

# Άσκηση 1η: Μέτρηση Διαφοράς Φάσης

**Αντικείμενο:** Μέτρηση της διαφοράς φάσης μεταξύ της τάσης και του ρεύματος σε ένα κύκλωμα.

**Όργανα που θα χρησιμοποιηθούν:** Παλμογράφος, γεννήτρια συχνοτήτων, αντιστάτες, πυκνωτής, πηνίο, συνδετικοί αγωγοί.

## 1.1 Θεωρία

### 1.1 Διαφορά φάσης δύο κυματομορφών

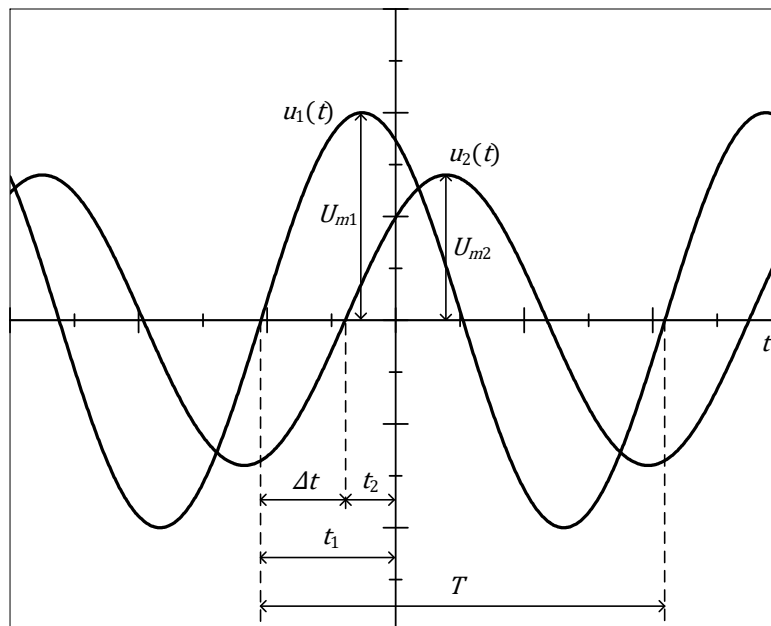
Μια συνάρτηση  $u(t)$  ονομάζεται περιοδική με περίοδο  $T$  αν

$$u(t) = u(t + T)$$

Ο χρόνος που απαιτείται ώστε να ολοκληρωθεί ένας πλήρης κύκλος ενός περιοδικού μεγέθους ονομάζεται περίοδος  $T$  του μεγέθους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα περιοδικής συνάρτησης είναι η ημιτονοειδής.

Αν η τάση τροφοδοσίας ενός κυκλώματος είναι ημιτονοειδής και το φορτίο γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, τότε οι κυματομορφές των τάσεων και των ρευμάτων στο κύκλωμα θα είναι επίσης ημιτονοειδείς και θα έχουν την ίδια περίοδο με την τάση τροφοδοσίας.

Για να απεικονίσουμε στην οθόνη του παλμογράφου τις τάσεις στα άκρα δύο στοιχείων ενός κυκλώματος  $u_1(t), u_2(t)$  αρκεί να συνδέσουμε στα άκρα τους από ένα κανάλι του παλμογράφου (CH I/CH II με επιλεγμένο το Dual). Η εικόνα που προκύπτει στην οθόνη του παλμογράφου θα έχει τη μορφή του Σχ.1.



Σχήμα 1: Δύο ημιτονοειδείς κυματομορφές στην οθόνη του παλμογράφου.

Μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω του παλμογράφου την περίοδο των κυματομορφών αν μετρήσουμε την απόσταση  $D$  επάνω στην οθόνη (δηλαδή τον αριθμό των υποδιαίρέσεων της οθόνης) που αντιστοιχεί σε έναν πλήρη κύκλο οποιασδήποτε εκ των δύο κυματομορφών. Αν

πολλαπλασιάσουμε την απόσταση αυτή με την τιμή Time/div (χρόνος ανά υποδιαίρεση) στην οποία έχει ρυθμιστεί ο παλμογράφος, θα βρούμε την περίοδο  $T$  σε μονάδες χρόνου.

Έστω ότι οι κυματομορφές που απεικονίζονται στο Σχ.1 περιγράφονται από τις συναρτήσεις:

$$u_1(t) = U_{m1} \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.1)$$

και

$$u_2(t) = U_{m2} \sin(\omega t + \beta) \quad (1.2)$$

όπου  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  η γωνιακή συχνότητα,  $\alpha, \beta$  οι γωνίες φάσης των δύο τάσεων και  $U_{m1}, U_{m2}$  τα πλάτη των κυματομορφών.

Παρατηρούμε ότι η κυματομορφή της  $u_1(t)$  διέρχεται από την τιμή μηδέν (με τάση να αυξηθεί) τη χρονική στιγμή  $t_1 \neq 0$ . Ο χρόνος αυτός που δηλώνει την προήγηση ή την καθυστέρηση της κυματομορφής σε σχέση με το σημείο  $t = 0$  αντιστοιχεί σε μία γωνία  $\alpha$ , η οποία ονομάζεται γωνία φάσης. Η σχέση που συνδέει τη γωνία αυτή με το χρόνο είναι η εξής:

$$\alpha = \omega t_1 = \frac{2\pi}{T} t_1 \quad (1.3)$$

Ο αντίστοιχος χρόνος για την  $u_2(t)$  είναι  $t_2$  και η γωνία φάσης της είναι  $\beta$ .

Η διαφορά φάσης  $\varphi$  μεταξύ των δύο τάσεων ορίζεται ως

$$\varphi = \alpha - \beta \quad (1.4)$$

Η διαφορά φάσης  $\varphi$  που αντιστοιχεί στο χρόνο  $\Delta t = t_1 - t_2$  προκύπτει από την εξ.(1.4) ότι είναι

$$\varphi = 2\pi \frac{(t_1 - t_2)}{T} = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad (\text{σε rad}) \quad \text{ή} \quad \varphi = 360^\circ \frac{\Delta t}{T} \quad (\text{σε μοίρες}) \quad (1.5)$$

## 1.2 Διαφορά φάσης τάσης ρεύματος σε κυκλώματα $RL$ και $RC$ σειρές

Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχ.2(α). Έστω  $U, I$  τα πλάτη της τάσης  $u(t)$  και του ρεύματος  $i(t)$  του κυκλώματος και  $\alpha, \beta$  οι γωνίες φάσης τους. Ζητείται να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης και του ρεύματος.

Η σύνθετη αντίσταση του φορτίου είναι

$$\dot{Z} = R + j\omega L \quad (1.6)$$

Το μέτρο της είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (1.7)$$

και η γωνία της προκύπτει ως εξής:

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \quad (1.8)$$

Επίσης, σύμφωνα με το νόμο του Ohm, ισχύει ότι

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{i} = \frac{U \angle \alpha}{I \angle \beta} = \frac{U}{I} \angle (\alpha - \beta) = \frac{U}{I} \angle \varphi \quad (1.9)$$

Από την εξ.(1.9) προκύπτει ότι η γωνία  $\varphi$  της σύνθετης αντίστασης ισούται με τη διαφορά φάσης τάσης-ρεύματος στο κύκλωμα. Επίσης από την εξ.(1.8) προκύπτει ότι η τιμή της γωνίας αυτής είναι θετική. Αυτό σημαίνει ότι η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία  $\varphi$ . Το κύκλωμα έχει

χαρακτήρα επαγωγικό. Οι φάσορες της τάσης της πηγής  $\dot{U}$ , του ρεύματος του φορτίου  $\dot{I}$ , της τάσης στην αντίσταση  $\dot{U}_R$  και της τάσης στο πηνίο  $\dot{U}_L$  φαίνονται στο Σχ.3(α).

Ας θεωρήσουμε τώρα το κύκλωμα του Σχ. 2(β). Η σύνθετη αντίσταση του φορτίου στο κύκλωμα αυτό είναι

$$\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} \quad (1.10)$$

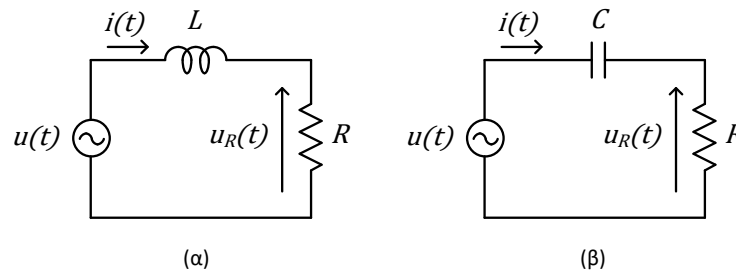
Το μέτρο της είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1.11)$$

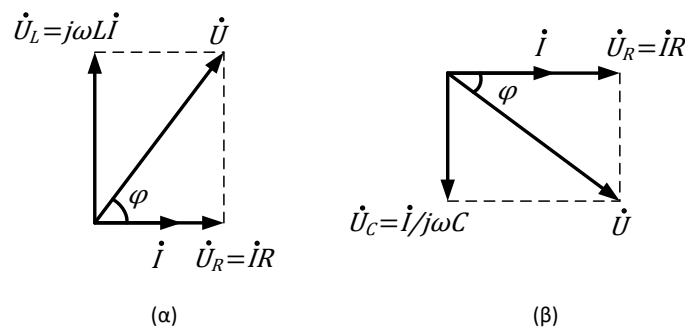
και η γωνία της προκύπτει ως εξής:

$$\tan \varphi = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = \left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (1.12)$$

Προφανώς η γωνία αυτή είναι και πάλι ίση με τη διαφορά φάσης τάσης-ρεύματος στο κύκλωμα. Το αρνητικό πρόσημο που προκύπτει δείχνει ότι το ρεύμα στην περίπτωση αυτή προηγείται της τάσης κατά γωνία  $\varphi$ . Το κύκλωμα έχει χαρακτήρα χωρητικό. Οι φάσορες της τάσης της πηγής  $\dot{U}$ , του ρεύματος του φορτίου  $\dot{I}$ , της τάσης στην αντίσταση  $\dot{U}_R$  και της τάσης στον πυκνωτή  $\dot{U}_C$  φαίνονται στο Σχ.3(β).



Σχήμα 2: (α) Αντιστάτης σε σειρά με επαγωγό, (β) αντιστάτης σε σειρά με πυκνωτή.



Σχήμα 3: Διανυσματικό διάγραμμα (α) για το κύκλωμα  $RL$ , (β) για το κύκλωμα  $RC$ .

### 1.3 Μέτρηση διαφοράς φάσης

#### A) Με σύγκριση χρονικών σημάτων

Η διαφορά φάσης  $\varphi$  μεταξύ των κυματομορφών τάσης και ρεύματος μπορεί να βρεθεί πειραματικά συγκρίνοντας δύο χρονικά σήματα στην οθόνη του παλμογράφου. Ο παλμογράφος

βέβαια δεν καταγράφει ρεύματα αλλά μόνο τάσεις. Θα πρέπει λοιπόν πρώτα να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό. (Με ποιον τρόπο μπορεί να γίνει αυτό;)

Στη συνέχεια βρίσκουμε το χρόνο  $\Delta t$  που αντιστοιχεί στη διαφορά φάσης  $\varphi$ , όπως φαίνεται στο Σχ.1. Ο χρόνος αυτός προκύπτει αν μετρήσουμε την απόσταση  $d$  μεταξύ αντίστοιχων σημείων των δύο κυματομορφών και την πολλαπλασιάσουμε με την τιμή Time/div στην οποία έχει ρυθμιστεί ο παλμογράφος. Ως αντίστοιχα σημεία μπορούμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε τις κορυφές των δύο κυματομορφών ή τα σημεία στα οποία μηδενίζονται και τείνουν προς τη θετική κατεύθυνση και οι δύο. Προσοχή: Για σωστή μέτρηση η κυματομορφή που εξετάζεται κάθε φορά πρέπει να είναι κεντραρισμένη σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα. Για να βρούμε τη διαφορά φάσης αρκεί να μετατρέψουμε το χρόνο  $\Delta t$  σε γωνία σύμφωνα με την εξ.(1.5) ως εξής:

$$\varphi = 360^\circ \frac{\Delta t}{T} = 360^\circ \frac{d \cdot \text{time/div}}{D \cdot \text{time/div}} \Rightarrow \varphi = 360^\circ \frac{d}{D} \quad (1.13)$$

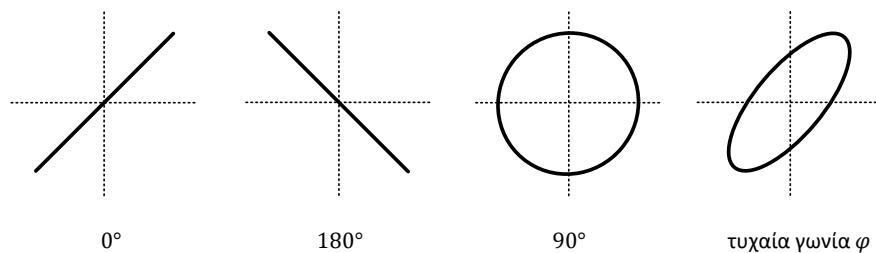
### B) Με σχήματα Lissajous

Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο χρονικών σημάτων μπορεί να βρεθεί και ως εξής. Αν τοποθετήσουμε τις δύο κυματομορφές στην οριζόντια και κατακόρυφη απόκλιση (αρκεί να πατήσουμε το κουμπί X-Y του παλμογράφου), τότε ανάλογα με τη διαφορά φάσης μεταξύ τους θα προκύψει στην οθόνη του παλμογράφου μια εικόνα σαν αυτές του Σχ.4.

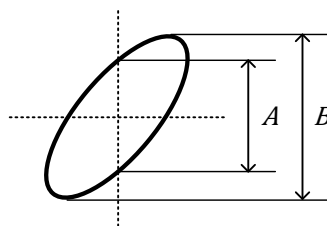
Το σχήμα που προκύπτει στην οθόνη μπορεί να είναι από ευθεία μέχρι κύκλος ανάλογα με τη διαφορά φάσης. Στη γενική περίπτωση είναι έλλειψη. Η διαφορά φάσης υπολογίζεται από την έλλειψη αυτή με τη βοήθεια της σχέσης

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{A}{B} \quad (1.14)$$

όπου  $A, B$  τα μήκη που φαίνονται στο Σχ.5. Προσοχή: Για σωστή μέτρηση απαιτείται κεντράρισμα της έλλειψης.



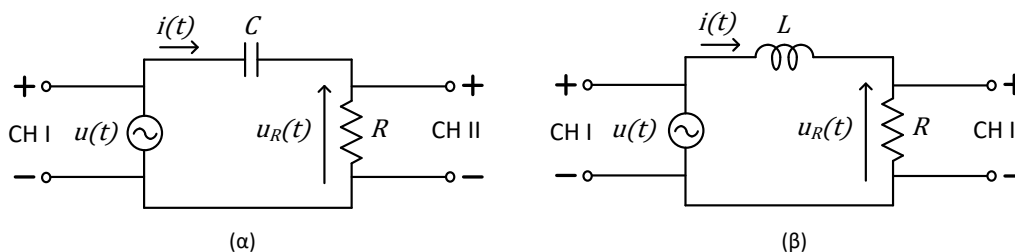
Σχήμα 4: Εύρεση διαφοράς φάσης δύο σημάτων με σχήματα Lissajous.



Σχήμα 5: Μήκη  $A$  και  $B$  για εύρεση διαφοράς φάσης δύο σημάτων.

## 2. Πειραματική διαδικασία

- 1) Ανοίξετε και ρυθμίστε τον παλμογράφο για μέτρηση.
- 2) Να πραγματοποιηθεί το κύκλωμα του Σχ.6(α). Να χρησιμοποιηθεί η τιμή  $330 \Omega$  για την αντίσταση και  $0.1 \mu\text{F}$  για τον πυκνωτή.
- 3) Ρυθμίστε τη γεννήτρια ώστε να λαμβάνετε ημιτονοειδές σήμα στην έξοδό της με rms τιμή  $4 \text{ V}$  και συχνότητα  $2 \text{ kHz}$ .
- 4) (α) Να μετρήσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης και του ρεύματος στο κύκλωμα με τους δύο τρόπους που αναφέρθηκαν παραπάνω.  
(β) Να υπολογιστεί η διαφορά φάσης με βάση τη θεωρία.  
(γ) Να συμπληρωθεί ο πίνακας 1. Να συγκρίνετε τις τιμές των γωνιών που προέκυψαν πειραματικά με τις θεωρητικές και να εξηγήσετε τις αποκλίσεις.
- 5) Να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για το κύκλωμα του Σχ.6(β). Να χρησιμοποιηθεί η τιμή  $330 \Omega$  για την αντίσταση και  $20 \text{ mH}$  για το πηνίο.

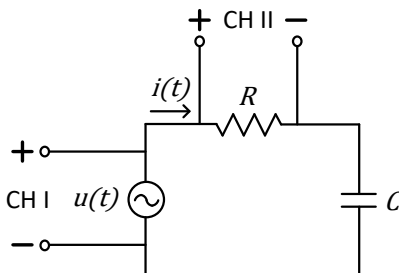


Σχήμα 6: Διάταξη μέτρησης διαφοράς φάσης τάσης-ρεύματος (α) σε κύκλωμα  $RC$ , (β) σε κύκλωμα  $RL$ .

Πίνακας 1: Διαφορά φάσης από μετρήσεις και θεωρητικός υπολογισμός

	$d$	$D$	$\varphi$ Από σύγκριση χρονικών σημάτων	$A$	$B$	$\varphi$ Από σχήμα Lissajous	$\varphi$ Από θεωρητικό υπολογισμό
Κύκλωμα $RC$							
Κύκλωμα $RL$							

- 6) Θα μπορούσε να υλοποιηθεί το κύκλωμα όπως φαίνεται στο Σχ.7; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.



Σχήμα 7: Κύκλωμα ερωτήματος 6.

### 3. Ερωτήσεις - Υπολογισμοί

- 1) Στο κύκλωμα του Σχ.2(β) είναι  $R = 900 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  και η τάση της πηγής είναι

$$u(t) = 20 \sin 628t \text{ V}$$

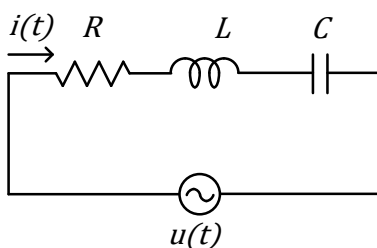
Να σχεδιαστούν σε κατάλληλο διάγραμμα η τάση της πηγής  $u(t)$  και το ρεύμα  $i(t)$  του κυκλώματος συναρτήσει του χρόνου. Ο άξονας του χρόνου να είναι κοινός για τα δύο μεγέθη.

- 2) Στο κύκλωμα του Σχ.8 είναι  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  και  $L = 15 \text{ mH}$ . Η συχνότητα της τάσης της πηγής είναι  $1 \text{ kHz}$  και το πλάτος της είναι  $100 \text{ V}$ .

A) Να βρεθεί η διαφορά φάσης τάσης-ρεύματος.

B) Να σχεδιαστεί το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων  $\dot{U}_L$ ,  $\dot{U}_C$ ,  $\dot{U}_R$ ,  $\dot{U}$ .

Γ) Το κύκλωμα εμφανίζει χωρητική ή επαγωγική συμπεριφορά; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.



Σχήμα 8: Κύκλωμα RLC σειράς.

## Άσκηση 2<sup>η</sup>: Συντονισμός

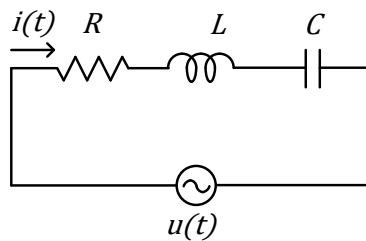
**Αντικείμενο:** Μελέτη του συντονισμού ρεύματος και του συντονισμού τάσης.

**Όργανα που θα χρησιμοποιηθούν:** Γεννήτρια συχνοτήτων, αντιστάτες, πυκνωτής, πηνίο, πολύμετρα, συνδετικοί αγωγοί.

### 1. Θεωρία

#### 1.1 Συντονισμός ρεύματος

Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχ.1 που τροφοδοτείται από πηγή ημιτονοειδούς τάσης σταθερής rms τιμής  $U$ . Η κυκλική συχνότητα  $\omega = 2\pi f$  της τάσης μπορεί να μεταβάλλεται.



Σχήμα 1: Κύκλωμα συντονισμού ρεύματος.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος δίνεται από τη σχέση

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (2.1)$$

Το μέτρο της είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.2)$$

Παρατηρούμε ότι η ωμική αντίσταση είναι ανεξάρτητη της συχνότητας, όμως η επαγωγική και η χωρητική αντίδραση εξαρτώνται και οι δύο από αυτή. Όταν η συχνότητα μεταβάλλεται, τότε μεταβάλλονται και αυτές, άρα και η συνολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

Ο φάσορας του ρεύματος στο κύκλωμα είναι

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} \quad (2.3)$$

και η rms τιμή του είναι

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2.4)$$

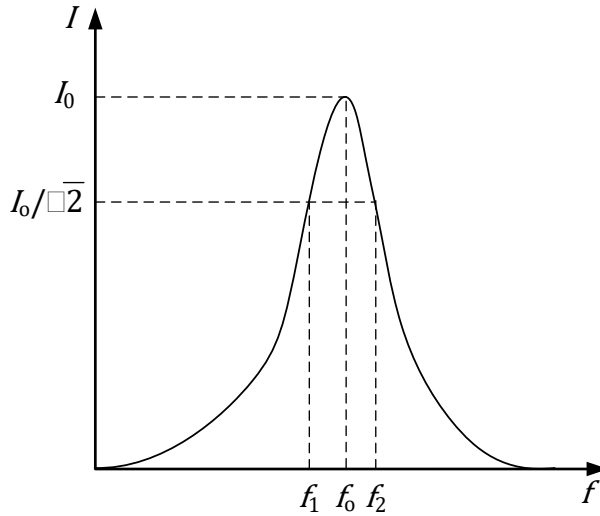
Όταν λοιπόν μεταβάλλεται η συχνότητα της τάσης, μεταβάλλεται και η rms τιμή του ρεύματος. Στο Σχ.2 έχει σχεδιαστεί η καμπύλη του ρεύματος συναρτήσει της συχνότητας. Σύμφωνα με την εξ.(2.4) η μέγιστη τιμή του ρεύματος προκύπτει όταν ο παρονομαστής του γίνεται ελάχιστος, δηλαδή όταν η συχνότητα της τάσης τροφοδοσίας πάρει τιμή  $\omega_0$  τέτοια ώστε

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.5)$$

ή αλλιώς όταν

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.6)$$

Τότε, όπως προκύπτει από την εξ.(2.4), η rms τιμή του ρεύματος γίνεται μέγιστη και έχουμε συντονισμό ρεύματος. Η εξ.(2.6) δίνει τη συχνότητα συντονισμού.

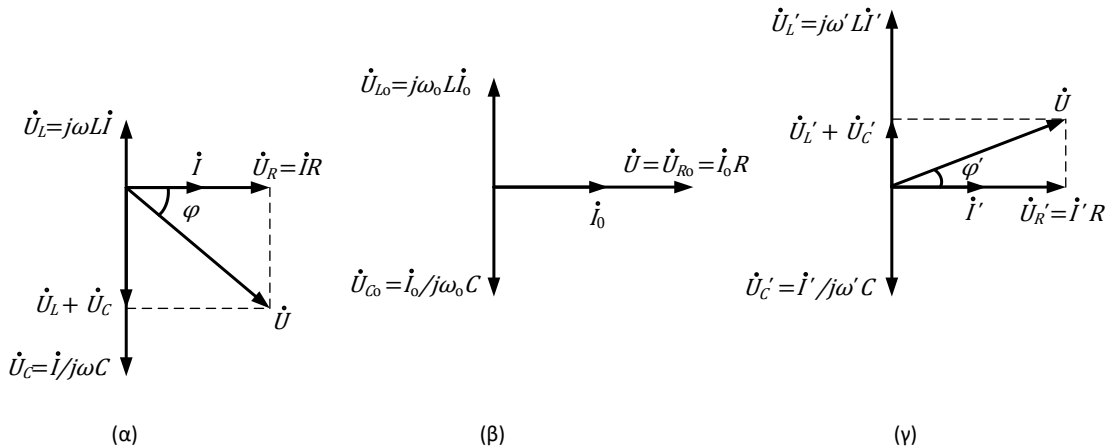


Σχήμα 2: Καμπύλη ρεύματος συναρτήσει της συχνότητας.

Η rms τιμή του ρεύματος στο συντονισμό είναι

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (2.7)$$

Στο σχ.3 έχουν σχεδιαστεί οι φάσορες των τάσεων και του ρεύματος για το κύκλωμα του σχ.1 για τρεις διαφορετικές τιμές της συχνότητας της τάσης τροφοδοσίας.



Σχήμα 3: Διάγραμμα (α) για συχνότητα μικρότερη της συχνότητας συντονισμού, (β) για τη συχνότητα συντονισμού και (γ) για συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας συντονισμού.

Στο σχ.3(α) είναι  $\omega < \omega_0$ , επομένως η επαγωγική αντίδραση του πηνίου είναι μικρότερη από τη χωρητική αντίδραση του πυκνωτή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η τάση στα άκρα του συνδυασμού πηνίου-πυκνωτή  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$  να έπεται του ρεύματος κατά  $90^\circ$ . Η συνισταμένη της τάσης  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$  και της τάσης στα άκρα της αντίστασης  $\dot{U}_R$  είναι η τάση της πηγής  $\dot{U}$ . Η τάση  $\dot{U}$ , όπως



προκύπτει από το σχήμα, για τη συχνότητα αυτή έπεται του ρεύματος κατά γωνία  $\varphi$  και ο χαρακτήρας του κυκλώματος είναι  $RC$ . Στη συχνότητα συντονισμού  $\omega_0$  (Σχ.3(β)) η επαγωγική αντίδραση γίνεται ίση με τη χωρητική, η τάση  $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$  και ο χαρακτήρας του κυκλώματος είναι καθαρά ωμικός. Στο Σχ.3(γ) είναι  $\omega' > \omega_0$ , επομένως η επαγωγική αντίδραση είναι μεγαλύτερη από τη χωρητική, η τάση  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$  προηγείται του ρεύματος κατά  $90^\circ$  και ο χαρακτήρας του κυκλώματος είναι  $RL$ .

Στην πράξη μας ενδιαφέρει μια περιοχή συχνοτήτων από  $f_1$  έως  $f_2$  (Σχ.2) για την οποία

$$I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2.8)$$

Την περιοχή αυτή συχνοτήτων την ονομάζουμε ωφέλιμη ζώνη συχνοτήτων  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Αν οι τιμές του ρεύματος στις συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$  είναι  $I_1$  και  $I_2$  αντίστοιχα τότε

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

Ισχύουν επίσης τα εξής:

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \Rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 = R^2 \Rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C}) = \pm R \quad (2.10)$$

Επειδή  $\omega_2 > \omega_1$  από την εξ.(2.10) προκύπτει ότι

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \quad \text{και} \quad \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R \quad (2.11)$$

Με πρόσθεση των εξ.(2.11) κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} + \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} &= 0 \Rightarrow \omega_1 \omega_2^2 LC - \omega_1 + \omega_1^2 \omega_2 LC - \omega_2 = 0 \\ &\Rightarrow \omega_1 \omega_2 LC (\omega_1 + \omega_2) - (\omega_1 + \omega_2) = 0 \\ &\Rightarrow \omega_1 \omega_2 LC - 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \end{aligned}$$

και επομένως

$$f_1 f_2 = f_0^2 \quad (2.12)$$

Με αφαίρεση των εξ.(2.11) κατά μέλη προκύπτει ότι

$$(\omega_2 - \omega_1)L + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 \omega_2 C} = 2R \Rightarrow \Delta\omega \cdot L + \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 C} = 2R \quad (2.13)$$

όπου  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Από την εξ.(2.5) όμως προκύπτει ότι

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \quad (2.14)$$

Επομένως η εξ.(2.13) γράφεται ως εξής:

$$\Delta\omega \cdot 2L = 2R \Rightarrow \Delta\omega = \frac{R}{L} \Rightarrow \Delta f = \frac{R}{2\pi L} \quad (2.15)$$

Δηλαδή το εύρος της ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων εξαρτάται από τα στοιχεία του κυκλώματος.

Στις συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$  η ενεργός ισχύς στο κύκλωμα είναι

$$P_1 = P_2 = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \frac{I_0^2}{2} R = \frac{P_0}{2} \quad (2.16)$$

όπου

$$P_0 = I_0^2 R$$

είναι η ενεργός ισχύς στο συντονισμό. Γι' αυτό οι  $f_1$  και  $f_2$  ονομάζονται συχνότητες μισής ισχύος.

Επίσης ορίζεται ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος ως εξής:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (2.17)$$

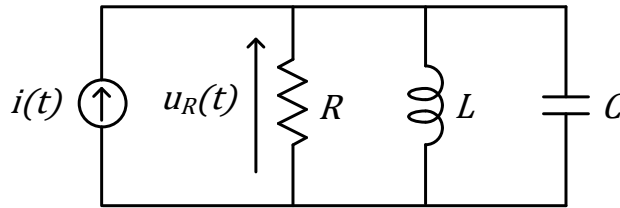
Από την εξ.(2.15) και την εξ.(2.17) προκύπτει ότι

$$\Delta f = \frac{R \omega_0}{2\pi L \omega_0} = \frac{\omega_0}{2\pi Q_0} \Rightarrow \Delta f = \frac{f_0}{Q_0} \quad (2.18)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής ποιότητας  $Q_0$  τόσο μικρότερο είναι το εύρος ζώνης  $\Delta f$  και επομένως τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητα επιλογής μιας συγκεκριμένης συχνότητας από το κύκλωμα.

## 1.2 Συντονισμός τάσης

Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχ.4 το οποίο τροφοδοτείται από πηγή σταθερού ρεύματος  $I$ .



Σχήμα 4: Κύκλωμα συντονισμού τάσης.

Η σύνθετη αγωγιμότητα του κυκλώματος είναι

$$\dot{Y} = G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (2.19)$$

όπου  $G = 1/R$ . Το μέτρο της  $\dot{Y}$  είναι

$$Y = \sqrt{G^2 + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad (2.20)$$

Η τάση στα άκρα των παράλληλα συνδεδεμένων στοιχείων είναι

$$\dot{U} = \frac{i}{Y} \quad (2.21)$$

Η μέγιστη τιμή της τάσης προκύπτει όταν η γωνιακή συχνότητα της τάσης τροφοδοσίας πάρει τιμή  $\omega_0$  τέτοια ώστε

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Δηλαδή και πάλι ισχύει η εξ.(2.6) για τη συχνότητα συντονισμού.

Στην συχνότητα  $f_0$  έχουμε συντονισμό ρεύματος και η τιμή της τάσης στα άκρα των στοιχείων γίνεται

$$U_0 = \frac{I}{G} \quad (2.22)$$

Μπορεί να σχεδιαστεί μια καμπύλη συντονισμού για την τάση παρόμοια με αυτή του ρεύματος (Σχ.2). Επίσης ορίζεται και πάλι η ωφέλιμη ζώνη συχνοτήτων  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Για τις τάσεις  $U_1$  και  $U_2$  στις συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$  ισχύει

$$U_1 = U_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (2.23)$$

Στην ωφέλιμη ζώνη συχνοτήτων η τάση είναι

$$U \geq \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (2.24)$$

Στις συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$  ισχύει ότι

$$P_1 = P_2 = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{P_0}{2} \quad (2.25)$$

Όπως και παραπάνω αποδεικνύεται ότι ισχύει η εξ.(2.12) και επίσης

$$\Delta f = \frac{G}{2\pi C} \quad (2.26)$$

Ο συντελεστής ποιότητας είναι

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (2.27)$$

Επίσης

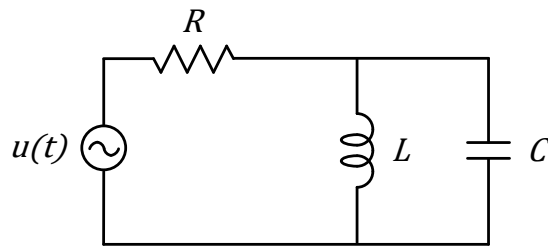
$$\Delta f = \frac{G}{2\pi C} = \frac{f_0}{Q_0} \quad (2.28)$$

## 2. Πειραματική διαδικασία

- 1) Να συνδέσετε το κύκλωμα του Σχ.1 με  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 30 \text{ mH}$ ,  $C = 0.02 \text{ }\mu\text{F}$ .
- 2) Να υπολογίσετε τη συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος.
- 3) Να ρυθμίσετε τη συχνότητα της γεννήτριας στο 1 kHz και την rms τιμή στα 4 V. Να μετρήσετε με βολτόμετρο τις τάσεις  $U_R$ ,  $U_C$ ,  $U_L$  στα άκρα των στοιχείων  $R$ ,  $L$ ,  $C$  αντίστοιχα. Να υπολογίσετε επίσης την τιμή  $|\dot{U}_L + \dot{U}_C|$ . Να καταγράψετε τα αποτελέσματα στον πίνακα 1. Να επαναλάβετε τη διαδικασία αυτή για όλες τις συχνότητες του πίνακα αυτού.
- 4) Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα 1.
- 5) Να σχεδιαστεί η καμπύλη του ρεύματος συναρτήσει της συχνότητας.
- 5) Να βρεθεί από την καμπύλη η συχνότητα συντονισμού. Να υπολογιστεί η τιμή αυτή θεωρητικά και να συγκριθούν οι δύο τιμές.
- 6) Να βρεθούν από την καμπύλη οι συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$  και να υπολογιστεί η  $\Delta f$ . Να υπολογιστεί ο συντελεστής ποιότητας.
- 7) Να σχεδιαστούν τα  $X_L$  και  $X_C$  συναρτήσει της συχνότητας. Να σχεδιαστούν και τα δύο στο ίδιο διάγραμμα.
- 8) Να συνδεθεί το κύκλωμα του Σχ.5 με  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 30 \text{ mH}$ ,  $C = 0.05 \text{ }\mu\text{F}$ . Το κύκλωμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί για την εξέταση του παράλληλου συντονισμού αντί αυτού του Σχ.4.

**Πίνακας 1:** Τιμές τάσης στα άκρα των στοιχείων και υπολογισμοί

$f$ (kHz)	$U_R$ (V)	$U_C$ (V)	$U_L$ (V)	$ \dot{U}_L + \dot{U}_C $ (V)	$I = \frac{U_R}{R}$ (mA)	$X_C = \frac{U_C}{I}$ (Ω)	$X_L = \frac{U_L}{I}$ (Ω)	$\frac{X_L - X_C}{I}$ $= \frac{ \dot{U}_L + \dot{U}_C }{I}$ (Ω)
1								
2								
3								
4								
5								
5.3								
5.6								
5.9								
6.2								
6.5								
6.8								
7								
8								
9								
10								
11								
12								



Σχήμα 5: Κύκλωμα πειραματικής διερεύνησης συντονισμού τάσης.

- 9) Να ρυθμίσετε τη συχνότητα της γεννήτριας στο 1 kHz και rms τιμή 4 V. Να μετρήσετε με βολτόμετρο τις τάσεις  $U_R$ ,  $U_L$  στα άκρα των στοιχείων  $R$  και  $L$  ή  $C$  αντίστοιχα. Να καταγράψετε τα αποτελέσματα στον πίνακα 2. Να επαναλάβετε τη διαδικασία για όλες τις συχνότητες του πίνακα αυτού.
- 10) Να σχεδιάσετε την σύνθετη αντίσταση του παράλληλου συνδυασμού  $L$  και  $C$  συναρτήσει της συχνότητας. Να σχεδιαστεί στο ίδιο διάγραμμα η καμπύλη συντονισμού.
- 11) Να βρεθεί από την καμπύλη η συχνότητα συντονισμού. Να υπολογιστεί η τιμή αυτή θεωρητικά και να συγκριθούν οι δύο τιμές.
- 12) Να βρεθούν από την καμπύλη οι συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$  και να υπολογιστεί η  $\Delta f$ . Να υπολογιστεί ο συντελεστής ποιότητας.

### 3. Ερωτήσεις - Υπολογισμοί

- 1) Σε κύκλωμα συντονισμού σειράς η συχνότητα συντονισμού είναι  $f_o = 2$  kHz, η τάση της πηγής είναι  $U = 10$  V και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα στο συντονισμό είναι 10 mA. Δίνεται επίσης ο συντελεστής ποιότητας  $Q = 5$ . Να προσδιοριστούν οι τιμές των στοιχείων του κυκλώματος.
- 2) Σε κύκλωμα συντονισμού σειράς η τάση είναι

$$u(t) = 7.7 \sin(500t + 30^\circ)$$

και το ρεύμα είναι

$$i(t) = 2.83 \sin(500t + 30^\circ)$$

Η τιμή της αυτεπαγωγής του πηνίου είναι  $L = 0.5$  H. Να βρεθούν οι τιμές των  $R$  και  $C$ .

- 3) Τα στοιχεία ενός κυκλώματος συντονισμού σειράς είναι  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0.02$  H,  $C = 10 \mu\text{F}$ . Να βρεθούν τα εξής:
  - A) Η συχνότητα συντονισμού.
  - B) Η σύνθετη αντίσταση στο συντονισμό.
  - Γ) Το εύρος ζώνης.
  - Δ) Ο συντελεστής ποιότητας.

**Πίνακας 2:** Τιμές τάσης στα άκρα των στοιχείων και υπολογισμοί

$f$ (kHz)	$U_R$ (V)	$U_L = U_C$ (V)	$I = \frac{U_R}{R}$ (mA)	$Z = \frac{U_{\text{πηγής}}}{I}$ ( $\Omega$ )
1				
2				
3				
3.3				
3.6				
3.9				
4.2				
4.5				
4.8				
5				
6				
7				
8				