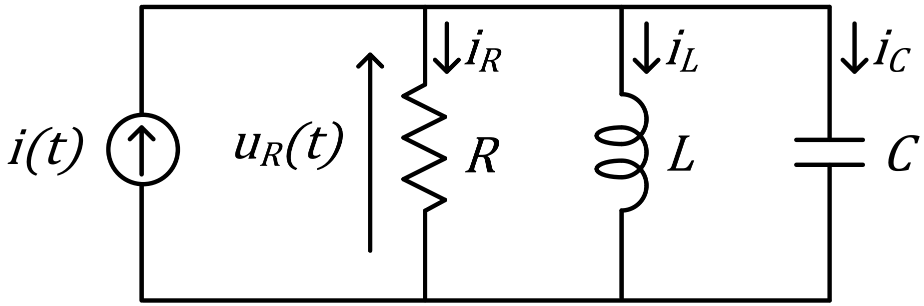
$$\omega_1 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] = 7921.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] = 8080.4 \text{ rad/s}$$

- Παρατήρηση: Για υψηλές τιμές του Q προκύπτει συμμετρία στα διαστήματα $\omega_0 - \omega_1$ και $\omega_2 - \omega_0$.

Συντονισμός σε παράλληλο RLC

- Θα εξετάσουμε τώρα το κύκλωμα παράλληλου συντονισμού.



- Το ρεύμα θα είναι

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

$$\dot{I} = \dot{U}\dot{Y} = \dot{U}\left[G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]$$

- Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι

$$\dot{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

όπου $G = \frac{1}{R}$.

Συντονισμός σε παράλληλο RLC

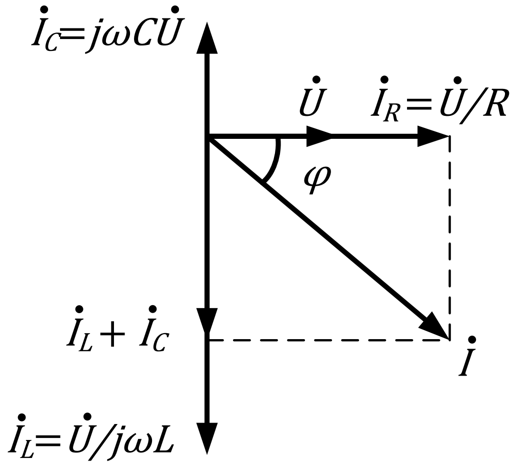
- Συντονισμός προκύπτει όταν το φανταστικό μέρος της $\dot{Y}$ είναι μηδέν, δηλαδή όταν

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

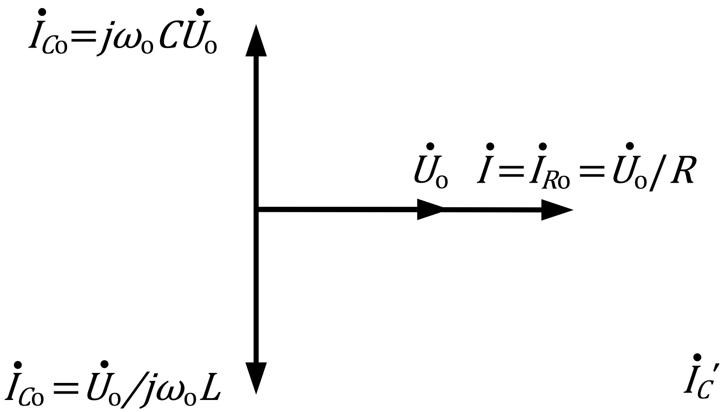
- Τότε

$$\dot{Y}_0 = G$$

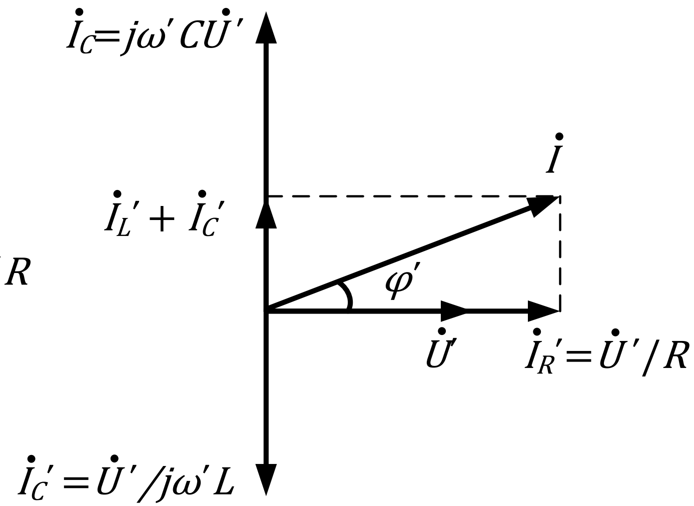
Για συχνότητα $\omega < \omega_0$:



Για συχνότητα ω_0:



Για συχνότητα $\omega' > \omega_0$:



Συντονισμός σε παράλληλο RLC

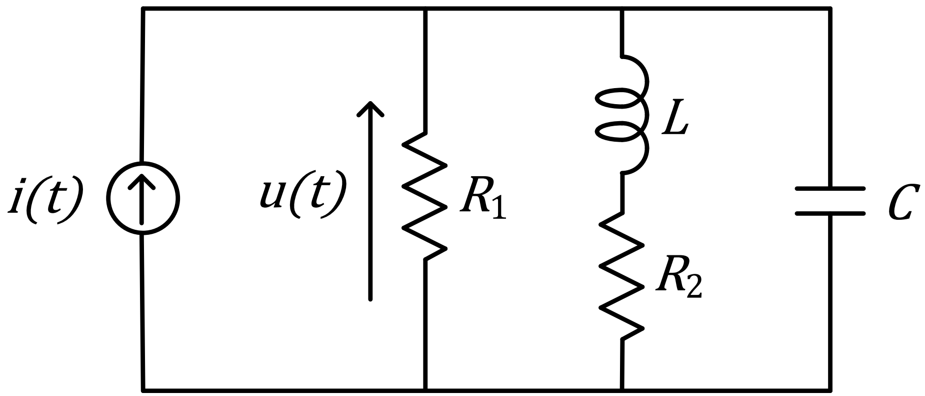
- Προκύπτει ότι

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{G\omega_0 L} = R\omega_0 C = \frac{\omega_0 C}{G}$$

- Οι σχέσεις για τις συχνότητες μισής ισχύος συναρτήσει του Q είναι ίδιες με αυτές του κυκλώματος σειράς.

Παράδειγμα 4

- Να βρεθεί η συχνότητα συντονισμού στο κύκλωμα του σχήματος. Δίνονται: $R_1 = 50\ \Omega$, $L = 1\ \mathrm{H}$, $R_2 = 2\ \Omega$, $C = 0.005\ \mathrm{F}$.



Απάντηση:

- Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι

$$\dot{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - j\omega L}{{R_2}^2 + (\omega L)^2} + j\omega C$$

$$= \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{{R_2}^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{{R_2}^2 + (\omega L)^2}\right)$$

- Συντονισμός προκύπτει όταν

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{{R_2}^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 14\ \mathrm{rad/s}$$

Topic

1. Τριφασικά Κυκλώματα
2. Απόκριση συχνότητας - Συντονισμός
3. **Μεταβατικά φαινόμενα**

Εισαγωγή

- Ένας πυκνωτής έχει την ιδιότητα να αποθηκεύει ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στον αρνητικά και θετικά φορτισμένο οπλισμό του.
- Αν συνδεθεί στα άκρα του ένα κύκλωμα μέσω του οποίου τα αρνητικά φορτία θα κινηθούν προς τα θετικά, δηλαδή θα υπάρξει ροή ρεύματος. Η ηλεκτρική ενέργεια θα μετατραπεί σε θερμότητα στις αντιστάσεις του κυκλώματος.
- Η τάση στα άκρα του πυκνωτή μεταβάλλεται σταδιακά παράλληλα με την αποθηκευμένη ενέργεια. Ο ρυθμός απελευθέρωσης της ενέργειας και της μεταβολής της τάσης εξαρτάται από τις παραμέτρους του κυκλώματος.
- Αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζει ο επαγωγός, με τη διαφορά ότι ενέργεια αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του και το μέγεθος που μεταβάλλεται σταδιακά είναι το ρεύμα του.
- Μεταβολή σε ένα κύκλωμα μπορεί να προκύψει λόγω μεταβολής στην πηγή ή λόγω ανοίγματος ή κλεισίματος διακοπτών.

Εισαγωγή

- Εξαιτίας των στοιχείων που αποθηκεύουν ενέργεια τη μεταβολή αυτή ακολουθεί μια μεταβατική περίοδος κατά την οποία τα ρεύματα των κλάδων και οι τάσεις των στοιχείων μεταβάλλονται από τις προηγούμενες στις νέες τιμές τους, μέχρι τελικά το σύστημα να καταλήξει σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.
- Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με την ανάλυση κυκλωμάτων στη μεταβατική αυτή κατάσταση λειτουργίας.
- Μια σημαντική παράμετρος που θα εξετάσουμε είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος, η οποία δείχνει πόσο γρήγορα αποκρίνεται αυτό στις μεταβολές.
- Όταν στο κύκλωμα υπάρχει μόνο ένα στοιχείο με δυνατότητα αποθήκευσης ενέργειας, τότε το κύκλωμα περιγράφεται από διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού. Όταν υπάρχει και επαγωγός και πυκνωτής στο κύκλωμα τότε αυτό περιγράφεται από διαφορική δευτέρου βαθμού.
- Πρέπει να λύσουμε τη διαφορική που προκύπτει ανάλογα με το κύκλωμα για να βρούμε κάποια τάση ή ρεύμα.

Εισαγωγή

- Δεν μας ενδιαφέρει τόσο η τεχνική επίλυσης όσο η ίδια η λύση.
- Θα διατυπώσουμε τη γενική μορφή αυτής της λύσης και στη συνέχεια θα τη θεωρούμε δεδομένη. Θα αναπτύξουμε έτσι έναν πιο απλό πρακτικό τρόπο για την ανάλυση των κυκλωμάτων χωρίς επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για κάθε ένα από τα κυκλώματα που πρέπει να εξετάσουμε.
- Θα εξετάσουμε σχετικά απλά κυκλώματα. Η ανάλυση γίνεται πολύ δύσκολη για πιο σύνθετα κυκλώματα. Επιπλέον στο επόμενο μάθημα εξετάζεται μια γενική μέθοδος για την αντιμετώπιση αυτής καθώς και πολλών άλλων περιπτώσεων.

Φυσική και εξαναγκασμένη απόκριση

- Απόκριση ενός κυκλώματος είναι η μεταβολή των μεταβλητών του (τάσης, ρεύματος) συναρτήσει του χρόνου.
- Εξετάζουμε την απόκριση του κυκλώματος με και χωρίς την επίδραση ανεξάρτητων πηγών.
- Η φυσική απόκριση προκύπτει αν θεωρήσουμε το κύκλωμα χωρίς τις πηγές (πηγές τάσης βραχυκυκλωμένες και ρεύματος ανοιχτοκυκλωμένες) και εξαρτάται από τα στοιχεία του κυκλώματος (R, L, C).
- Για να βρούμε τη φυσική απόκριση θεωρούμε ότι ο επαγωγός ή πυκνωτής του κυκλώματος έχει αποθηκεύσει ενέργεια σε κάποια προηγούμενη κατάσταση του κυκλώματος. Δηλαδή η φυσική απόκριση εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.
- Με δεδομένο ότι κανένα πραγματικό κύκλωμα δεν μπορεί να διατηρεί την αποθηκευμένη ενέργεια για πάντα και ότι οι εσωτερικές αντιστάσεις θα μετατρέψουν τελικά όλη την αποθηκευμένη ενέργεια σε θερμότητα, η απόκριση αυτή αναμένεται να φθίνει.

Φυσική και εξαναγκασμένη απόκριση

- Εξαναγκασμένη απόκριση ονομάζεται η απόκριση του κυκλώματος όταν δρουν σε αυτό ανεξάρτητες πηγές και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν.
- Το άθροισμα φυσικής και εξαναγκασμένης δίνει την πλήρη απόκριση του κυκλώματος.

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Μια διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού όπως αυτές που πρόκειται να μας απασχολήσουν έχει τη γενική μορφή

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

- Η μεταβλητή $x(t)$ παριστάνει τάση ή ρεύμα. Η σταθερά $1/\tau$ εξαρτάται από τα στοιχεία του κυκλώματος και η συνάρτηση $f(t)$ παριστάνει τη διέγερση του κυκλώματος (πηγής τάσης ή ρεύματος).
- Έστω $x(t) = x_f(t)$ μια λύση της εξίσωσης αυτής.
- Επίσης ορίζεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

- Δεν περιλαμβάνει τη διέγερση.
- Έστω $x(t) = x_n(t)$ μια λύση αυτής.

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Η $x(t) = x_f(t) + x_n(t)$ είναι επίσης λύση της αρχικής διαφορικής. Θέλουμε να βρούμε τη γενική μορφή αυτής της λύσης.
- Ο όρος $x_f(t)$ είναι η εξαναγκασμένη απόκριση και ο όρος $x_n(t)$ η φυσική απόκριση.
- Έστω ότι η διέγερση είναι

$$f(t) = A \text{ (σταθερά)}$$

- Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελείται τότε από δύο μέρη που προκύπτουν με επίλυση των

$$\frac{dx_f(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x_f(t) = A$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x_n(t) = 0$$

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Για την πρώτη εξίσωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι η λύση θα είναι επίσης σταθερά δηλαδή

$$x_f(t) = K_1 \text{ (σταθερά)}$$

- Οπότε με αντικατάσταση της λύσης στη διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$\frac{1}{\tau} K_1 = A \Rightarrow K_1 = \tau A$$

- Η δεύτερη εξίσωση γράφεται ως εξής (χωρισμός μεταβλητών):

$$\frac{\frac{dx_n(t)}{dt}}{x_n(t)} = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{dx_n(t)}{x_n(t)} = -\frac{1}{\tau} dt$$

- Αν πάρουμε το ολοκλήρωμα για τα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει

$$\ln x_n(t) = -\frac{1}{\tau} t + c \Rightarrow x_n(t) = e^{-t/\tau + c}$$

- Η $x_n(t)$ γράφεται ως εξής:

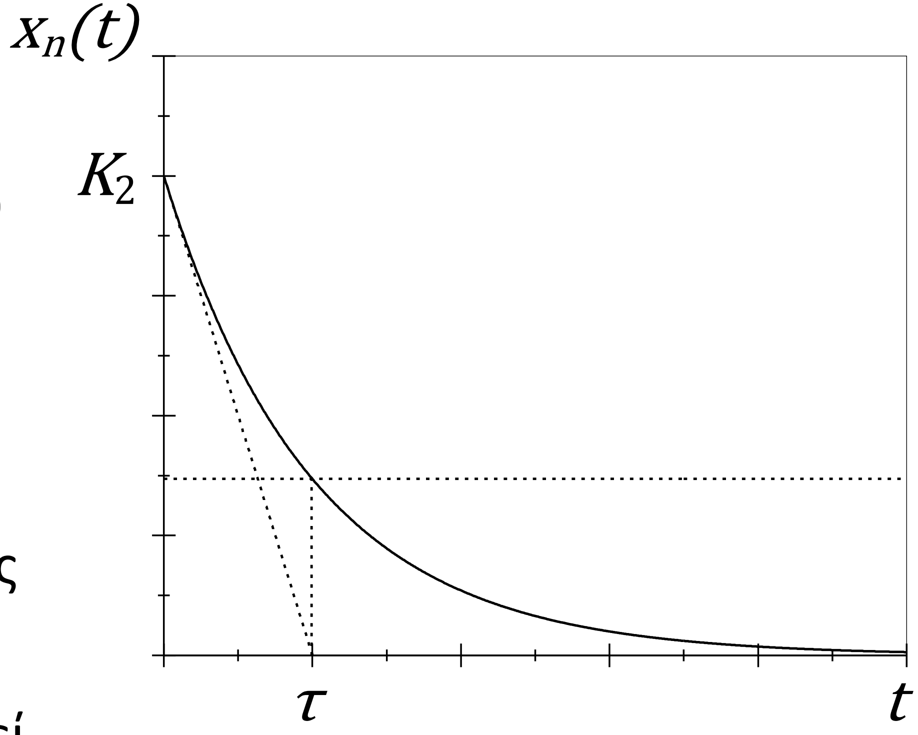
$$x_n(t) = K_2 e^{-t/\tau}, K_2 \text{: σταθερά}$$

Γενική λύση διαφορικής εξίσωσης

- Τελικά δηλαδή προκύπτει ότι

$$x(t) = x_f(t) + x_n(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} = \tau A + K_2 e^{-t/\tau}$$

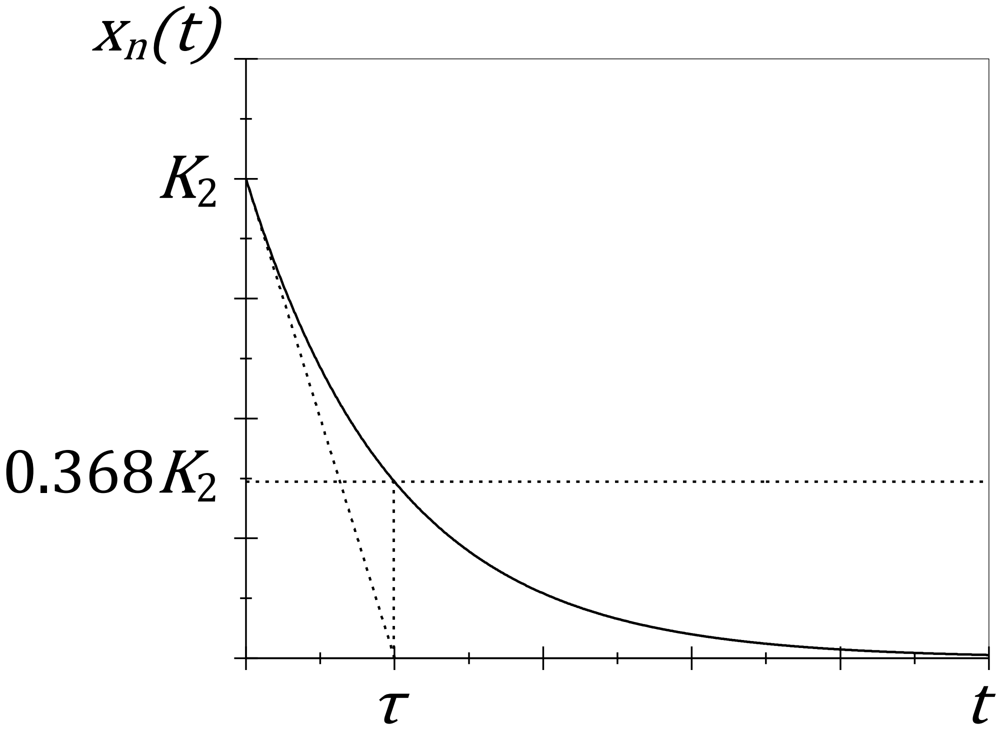
- Η σταθερά K_2 μπορεί να βρεθεί αν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής $x(t)$ κάποια χρονική στιγμή.



- Ο όρος $K_2 e^{-t/\tau}$ είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση του χρόνου, η οποία αν $\tau > 0$ έχει τιμή K_2 για $t = 0$ και τιμή 0 για $t \to \infty$. Ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει εξαρτάται από τη σταθερά τ.
- Ο όρος K_1 αναφέρεται στην λύση μόνιμης κατάστασης. Είναι η τιμή της $x(t)$ όταν $t \to \infty$, όταν ο δεύτερος όρος έχει μειωθεί τόσο πολύ που μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος.

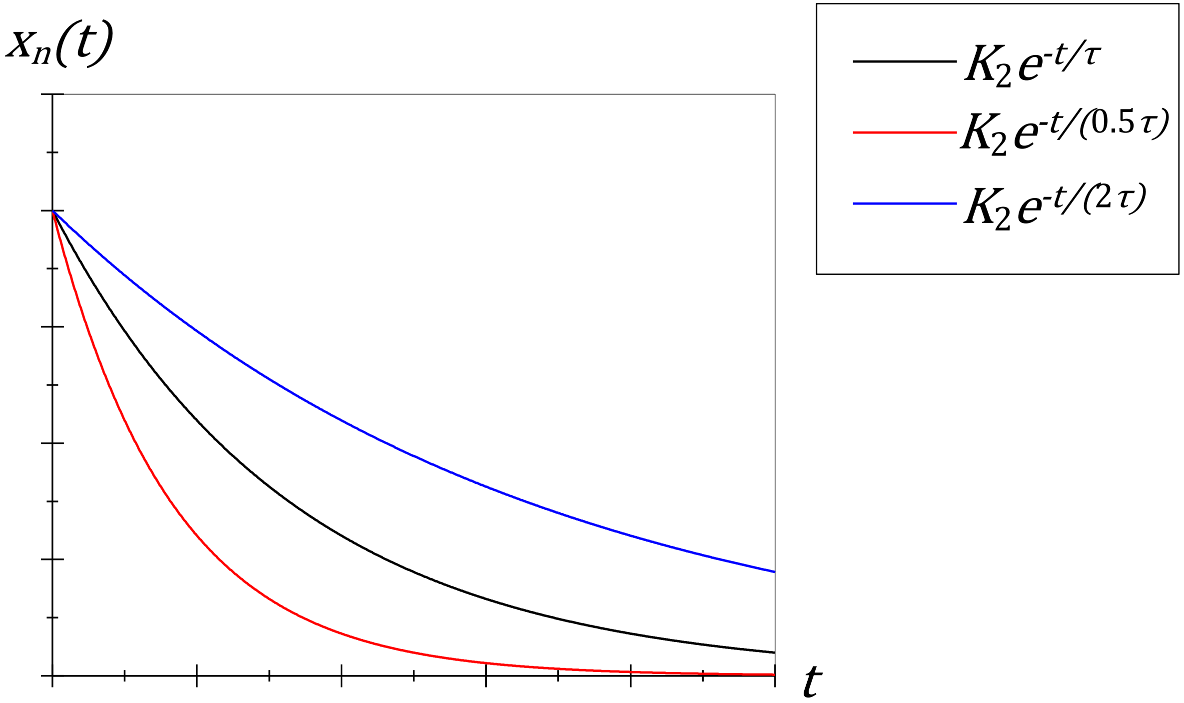
Σταθερά χρόνου

- Η σταθερά τ ονομάζεται σταθερά χρόνου του κυκλώματος.
  - Όπως θα φανεί παρακάτω, εξαρτάται από τα στοιχεία του.
  - Έχει μονάδα χρόνου (s).
- Όταν $t = \tau$ είναι $K_2 e^{-\tau/\tau} = K_2 e^{-1} = 0.368 K_2$, άρα στη διάρκεια μιας σταθεράς χρόνου τ η $x_n(t)$ φθίνει από την τιμή K_2 στην τιμή $0.368 K_2$, δηλαδή μειώνεται κατά 63.2%.
- Σε 2 σταθερές χρόνου έχει μειωθεί στο $0.135 K_2$.
- Μετά από 5 σταθερές χρόνου είναι $0.0067 K_2$, δηλαδή κάτω από 1%.



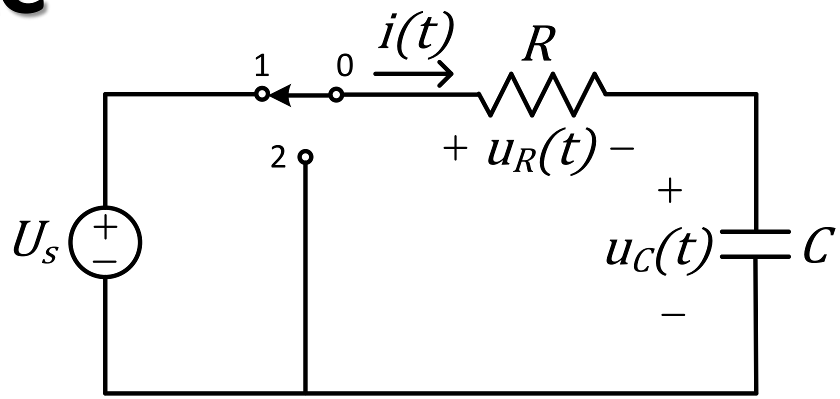
Σταθερά χρόνου

- Ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει η εκθετική καθορίζεται από τη σταθερά χρόνου τ.
- Στο σχήμα φαίνονται τρεις καμπύλες που διαφέρουν ως προς τη σταθερά χρόνου.
- Αν το κύκλωμα έχει μικρή σταθερά χρόνου τότε φθάνει πιο γρήγορα στη μόνιμη κατάσταση και αντιστρόφως.



Κύκλωμα RC

- Η ανάλυση μέχρι εδώ είναι γενική. Δεν αναφερθήκαμε σε συγκεκριμένο κύκλωμα, αλλά μόνο στο γεγονός ότι περιγράφεται από διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού.



- Στο κύκλωμα του σχήματος υπάρχει μια πηγή συνεχούς τάσης $u_s(t) = U_s$.
- Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης πηγαίνει στη θέση 1. Πριν από τη στιγμή αυτή ο πυκνωτής ήταν εντελώς αφόρτιστος, δηλαδή $u_C(t) = 0$.
- Μόλις κλείσει ο διακόπτης θα ρέει ρεύμα $i(t)$ στο κύκλωμα, ίδιο για τα R και C. Επομένως

$$i_C = i_R \Rightarrow C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_s - u_C(t)}{R} \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{U_s}{RC}$$

- Υποθέτουμε ότι η διαφορική αυτή έχει λύση της μορφής

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Κύκλωμα RC

- Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\tau = RC$$

$$K_1 = RC\,\frac{U_s}{RC} = U_s$$

και

$$u_C(t) = U_s + K_2 e^{-t/RC}$$

όπου U_s είναι η τιμή στη μόνιμη κατάσταση και $\tau = RC$ είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος. Μένει να βρεθεί το K_2.

- Αν θεωρήσουμε ότι ο πυκνωτής αρχικά δεν είχε φορτίο, τότε η αρχική τάση στα άκρα του ήταν μηδέν, επομένως

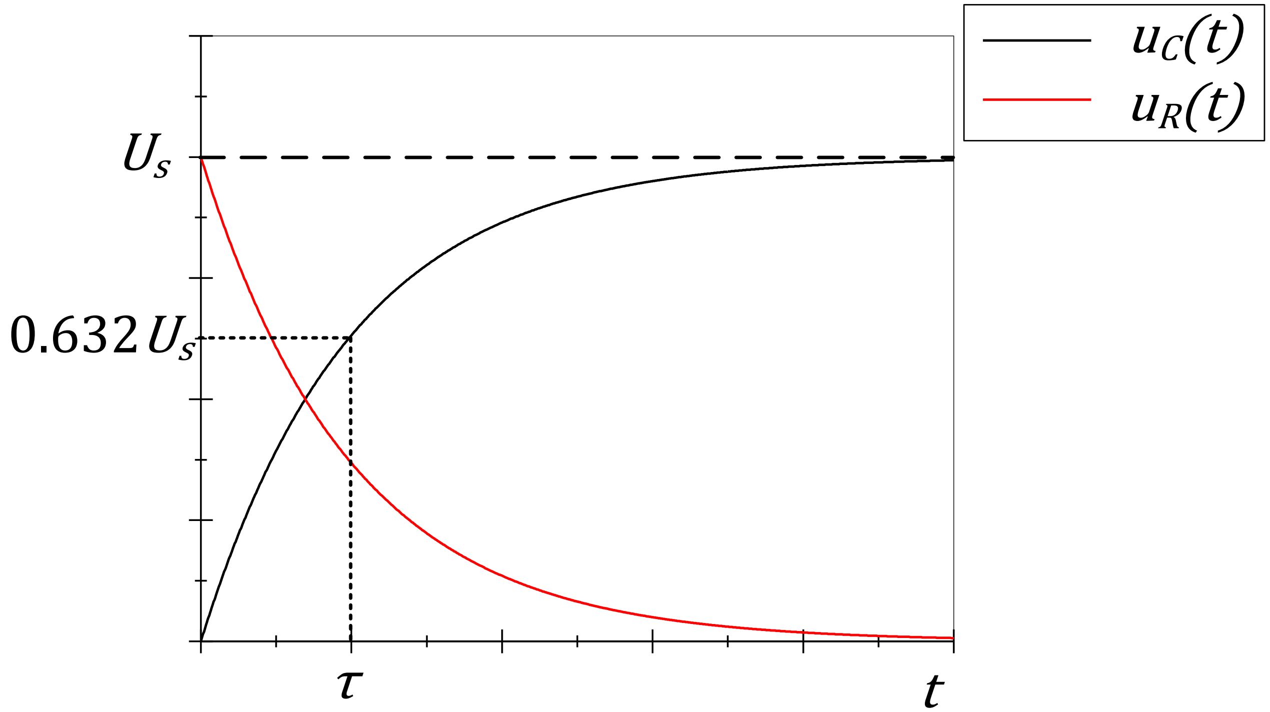
$$u_C(0) = U_s + K_2 e^{-t/RC} \Rightarrow 0 = U_s + K_2 e^0 \Rightarrow K_2 = -U_s$$

- Επομένως η τάση στα άκρα του πυκνωτή κατά τη φόρτιση είναι

$$u_C(t) = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Κύκλωμα RC

- Η γραφική παράσταση της τάσης $u_C(t)$ φαίνεται παρακάτω.



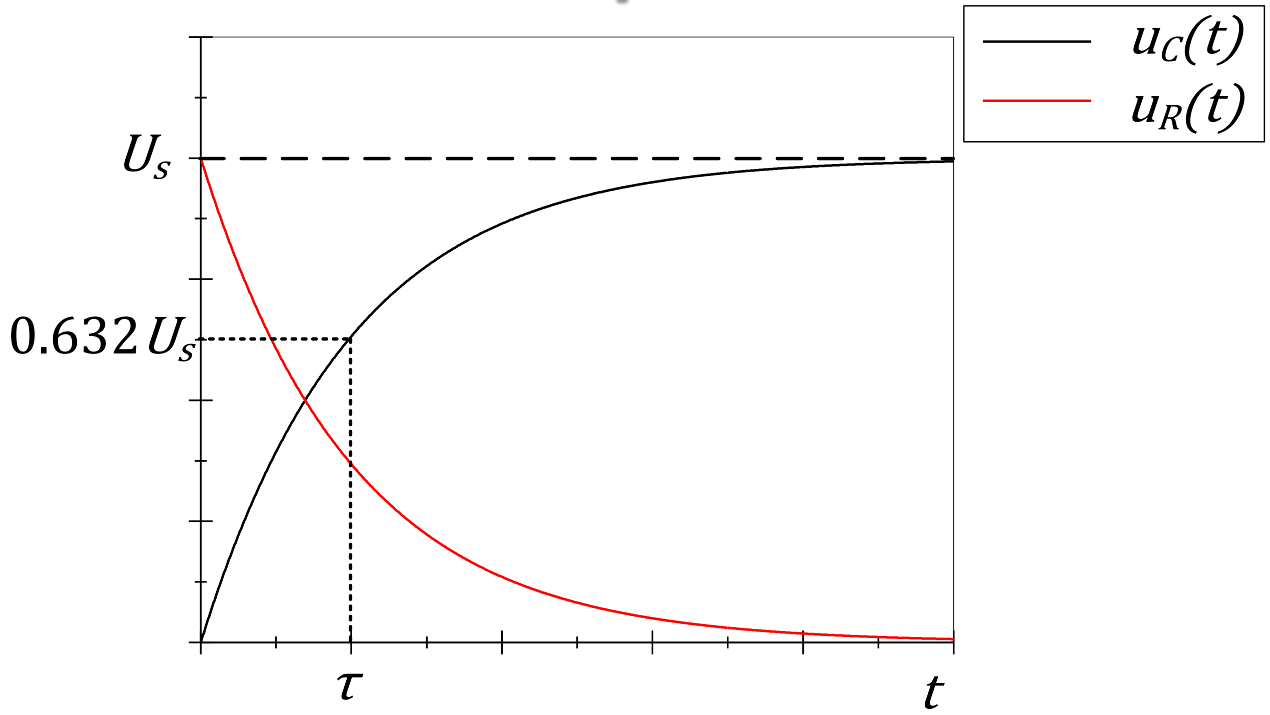
- Στο ίδιο διάγραμμα έχει σχεδιαστεί η τάση στην αντίσταση, η οποία είναι

$$u_R(t) = U_s - u_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Τη μορφή της $u_R(t)$ θα έχει και το ρεύμα στο κύκλωμα, δεδομένου ότι

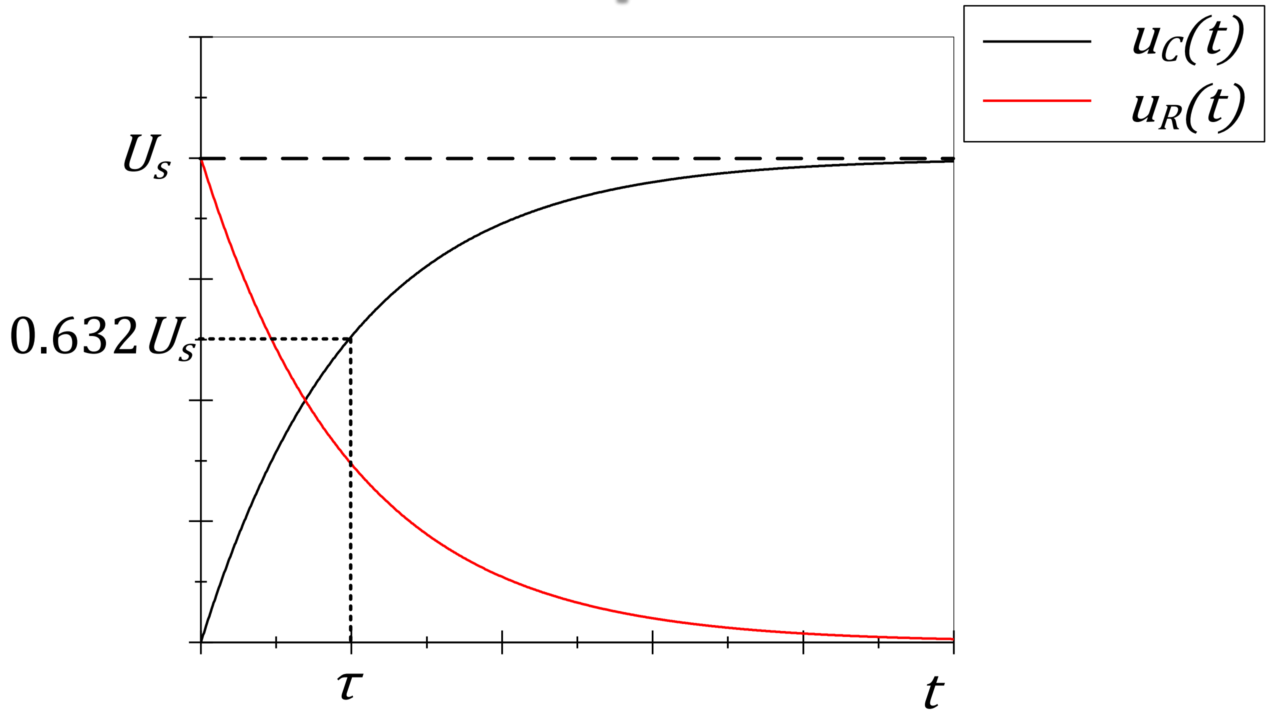
$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

Κύκλωμα RC



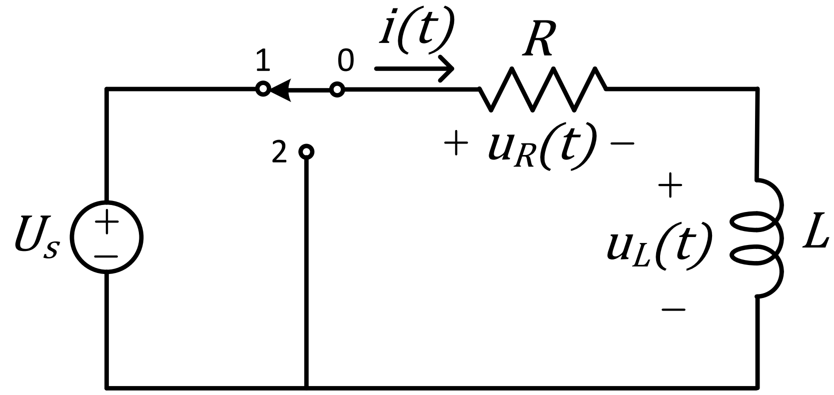
- Όταν $t = \tau$ είναι $u_C(\tau) = U_s(1 - e^{-1}) = 0.632U_s$. Δηλαδή η σταθερά χρόνου δείχνει πόσος χρόνος απαιτείται για να φθάσει η τάση του πυκνωτή το 63.2% της τελικής τιμής της.
- Σε 2 σταθερές χρόνου η τάση έχει αυξηθεί στο $0.865U_s$.
- Μετά από 5 σταθερές χρόνου είναι $0.993U_s$ δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει φορτιστεί πλήρως.

Κύκλωμα RC



- Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι:
  - Με το κλείσιμο του διακόπτη όταν $t = 0$ το ρεύμα στο κύκλωμα άρα και στον πυκνωτή λαμβάνει ακαριαία την τιμή $i(0) = \frac{U_s}{R}$ και φθίνει στη συνέχεια.
  - **Η τάση όμως στον πυκνωτή δεν μπορεί να μεταβληθεί ακαριαία.**
  - Ο ρυθμός με τον οποίο θα αυξηθεί η τάση αυτή εξαρτάται από τη σταθερά χρόνου.

Κύκλωμα RL



- Για το κύκλωμα του σχήματος η ανάλυση είναι παρόμοια.
- Η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει είναι το ρεύμα του πηνίου.
- Το ρεύμα αυτό μεταβάλλεται σταδιακά από μια αρχική τιμή σε μια τελική από τη στιγμή που αλλάζει θέση ο διακόπτης.
- Θεωρούμε ότι όταν ο διακόπτης πηγαίνει στη θέση 1 το πηνίο δεν έχει καθόλου αποθηκευμένη ενέργεια.
- Αν εφαρμόσουμε KVL στο κύκλωμα προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U_s \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{U_s}{L}$$

- Θεωρούμε πάλι λύση της μορφής

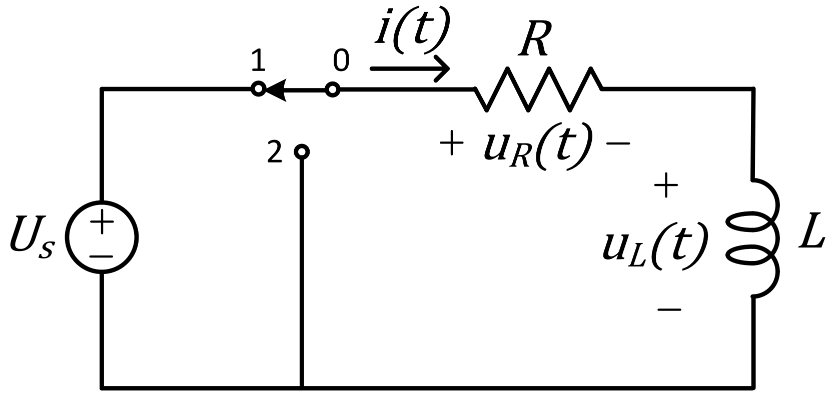
$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Κύκλωμα RL

- Προκύπτει ότι

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$K_1 = \frac{U_s}{R}$$



- Άρα

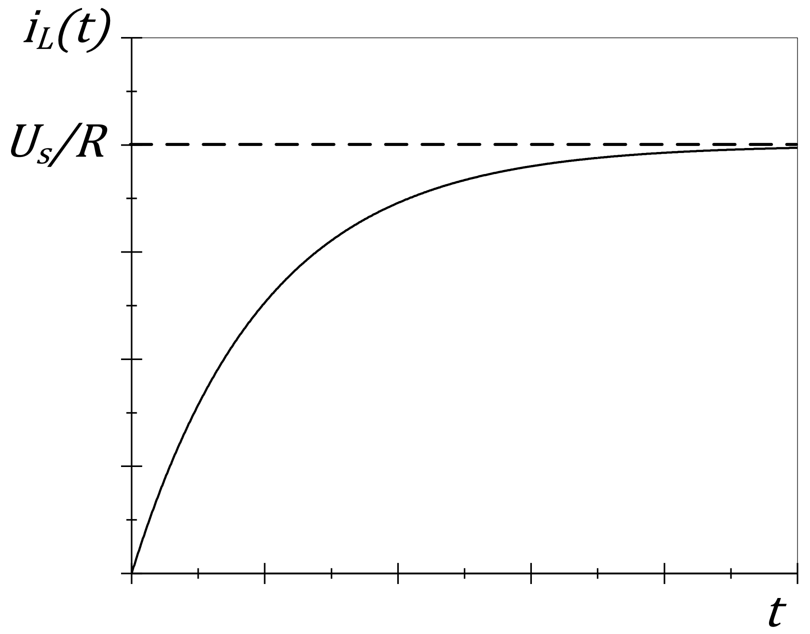
$$i(t) = \frac{U_s}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

- Για να βρούμε τη σταθερά K_2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες.

$$i(0) = \frac{U_s}{R} + K_2 \Rightarrow \frac{U_s}{R} + K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = -\frac{U_s}{R}$$

- Επομένως

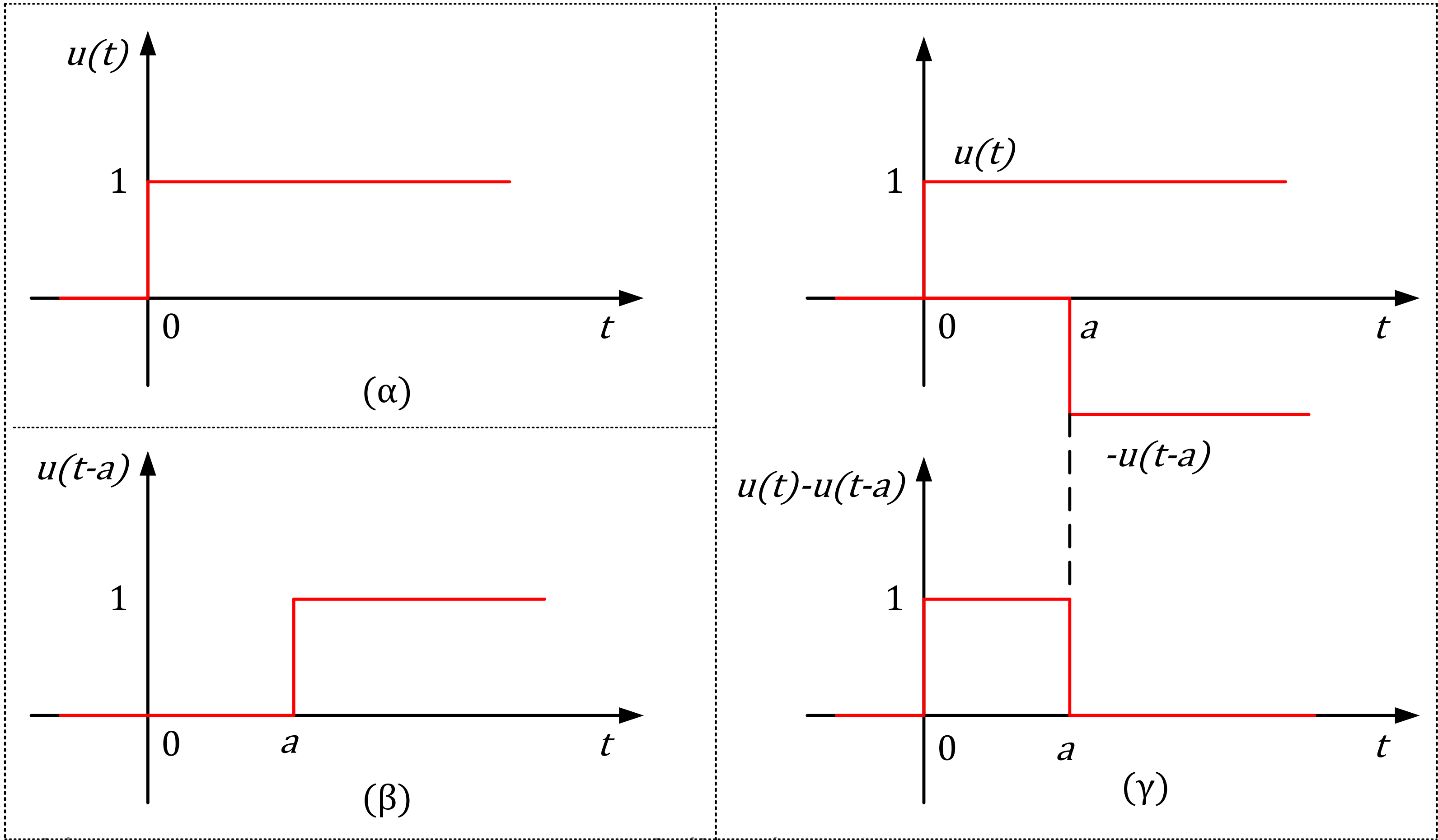
$$i(t) = \frac{U_s}{R} - \frac{U_s}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_s}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



Ειδικές συναρτήσεις: Βηματική

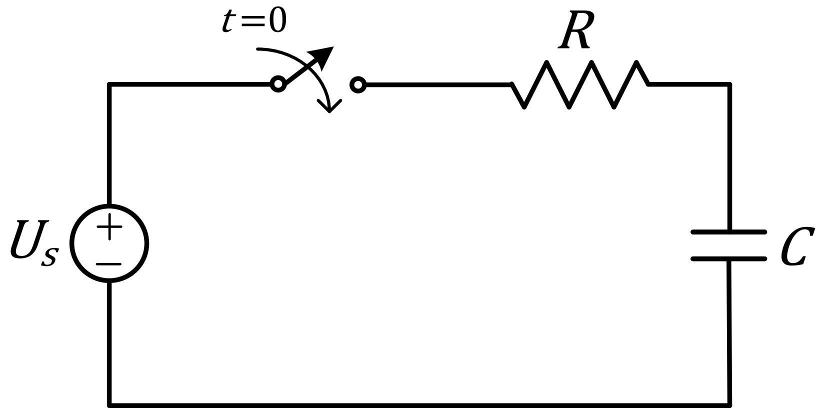
- Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ φαίνεται στο σχήμα (α) και ορίζεται ως

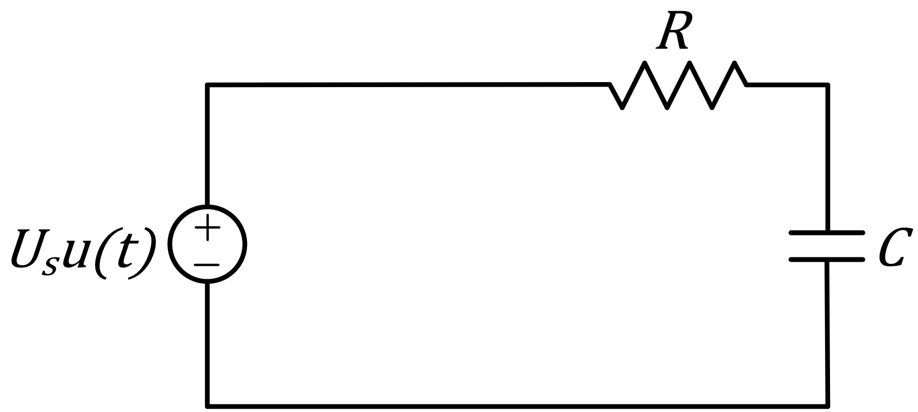
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Ειδικές συναρτήσεις: Βηματική

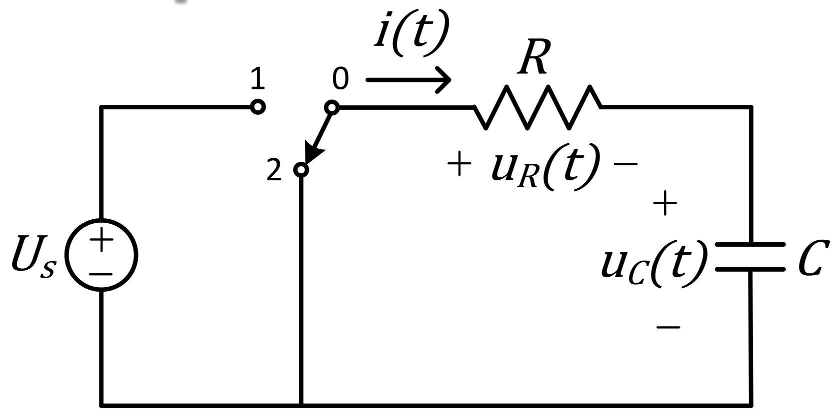
- Στην τιμή $t = 0$ παρουσιάζει ασυνέχεια.
- Δεν έχει διαστάσεις. Αν πολλαπλασιάσουμε με αυτή κάποια τάση U_s τότε το γινόμενο έχει μονάδες τάσης.
- Τα παρακάτω δύο κυκλώματα είναι ισοδύναμα για $t > 0$:





- Σημαντική παρατήρηση: Το $u(t)$ χωρίς κάποιο δείκτη θα συμβολίζει από εδώ και πέρα τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση και όχι απαραίτητα κάποια τάση. Όταν πρόκειται για τάση, θα υπάρχει δείκτης στο συμβολισμό, για παράδειγμα $u_s(t)$.
- Η συνάρτηση $u_s(t) = 3u(t)\ \mathrm{V}$ συμβολίζει μια τάση που είναι μηδέν για $t < 0$ και $3\ \mathrm{V}$ για $t > 0$.

Εκφόρτιση πυκνωτή



- Θεωρούμε ότι ο διακόπτης έμεινε αρκετό χρόνο στη θέση 1 ώστε να φορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής σε τάση U_s.
- Έστω τώρα ότι ο διακόπτης πάει στη θέση 2. Το αποτέλεσμα είναι ένα απλό RC κύκλωμα σειράς. Το ρόλο της πηγής παίζει ο πυκνωτής.
- Ρέει ρεύμα μέσω της αντίστασης και η τάση του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο.
- Προκύπτει η απλή εξίσωση:

$$Ri + u_C = 0 \Rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

- Μπορούμε να υποθέσουμε λύση

$$u_C(t) = K_2 e^{-t/\tau}$$

όπου K_2 και τ είναι σταθερές που πρέπει να βρεθούν.

Εκφόρτιση πυκνωτή

- Τη χρονική στιγμή $t = 0$:

$$u_C(0) = U_s \Rightarrow K_2 e^0 = U_s \Rightarrow K_2 = U_s$$

- Επίσης

$$\tau = RC$$

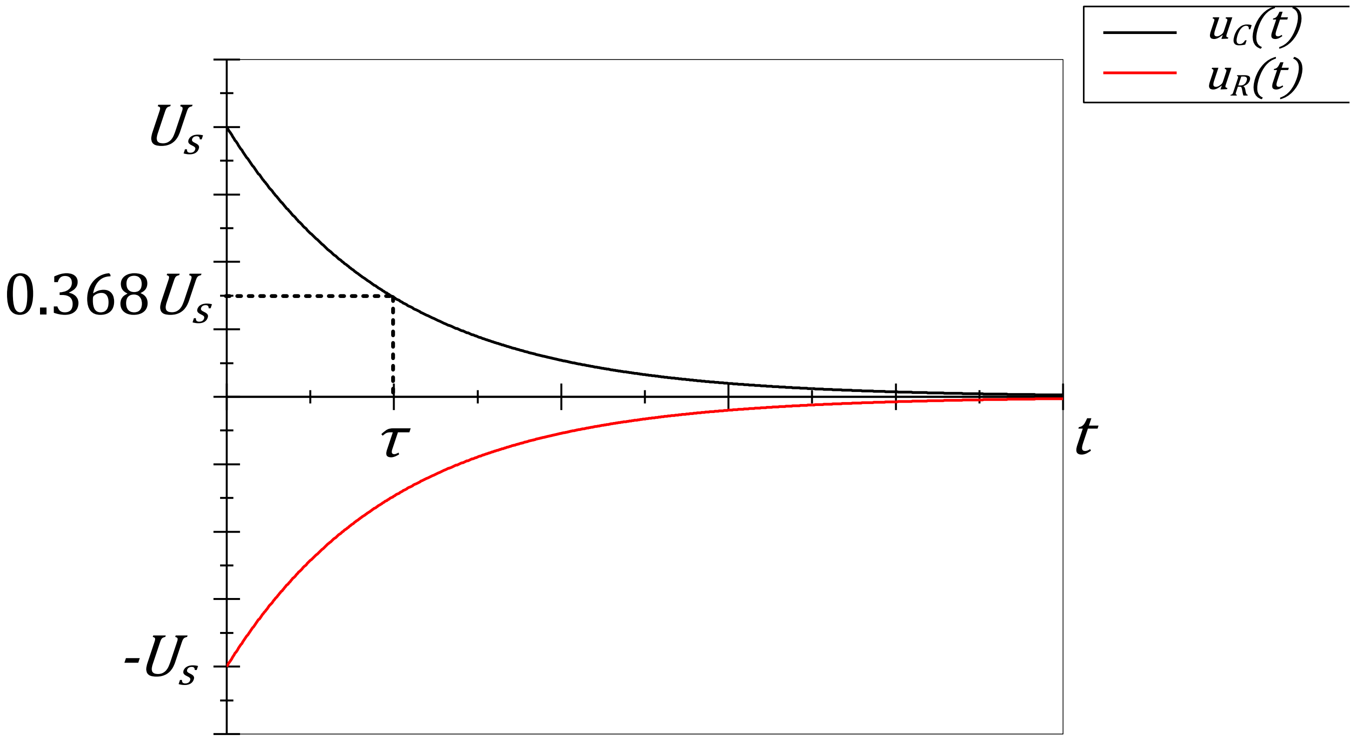
- Επομένως η απόκριση είναι

$$u_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Η τιμή της σταθεράς χρόνου είναι **ίδια με πριν, εφόσον δεν άλλαξαν τα $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$**.
- Η σταθερά χρόνου δείχνει το χρόνο που χρειάζεται η τάση του πυκνωτή να μειωθεί στο 36.8% της αρχικής.

Εκφόρτιση πυκνωτή

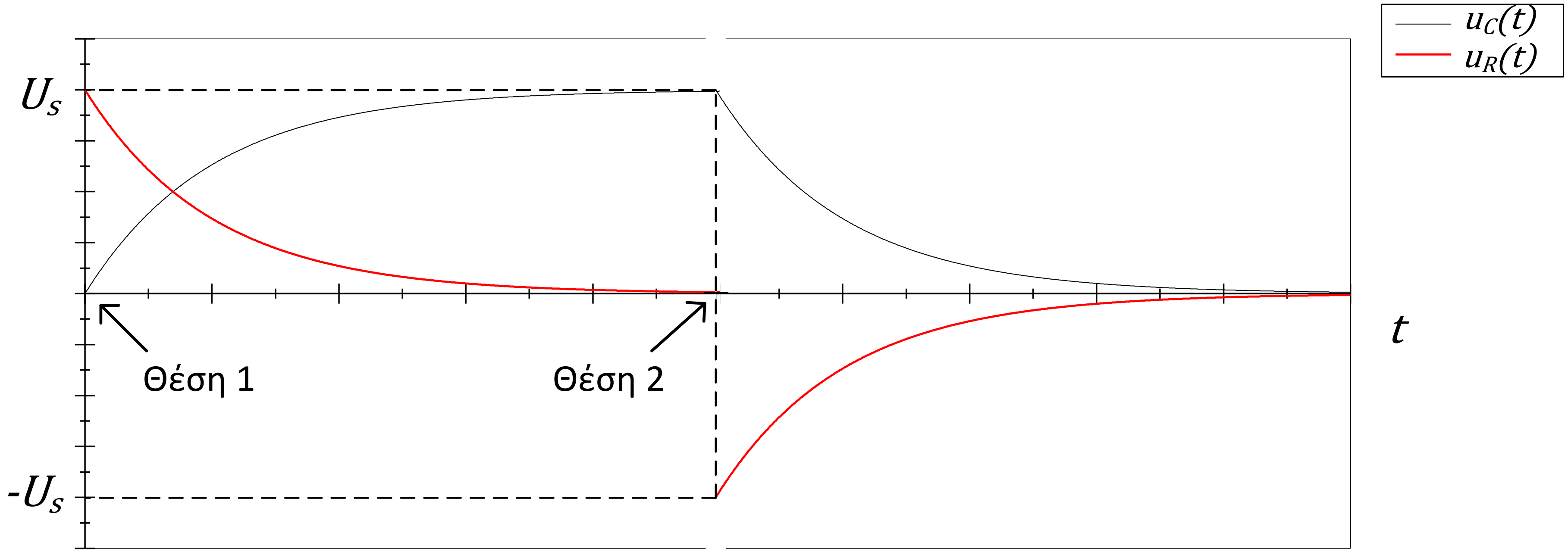
- Στο παρακάτω διάγραμμα έχει σχεδιαστεί η τάση στον πυκνωτή και η τάση στην αντίσταση. Το ρεύμα στο κύκλωμα θα έχει την ίδια μορφή με την τάση στην αντίσταση.



- Παρατηρούμε ότι τώρα η τάση στην αντίσταση και το ρεύμα στο κύκλωμα έχουν αντίθετο πρόσημο από αυτό που θεωρήσαμε ως θετικό. Είναι λογικό αφού ο πυκνωτής έχει το ρόλο της πηγής.

Κύκλωμα RC

- Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν θεωρήσουμε ότι ο διακόπτης τίθεται αρχικά στη θέση 1 και μετά από αρκετό χρονικό διάστημα στη θέση 2, τότε η τάση στα άκρα του μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έχει σχεδιαστεί επίσης η τάση στην αντίσταση, που έχει ίδια μορφή με το ρεύμα στο κύκλωμα.



- Παρατηρούμε ότι η τάση στον πυκνωτή μεταβάλλεται σταδιακά ενώ το ρεύμα μεταβάλλεται ακαριαία με την αλλαγή θέσης του διακόπτη.
- Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν για επαγωγό, μόνο που τότε η τάση του στοιχείου μπορεί να μεταβάλλεται ακαριαία ενώ το ρεύμα όχι.

Κύκλωμα RC

- Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει με την ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο κύκλωμα τη στιγμή που άλλαξε θέση ο διακόπτης.
- Έστω ότι η τάση τότε ήταν U_{C0}.
- Η ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση είναι

$$p_R(t) = \frac{[u_R(t)]^2}{R} = \frac{[-u_C(t)]^2}{R} = \frac{[-U_{C0}e^{-\frac{t}{RC}}]^2}{R} = \frac{{U_{C0}}^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$$

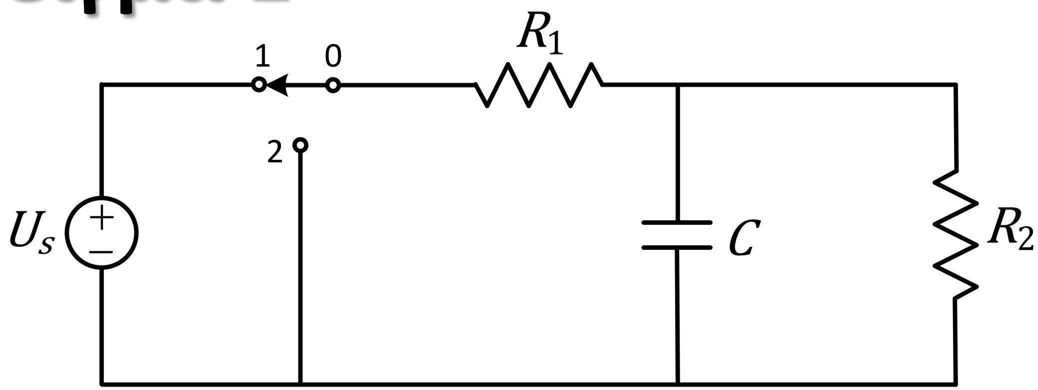
- Η συνολική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση είναι

$$w_R = \int_0^\infty p_R(t)dt = \frac{{U_{C0}}^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt = \frac{{U_{C0}}^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}C{U_{C0}}^2$$

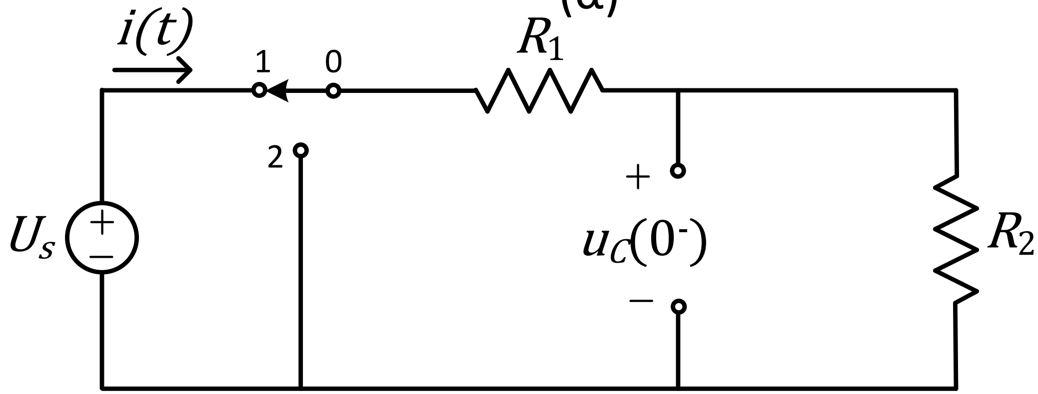
- Αυτή όμως είναι η ενέργεια που ήταν αρχικά αποθηκευμένη στον πυκνωτή. Όταν λοιπόν ο χρόνος $t \to \infty$, η τάση του πυκνωτή έχει μηδενιστεί, καθώς η ενέργειά του έχει αποσβεστεί μέσω της αντίστασης του κυκλώματος.

Παράδειγμα 1

- Στο κύκλωμα του σχήματος (α) τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης πηγαίνει από τη θέση 1 στη θέση 2. Να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση R_2 όταν $t > 0$.
- Δίνονται: $U_s = 12\ \mathrm{V}$, $R_1 = 6\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 0.1\ \mathrm{mF}$.



(α)



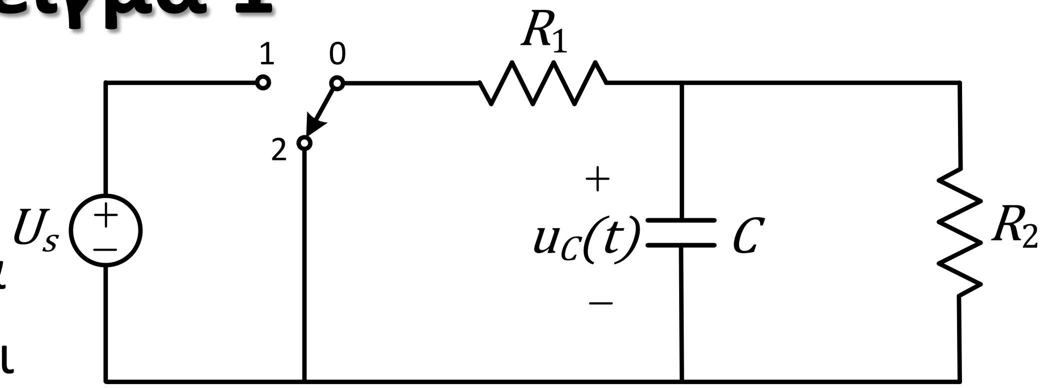
(β)

Απάντηση:

- Όταν $t = 0^-$ το κύκλωμα βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση, ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος και λειτουργεί ως ανοιχτοκύκλωμα (σχήμα (β)).
- Στις αντιστάσεις ρέει ρεύμα

$$i(t) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{12}{(6+3)\cdot 10^3} = 1.333\ \mathrm{mA}$$

Παράδειγμα 1



(γ)

- Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι

  $$u_C(0^-) = U_s - i(t)R_1 = 4\ \mathrm{V}$$

- Όταν ο διακόπτης αλλάξει θέση (σχήμα (γ)) ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται μέσω των δύο αντιστάσεων.
- Ο πυκνωτής «βλέπει» τον παράλληλο συνδυασμό των δύο αντιστάσεων (R_{th}).
- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος θα είναι

$$\tau = RC = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 0.2\ \mathrm{s}$$

- Η τάση του πυκνωτή κατά την εκφόρτιση θα είναι

$$u_C(t) = u_C(0^-)e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-5t}\ \mathrm{V}$$

- Επομένως το ρεύμα στην αντίσταση R_2 θα είναι

$$i_{R2}(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} = \frac{4}{3}e^{-5t}\ \mathrm{mA}$$

Επίλυση ασκήσεων

- Έστω ότι ένα κύκλωμα περιλαμβάνει έναν επαγωγό ή πυκνωτή και τροφοδοτείται από σταθερή πηγή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγει ή κλείνει ένας διακόπτης σε κάποιο σημείο του κυκλώματος.
- Ζητείται η συνάρτηση που περιγράφει την τάση ή το ρεύμα $x(t)$ σε κάποιο στοιχείο του κυκλώματος.

Απάντηση:

- Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

- Θα περιγράψουμε έναν τρόπο για την εύρεση των K_1, K_2, τ. Προσοχή: Ισχύει μόνο για σταθερές πηγές.

Βήμα 1ο:

- Θεωρούμε ότι το κύκλωμα βρισκόταν στη μόνιμη κατάσταση πριν αλλάξει η θέση του διακόπτη. Πρόκειται για κύκλωμα με σταθερές πηγές. Αρκεί dc ανάλυση.

Επίλυση ασκήσεων

- Σχεδιάζουμε το κύκλωμα για αυτή την κατάσταση λειτουργίας αντικαθιστώντας τον πυκνωτή με ανοιχτοκύκλωμα και το πηνίο με βραχυκύκλωμα.
- Από αυτό το κύκλωμα βρίσκουμε την τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή $u_C(0^-)$ ή του ρεύματος στο πηνίο $i_L(0^-)$ πριν τη μετακίνηση του διακόπτη.

Βήμα 2ο:

- Σχεδιάζουμε το κύκλωμα όταν $t = 0^+$ με τους διακόπτες στη νέα τους θέση.
- Η τάση στα άκρα πυκνωτή και το ρεύμα σε πηνίο δεν μπορούν να μεταβληθούν ακαριαία. Άρα $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- Αντικαθιστούμε τον πυκνωτή με μια πηγή τάσης με τιμή $u_C(0^-)$ και το πηνίο με πηγή ρεύματος $i_L(0^-)$.
- Το κύκλωμα αυτό ισχύει μόνο για $t = 0^+$. Αμέσως μετά οι τιμές θα αρχίσουν να μεταβάλλονται.
- Μέσω αυτού του νέου κυκλώματος βρίσκουμε την αρχική τιμή $x(0^+)$ της μεταβλητής που ψάχνουμε.

Επίλυση ασκήσεων

Βήμα 3ο:

- Θεωρούμε ότι το κύκλωμα έχει φθάσει στη νέα μόνιμη κατάσταση ($t > 5\tau$), οπότε ο πυκνωτής δρα πάλι ως ανοιχτοκύκλωμα και το πηνίο ως βραχυκύκλωμα. Και πάλι αρκεί dc ανάλυση.
- Λύνουμε για να βρούμε την τιμή της $x(t)$ στη νέα μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Όταν $t \to \infty$, $e^{-at} \to 0$ και $x(\infty) = K_1$.

Βήμα 4ο:

- Βρίσκουμε τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος. Για να βρεθεί απαιτείται η ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin R_{th} στους ακροδέκτες του πυκνωτή (ή πηνίου). Θα είναι $\tau = R_{th}C$ για RC κύκλωμα και $\tau = L/R_{th}$ για RL κύκλωμα.
- Τελικά η συνολική λύση που ψάχνουμε θα είναι

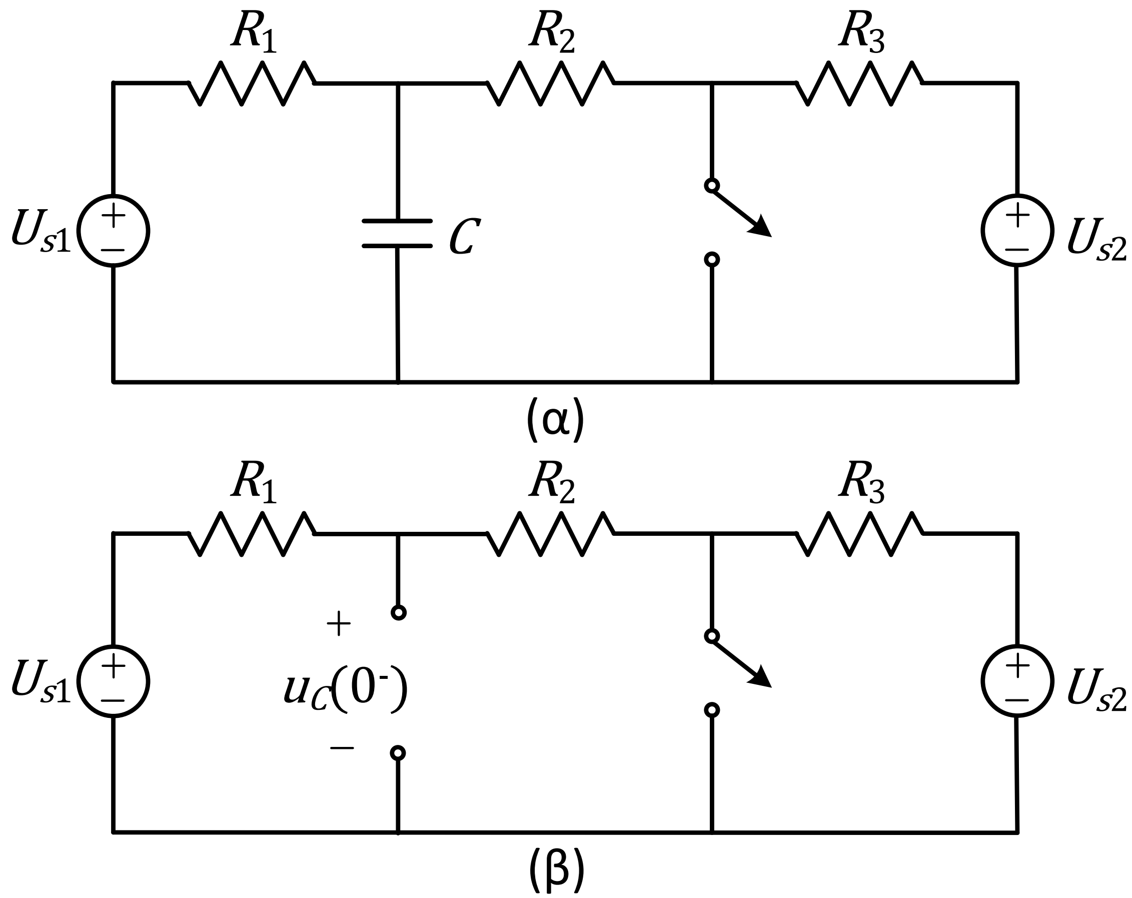
$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

όπου

$$K_2 = x(0^+) - x(\infty)$$
$$K_1 = x(\infty)$$

Παράδειγμα 2

- Στο κύκλωμα (α) του σχήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης. Να βρεθεί το ρεύμα στην αντίσταση R_2.
- Δίνονται: $U_{s1} = 24\ \mathrm{V}$, $U_{s2} = 12\ \mathrm{V}$ $R_1 = 2\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 4\ \mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 6\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 0.1\ \mathrm{mF}$.



Απάντηση:

- Θεωρούμε ότι το ρεύμα έχει τη μορφή

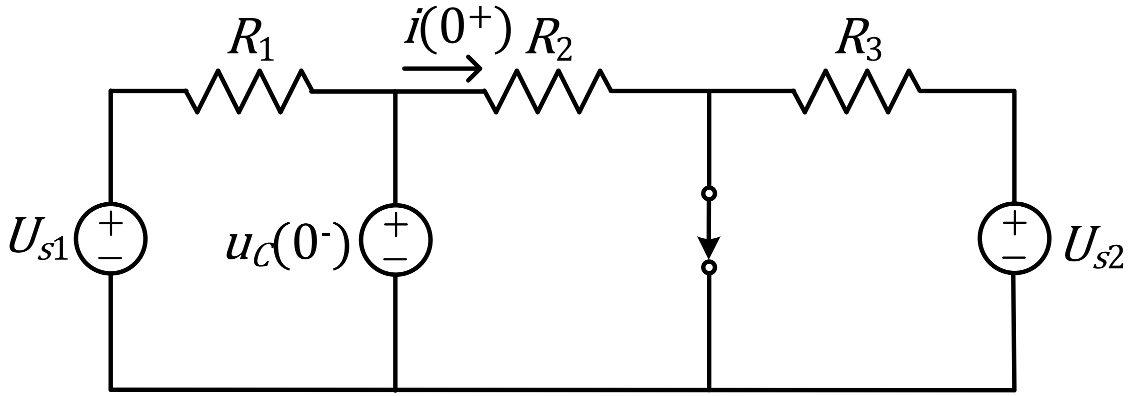
$$i_{R2}(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

- Η αρχική τάση στα άκρα του πυκνωτή υπολογίζεται από το κύκλωμα (β).
- Το ρεύμα στο κύκλωμα αυτό βρίσκεται με εφαρμογή KVL ως εξής:

$$-U_{s1} + i(t)(R_1 + R_2 + R_3) + U_{s2} = 0 \Rightarrow i(t) = 1\ \mathrm{mA}$$

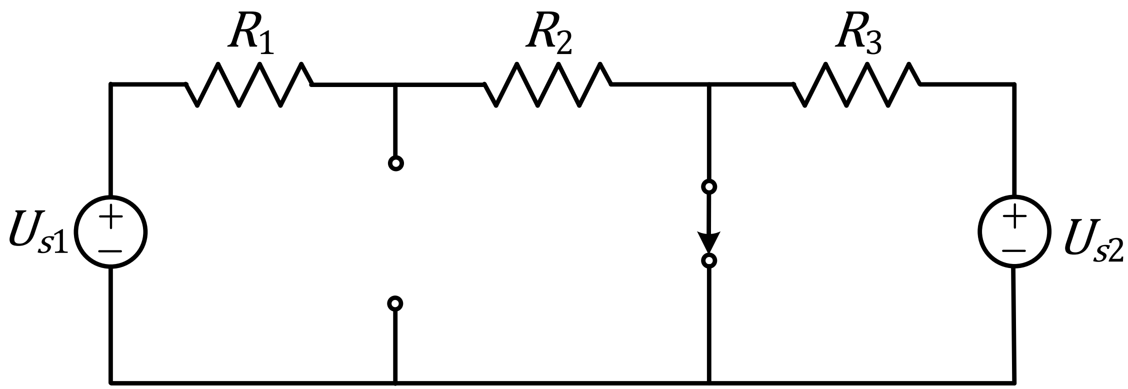
Παράδειγμα 2

- Επομένως για $t = 0^-$ η τάση στον πυκνωτή είναι
$$u_C(0^-) = U_{s1} - i(t)R_1 = 24 - 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 22 \text{ V}$$
- Θεωρούμε τώρα ότι κλείνει ο διακόπτης.
- Η τιμή του ρεύματος που ζητείται τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ βρίσκεται από το κύκλωμα (γ).



(γ)

- Παρατηρούμε ότι στα άκρα της αντίστασης αυτής η τάση είναι $u_C(0^-)$. Άρα
$$i(0^+) = \frac{u_C(0^-)}{R_2} = \frac{22}{4} = 5.5 \text{ mA}$$
- Βρήκαμε δηλαδή την αρχική τιμή του.
- Η τελική τιμή του (όταν $t \to \infty$) βρίσκεται από το κύκλωμα (δ).



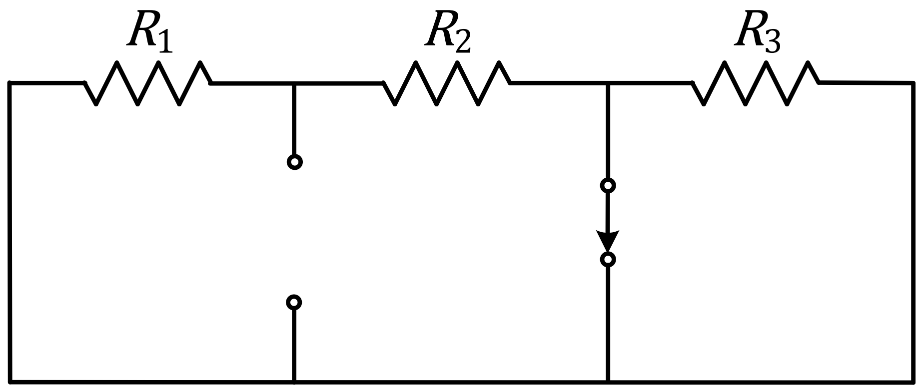
(δ)

Παράδειγμα 2

- Η τιμή αυτή θα είναι

$$i(\infty) = \frac{U_{s1}}{R_1 + R_2} = \frac{24}{6} = 4\ \text{mA}$$

- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος βρίσκεται αφού πρώτα βρούμε τη R_{th} από το κύκλωμα (ε).



(ε)

- Ο πυκνωτής «βλέπει» αντίσταση

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3}\ \text{k}\Omega$$

- Άρα

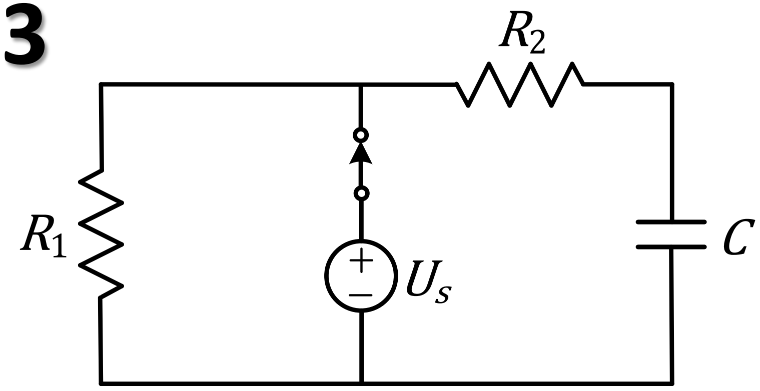
$$\tau = R_{th} C = 0.133\ \text{s}$$

- Επομένως η συνάρτηση που εκφράζει το ζητούμενο ρεύμα θα είναι

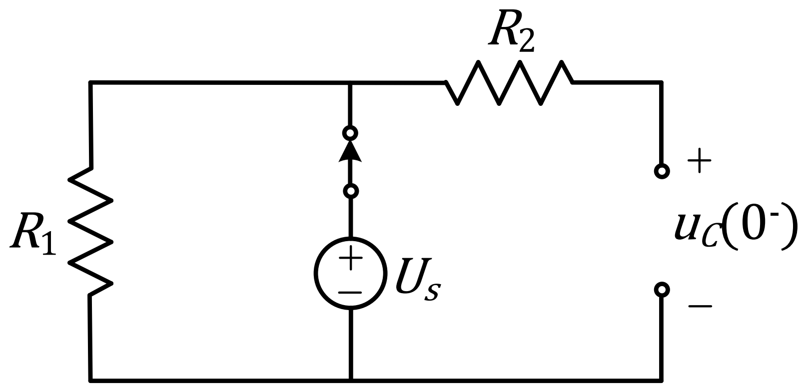
$$i(t) = i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]e^{-t/\tau} = 4 + (5.5 - 4)e^{-7.5t} = 4 + 1.5e^{-7.5t}\ \text{A}$$

Παράδειγμα 3

- Στο κύκλωμα του σχήματος ο διακόπτης ανοίγει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να βρεθεί η τάση στα άκρα του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = 200\ \mathrm{ms}$.
- Δίνονται: $U_s = 9\ \mathrm{V}$, $R_1 = 2\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 4\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 0.01\ \mathrm{mF}$.



(α)



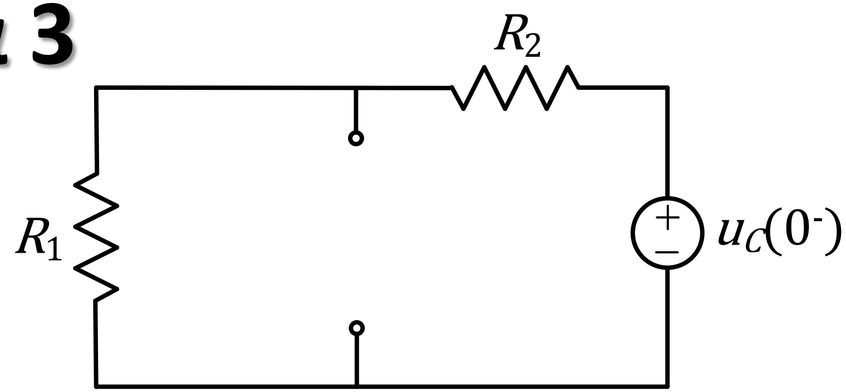
(β)

Απάντηση:

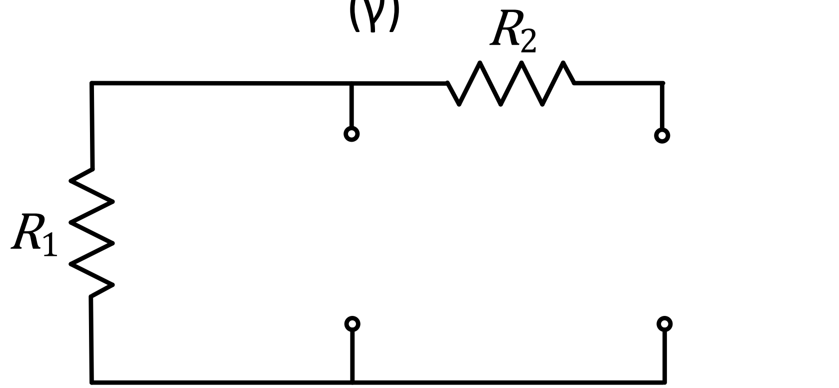
- Θεωρούμε ότι πριν το άνοιγμα του διακόπτη το κύκλωμα ήταν στη μόνιμη κατάσταση.
- Από το σχήμα (β) βρίσκουμε την τάση στην οποία είχε φορτιστεί ο πυκνωτής.
- Επειδή ο πυκνωτής λειτουργούσε ως ανοιχτοκύκλωμα θα είναι

$$u_C(0^-) = U_s$$

Παράδειγμα 3



(γ)



(δ)

- Τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης το κύκλωμα έχει τη μορφή του σχήματος (γ).
- Η τιμή της τάσης του πυκνωτή εξακολουθεί να είναι

$$u_C(0^-) = U_s$$

- Όταν $t \to \infty$ το κύκλωμα έχει τη μορφή του σχήματος (δ), δηλαδή

$$u_C(\infty) = 0$$

- Ο πυκνωτής «βλέπει» αντίσταση $R_{th} = R_1 + R_2$, άρα

$$\tau = (R_1 + R_2)C = 0.06 \text{ s}$$

- Επομένως η συνάρτηση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή μετά το κλείσιμο του διακόπτη θα είναι

$$u_c(t) = U_s e^{-t/0.06} = 9e^{-t/0.06} \text{ V}$$

- Τη χρονική στιγμή $t_1 = 200$ ms θα είναι

$$u_c(t_1) = 0.321 \text{ V}$$