

Διάλεξη 2
Ισχύς σε μονοφασικά κυκλώματα



Στιγμιαία Ισχύς

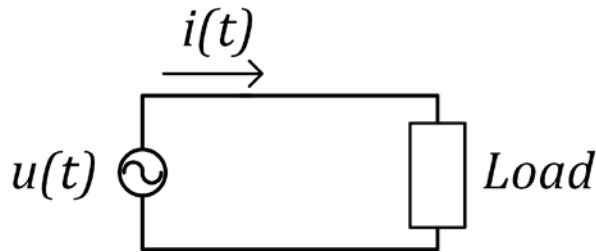
- Η ισχύς είναι η πιο σημαντική ποσότητα στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, στα ηλεκτρονικά συστήματα και στα συστήματα τηλεπικοινωνιών, γιατί σε κάθε περίπτωση υπάρχει μεταφορά ενέργειας.
- Η στιγμιαία ισχύς $p(t)$ είναι ο ρυθμός μεταφοράς ή μετατροπής της ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα κύκλωμα. Η στιγμιαία ισχύς εκφράζεται από τη σχέση:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad [W]$$



Στιγμιαία Ισχύς

Ανάλυση στιγμιαίας ισχύος



$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \beta)$$

Διαφορά φάσης

$$\phi = \alpha - \beta$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 UI \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \Rightarrow$$

$$p(t) = UI \cos(\omega t + \alpha - \omega t - \beta) + UI \cos(\omega t + \alpha + \omega t + \beta) =$$

$$= UI \cos(\alpha - \beta) + UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) =$$

$$= UI \cos \phi + UI \cos(2\omega t + \alpha + \alpha - \phi) =$$

$$= UI \cos \phi + UI \cos(2\omega t + 2\alpha - \phi) \Rightarrow$$

$$p(t) = UI \cos \phi + UI \cos \phi \cos(2\omega t + 2\alpha) + UI \sin \phi \sin(2\omega t + 2\alpha)$$



Στιγμιαία Ισχύς

Ανάλυση στιγμιαίας ισχύος

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

- Περιλαμβάνει ένα σταθερό όρο που εξαρτάται από τη διαφορά φάσης φ μεταξύ τάσης-ρεύματος και έναν ταλαντευόμενο όρο με συχνότητα 2ω .
- Η στιγμιαία ισχύς είναι περιοδικό μέγεθος με περίοδο $T/2$.
- Γενικά είναι θετική για ένα μέρος του κύκλου και αρνητική για το υπόλοιπο. Όταν είναι θετική απορροφάται ισχύς από το κύκλωμα και όταν είναι αρνητική απορροφάται από την πηγή.
- Αυτή η αμφίδρομη ροή ενέργειας είναι δυνατή όταν υπάρχουν στοιχεία στο κύκλωμα που αποθηκεύουν ενέργεια (πυκνωτές και επαγωγείς).

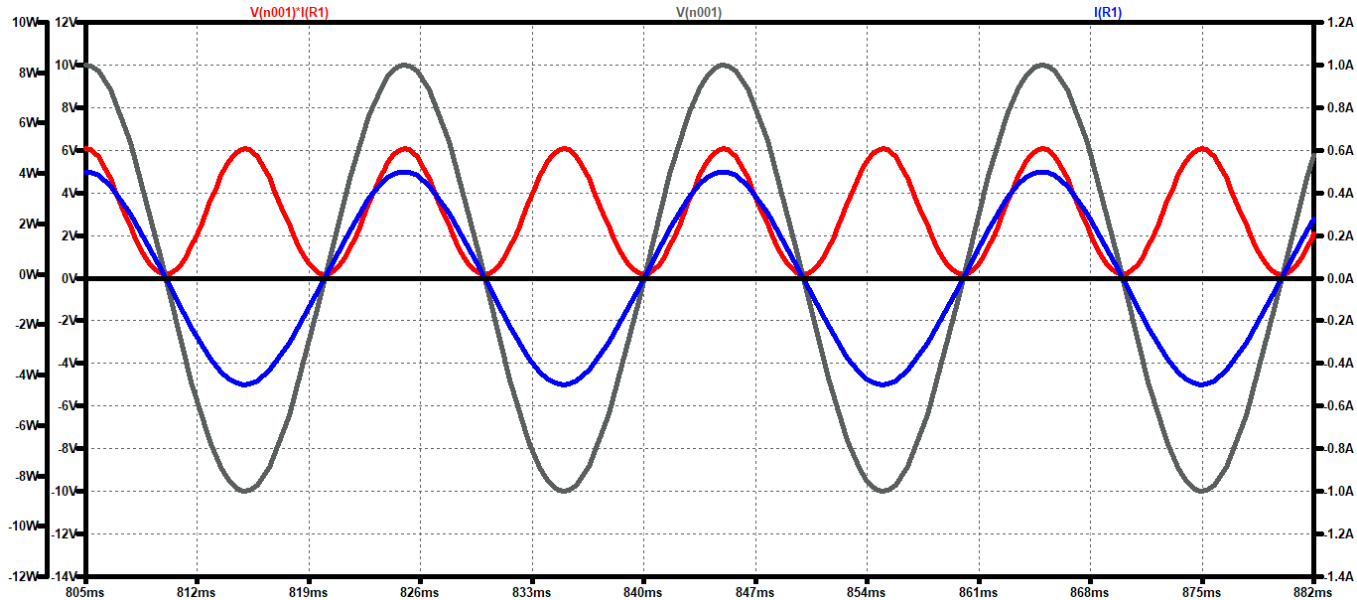


Στιγμιαία Ισχύς

Ανάλυση στιγμιαίας ισχύος

$$p(t) = UI [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]$$

$$\varphi = 0^\circ$$

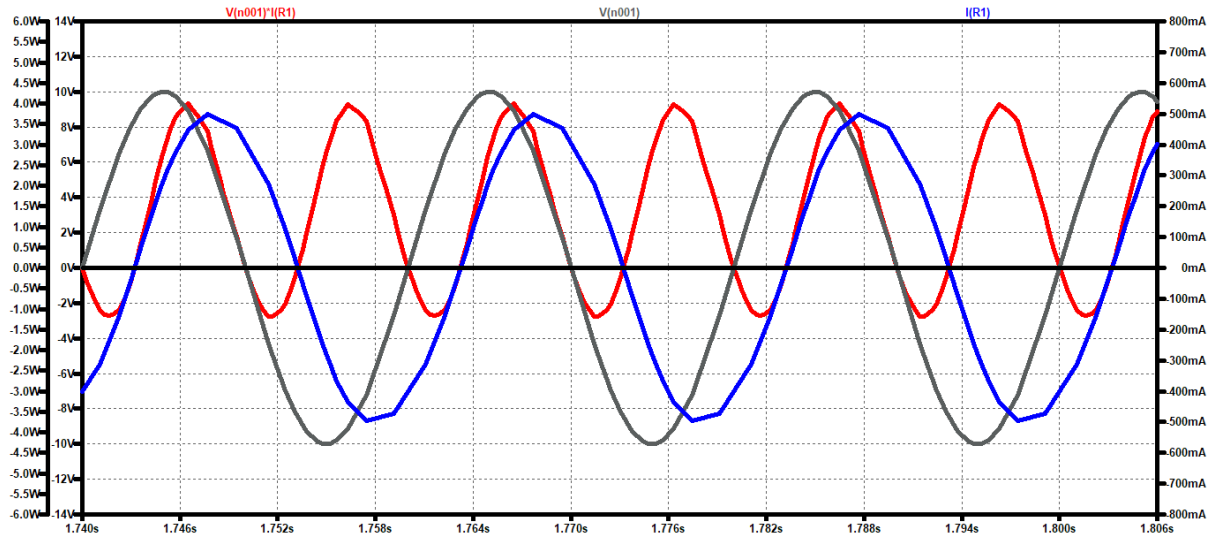


Στιγμιαία Ισχύς

Ανάλυση στιγμιαίας ισχύος

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

$$0^\circ < \varphi < 90^\circ$$

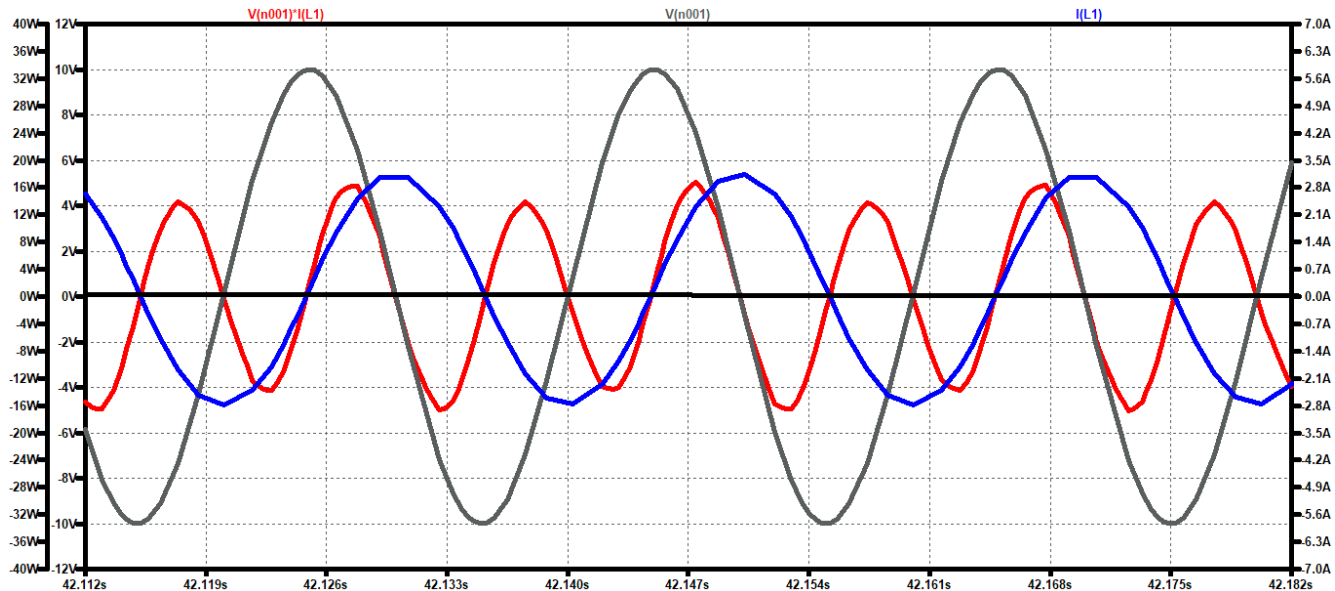


Στιγμιαία Ισχύς

Ανάλυση στιγμιαίας ισχύος

$$p(t) = UI \sin(2\omega t + 2a)$$

$$\varphi = 90^\circ$$



Ενεργός Ισχύς

- Η στιγμιαία ισχύς μεταβάλλεται με το χρόνο. Η μέση ισχύς είναι πιο εύκολο να μετρηθεί (με το βαττόμετρο).
- Η μέση ισχύς ισούται με: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi$
- Η μέση ισχύς P ονομάζεται και **ενεργός ισχύς**. Και είναι **ανεξάρτητη από το χρόνο**. Η μονάδα μέτρησης είναι το Watt (W).
- Όταν $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ η ενεργός ισχύς είναι μηδέν, δηλαδή σε ιδανικό επαγωγό και πυκνωτή είναι μηδέν.
- Εκφράζει ηλεκτρική ενέργεια που μεταφέρεται στο φορτίο και μετατρέπεται σε κάποια άλλη μορφή (θερμική, φωτεινή, μηχανική ενέργεια κλπ).
- Πρόκειται για ενέργεια που αξιοποιείται με κάποιο τρόπο, αλλά και για θερμικές απώλειες πχ σε αντιστάσεις αγωγών μεταφοράς.



Άεργος Ισχύς

Εκτός από την ενεργό ισχύ, ορίζουμε επίσης την **άεργο ισχύ**, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$Q = UI \sin \varphi$$

- Μονάδα μέτρησης το Volt-ampere reactive (Var).
- Προκύπτει όταν σε ένα κύκλωμα υπάρχουν επαγωγικοί και/ή πυκνωτές. Αν $\varphi = 0$ δεν υπάρχει άεργος.
- Ηλεκτρική ενέργεια από την πηγή για ένα χρονικό διάστημα αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο των επαγωγών ή το ηλεκτρικό πεδίο των πυκνωτών και κατά το υπόλοιπο μέρος του κύκλου επιστρέφει στην πηγή.
- Ένας γενικός ορισμός είναι ότι άεργος ισχύς προκύπτει όταν η τάση και το ρεύμα έχουν διαφορά φάσης.
- Τυχαίνει να είναι ίση με το πλάτος ενός από τους ταλαντευόμενους όρους της στιγμιαίας ισχύος.
- Συχνά λέμε ότι δεν σχετίζεται με «ωφέλιμη» ενέργεια (αν και σε αυτή βασίζεται η παραγωγή και η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας). Γενικά στόχος είναι η μείωσή της σε ένα δίκτυο.



Έργος Ισχύς

- Η άεργος ισχύς ενός φορτίου είναι μηδέν όταν η τάση στα άκρα του και το ρεύμα που το διαρρέει είναι συμφασικά, δηλαδή $\varphi = 0$. Αυτό ισχύει για καθαρά ωμικό φορτίο.
- Όταν $\varphi > 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα έπεται της τάσης, η άεργος είναι θετική και το φορτίο λέμε ότι έχει επαγωγικό χαρακτήρα. Θεωρούμε ότι το φορτίο απορροφά άεργο ισχύ από το κύκλωμα (καταναλώνει).
- Όταν $\varphi < 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα προηγείται της τάσης, η άεργος είναι αρνητική και το φορτίο λέμε ότι έχει χωρητικό χαρακτήρα. Θεωρούμε ότι το φορτίο δίνει άεργο ισχύ στο κύκλωμα (παράγει).
- Ως προς την πηγή, όταν η άεργος είναι θετική τότε η πηγή παράγει άεργο ενώ όταν είναι αρνητική απορροφά.



Φαινόμενη και Μιγαδική Ισχύς

Ορίζουμε επίσης την **φαινόμενη ισχύς** S , ως:

$$S = UI$$

➤ Μονάδα μέτρησης το Volt-ampere (VA).

Η μιγαδική ισχύς ορίζεται ως:

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^*$$

Σχέση μεταξύ Φαινόμενης και μιγαδικής ισχύος

Έστω ότι οι φάσορες της τάσης και του ρεύματος στο φορτίο είναι $\dot{U} = U\angle\alpha$ και $\dot{I} = I\angle\beta$

Τότε:

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Ue^{j\alpha} Ie^{-j\beta} = UIe^{j(\alpha-\beta)} = UIe^{j\varphi} = UI\angle\varphi$$

$$\dot{S} = UIe^{j\varphi} = UI(\cos\varphi + j\sin\varphi) = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

Η φαινομένη ισχύς είναι ίση με το μέτρο της μιγαδικής ισχύος, δηλαδή

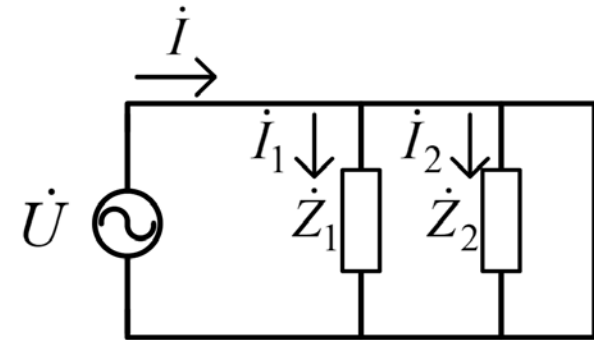
$$S = |\dot{S}| = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



Διατήρηση Ισχύος

- Έστω δύο φορτία με σύνθετες αντιστάσεις Z_1 και Z_2 τα οποία συνδέονται παράλληλα και εφαρμόζεται σε αυτά τάση \dot{U} .
- Σύμφωνα με τον KCL το συνολικό ρεύμα θα είναι:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$



- Αν η συνολική μιγαδική ισχύς είναι \dot{S} και \dot{S}_1, \dot{S}_2 η αντίστοιχη των στοιχείων 1 και 2 τότε ισχύει:

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}(\dot{I}_1^* + \dot{I}_2^*) = \dot{U}\dot{I}_1^* + \dot{U}\dot{I}_2^* = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 \Rightarrow$$

$$P + jQ = (P_1 + jQ_1) + (P_2 + jQ_2) \Rightarrow$$

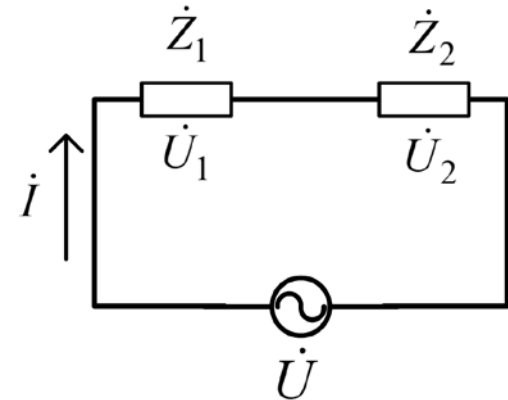
$$P + jQ = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2) \Rightarrow \begin{cases} P = P_1 + P_2 \\ Q = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$



Διατήρηση Ισχύος

- Έστω δύο φορτία με σύνθετες αντιστάσεις Z_1 και Z_2 τα οποία συνδέονται σε σειρά και εφαρμόζεται σε αυτά τάση \dot{U} .
- Σύμφωνα με το νόμο τάσεων Kirchhoff θα είναι:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$



- Αν η συνολική μιγαδική ισχύς είναι \dot{S} και \dot{S}_1, \dot{S}_2 η αντίστοιχη των στοιχείων 1 και 2 τότε ισχύει:

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{I}(\dot{U}_1^* + \dot{U}_2^*) = \dot{U}_1\dot{I}^* + \dot{U}_2\dot{I}^* = \dot{S}_1 + \dot{S}_2$$

- Για την ενεργό και την άεργο προκύπτει ότι και στο προηγούμενο κύκλωμα.

Συμπέρασμα: Όπως και να είναι συνδεδεμένα τα στοιχεία, η συνολική ισχύς που παρέχουν οι πηγές ισούται με την συνολική ισχύ που λαμβάνουν τα φορτία. Αυτό ισχύει επίσης για την ενεργό και την άεργο. **Δεν ισχύει** για τη φαινομένη.



Συντελεστής Ισχύος

Ορίζεται ο συντελεστής ισχύος ως $PF = \frac{P}{S}$

- Είναι αδιάστατο μέγεθος.
- Έχει μέγιστη τιμή τη μονάδα.
- Δείχνει τι ποσοστό της φαινομένης είναι η ενεργός ισχύς.
- Για κυκλώματα με ημιτονοειδείς κυματομορφές, όπως είναι αυτά που εξετάζουμε, προκύπτει ότι:

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$$

- Είναι πάντα θετικός. Όταν το ρεύμα έπεται της τάσης χαρακτηρίζεται ως επαγωγικός, ενώ όταν προηγείται ως χωρητικός.
- Όσο μικρότερη είναι η άεργος του φορτίου τόσο υψηλότερος είναι ο συντελεστής ισχύος του.



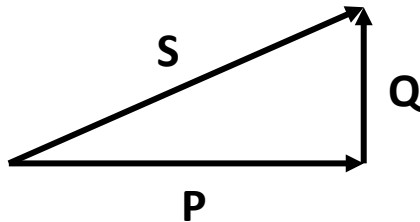
Τρίγωνο Ισχύος

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η φαινομένη ισχύς προκύπτει και από τη σχέση:

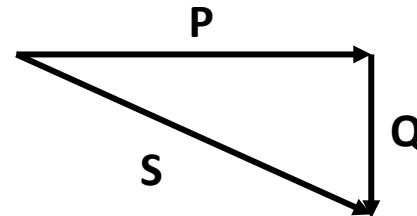
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Η σχέση αυτή θυμίζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές ανάλογες της ενεργού, της αέργου και της φαινομένης ισχύος.

Για RL φορτίο (Q θετική)

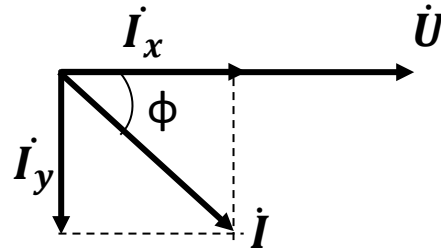
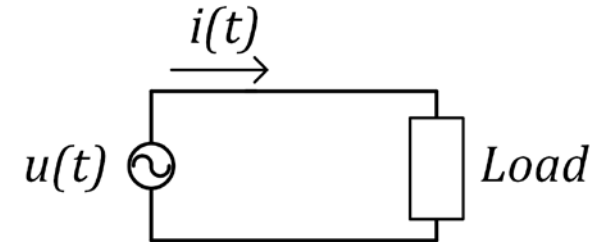


Για RC φορτίο (Q αρνητική)



Ανάλυση ρεύματος

- Ας θεωρήσουμε φορτίο **RL**.
- Αναλύουμε το ρεύμα σε δύο συνιστώσες, την \dot{I}_x που είναι παράλληλη προς την τάση και την \dot{I}_y που είναι κάθετη στην τάση.
- Παρατηρούμε ότι:
 - Η συνιστώσα $I_x = I \cos \varphi$ σχετίζεται με την $P = UI \cos \varphi$.
 - Η συνιστώσα $I_y = I \sin \varphi$ σχετίζεται με την $Q = UI \sin \varphi$.



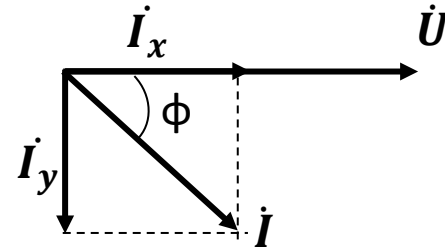
Για το λόγο αυτό η I_x χαρακτηρίζεται και ως ενεργός συνιστώσα του ρεύματος ενώ η I_y χαρακτηρίζεται ως άεργος.



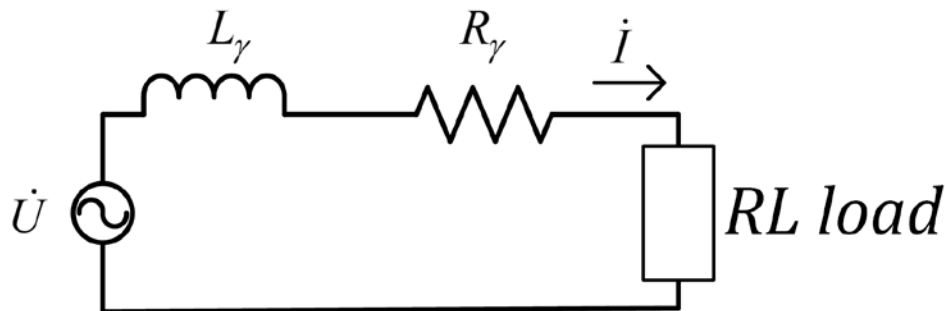
Ανάλυση ρεύματος

- Η ενεργός τιμή του ρεύματος θα είναι:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$



- Παρατηρούμε ότι η συνιστώσα του ρεύματος που σχετίζεται με την άεργο ισχύ (την οποία δεν αξιοποιούμε) αποτελεί μέρος του συνολικού ρεύματος που ρέει στο κύκλωμα.
- Στο κύκλωμα που εξετάζουμε θεωρήσαμε ότι οι αγωγοί είναι ιδανικοί. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Το παρακάτω κύκλωμα προσεγγίζει λίγο καλύτερα το πραγματικό:



Ανάλυση ρεύματος

- Το συνολικό ρεύμα I που ρέει στη γραμμή προκαλεί πτώση τάσης στη σύνθετη αντίσταση της γραμμής και θερμικές απώλειες της μορφής $I^2 R_\gamma$.
- Οι διατομές των αγωγών και ο υπόλοιπος εξοπλισμός του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας υπολογίζονται με βάση αυτό το συνολικό ρεύμα.
- Η ενεργός συνιστώσα του ρεύματος δεν μπορεί να μειωθεί γιατί εξαρτάται από το φορτίο και την τάση που θεωρούνται σταθερά.
- Η άεργος συνιστώσα του ρεύματος καταλαμβάνει πόρους του δικτύου χωρίς να αξιοποιείται. Θα έχουμε κέρδος αν τη μειώσουμε.



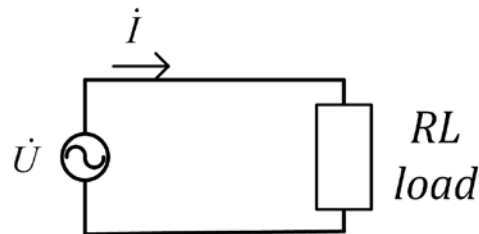
Διόρθωση Συντελεστή Ισχύος

- Θεωρούμε ότι το φορτίο είναι δεδομένο και δεν μπορούμε να επέμβουμε στο P που απορροφά, ούτε και στην τάση του δικτύου. (Αν μπορούσαμε να αυξήσουμε την τάση θα μειωνόταν το ρεύμα που απαιτείται για την ίδια μεταφορά ενεργού ισχύος.)
- Για να μειώσουμε το ρεύμα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να μειώσουμε την άεργο ισχύ που απορροφά το φορτίο από το δίκτυο, δηλαδή να αυξήσουμε το συντελεστή ισχύος του. Αυτό λέγεται αντιστάθμιση άεργου ισχύος ή διόρθωση του συντελεστή ισχύος.
- Τα περισσότερα οικιακά αλλά και βιομηχανικά φορτία έχουν επαγωγικό χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει ότι απορροφούν άεργο από το δίκτυο.
- Ένα RL φορτίο καταναλώνει άεργο ($Q > 0$) ενώ ένας πυκνωτής παράγει ($Q < 0$). Αν συνδέσουμε λοιπόν παράλληλα στο φορτίο πυκνωτή, τότε ο συνδυασμός τους θα απορροφά λιγότερη άεργο ισχύ από το δίκτυο.

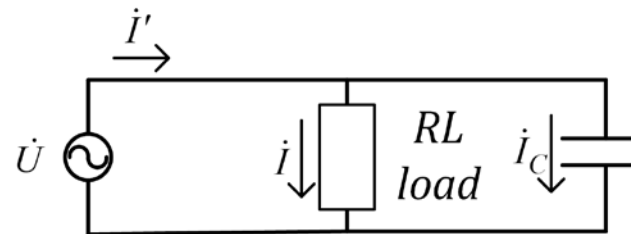


Διόρθωση Συντελεστή Ισχύος

Αρχικό κύκλωμα



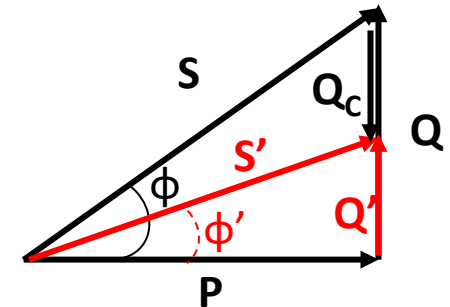
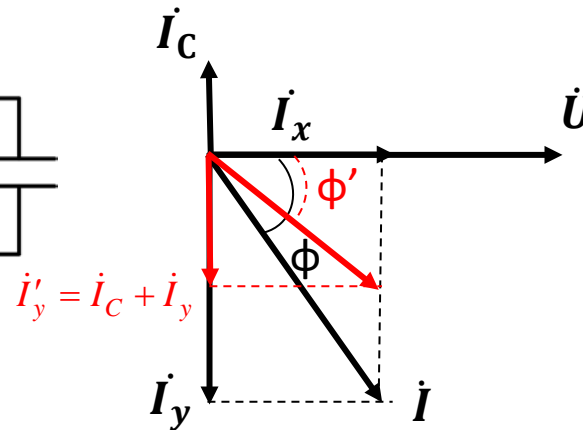
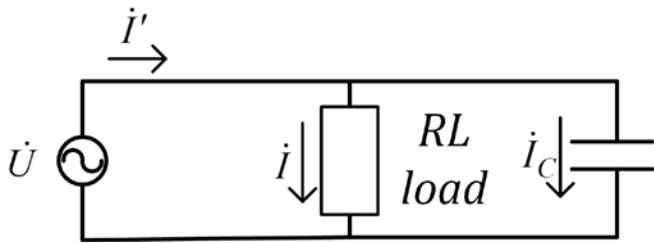
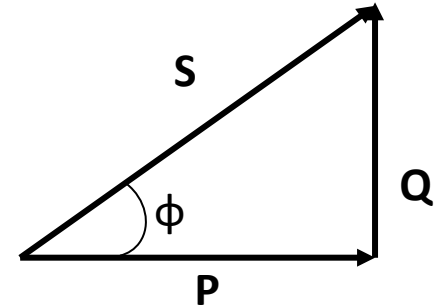
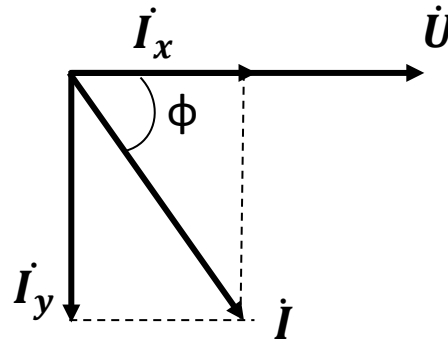
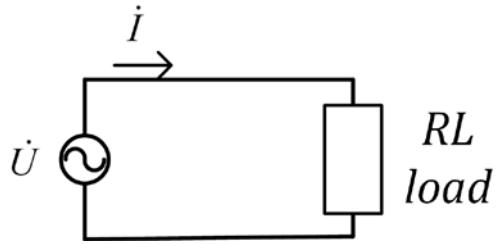
Κύκλωμα με πυκνωτή αντιστάθμισης



- Αφού η σύνθετη αντίσταση του φορτίου και η τάση στα άκρα του δεν άλλαξαν, το φορτίο εξακολουθεί να διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα I . (Θεωρούμε ότι οι αγωγοί που συνδέουν το φορτίο με την πηγή δεν έχουν εσωτερική αντίσταση.)
- Η ενεργός ισχύς που απορροφά ο συνδυασμός φορτίου-πυκνωτή οφείλεται μόνο στο RL φορτίο. Αφού η τάση και το ρεύμα στο φορτίο δεν αλλάζουν, η ενεργός ισχύς παραμένει ίδια.



Διόρθωση Συντελεστή Ισχύος



Διόρθωση Συντελεστή Ισχύος

- Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός φορτίου-πυκνωτή απορροφά λιγότερη άεργο ισχύ από το δίκτυο, η φαινομένη έχει μειωθεί, το ρεύμα έχει μειωθεί, η διαφορά φάσης τάσης ρεύματος φ έχει μειωθεί και επομένως το $\cos \varphi$ (που ισούται με το συντελεστή ισχύος) έχει αυξηθεί.
- Προσοχή: Η άεργος ισχύς που απορροφά το φορτίο δεν μεταβλήθηκε με την τοποθέτηση του πυκνωτή. Απλώς μέρος της παράγεται τοπικά από τον πυκνωτή και δεν χρειάζεται να μεταφέρεται από το δίκτυο.
- Στους αγωγούς από το σημείο της αντιστάθμισης μέχρι το φορτίο εξακολουθεί να ρέει το αρχικό ρεύμα, άρα εξακολουθούν να υπάρχουν τα μειονεκτήματα του χαμηλού συντελεστή ισχύος.



Διόρθωση Συντελεστή Ισχύος

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πυκνωτή που χρειάζεται για συγκεκριμένη διόρθωση του συντελεστή ισχύος ως εξής.
- Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$P = UI \cos \varphi$$

- Επομένως προκύπτει ότι:

$$Q = P \tan \varphi$$

Έστω ότι με την τοποθέτηση του πυκνωτή ο αρχικός συντελεστής ισχύος $\cos \varphi$ αυξάνεται σε $\cos \varphi'$. Η άεργος που απορροφά ο παράλληλος συνδυασμός από το δίκτυο θα μειωθεί από Q σε Q' . Ο πυκνωτής πρέπει να παράγει την άεργο Q_C που απαιτείται έτσι ώστε το φορτίο να εξακολουθήσει να απορροφά άεργο Q

$$Q = Q' + Q_C \Rightarrow Q_C = Q - Q' = P \tan \varphi - P \tan \varphi' = P (\tan \varphi - \tan \varphi')$$



Διόρθωση Συντελεστή Ισχύος

- Αν μας ζητηθεί, μπορούμε από την τιμή αυτή της αέργου Q_C να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.
- Το ρεύμα του πυκνωτή προκύπτει ως εξής:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \dot{U} \Rightarrow I_C = \omega C U$$

- Η άεργος ισχύς που παράγεται θα είναι:

$$Q_C = UI \sin 90^\circ = UI_C = \omega C U^2$$

- Η άεργος ισχύς υπολογίστηκε προηγουμένως επομένως:

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$

Αν το φορτίο είναι RC , τότε η διαδικασία είναι παρόμοια, όμως τότε απαιτείται σύνδεση επαγωγού αντί για πυκνωτή για διόρθωση του συντελεστή ισχύος.

