Διάλεξη 1
Διανύσματα-Φάσορες

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Δρ. Στέφανος Δάλλας

Ημιτονοειδή Σήματα

Εισαγωγή

Γιατί τα ημιτονοειδή σήματα?

- Είναι η επικρατούσα μορφή σήματος στις επικοινωνίες και στη βιομηχανία της ενέργειας.
- Ο μαθηματικός χειρισμός του είναι εύκολος γιατί η παράγωγος και το ολοκλήρωμά του είναι επίσης ημιτονοειδή μεγέθη.
- Κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων μέσω της ανάλυσης Fourier.
- Μας ενδιαφέρει η μόνιμη ημιτονοειδής κατάσταση, όταν δηλαδή τα μεταβατικά φαινόμενα έχουν γίνει αμελητέα.

Ημιτονοειδή Σήματα

Χαρακτηριστικά ημιτονοειδών σημάτων

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + a)$$

$\mathbf{U_0}$: Το πλάτος του ημιτονοειδούς μεγέθους
$\boldsymbol{\omega}$: η κυκλική συχνότητα σε rad/s
$\boldsymbol{\alpha}$: η γωνία (ή φάση)
$\boldsymbol{\omega t + \alpha}$: το όρισμα του ημιτόνου

Κάθε ημιτονοειδές μέγεθος είναι περιοδικό, επομένως ισχύει:

Περίοδος $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ *(sec)*

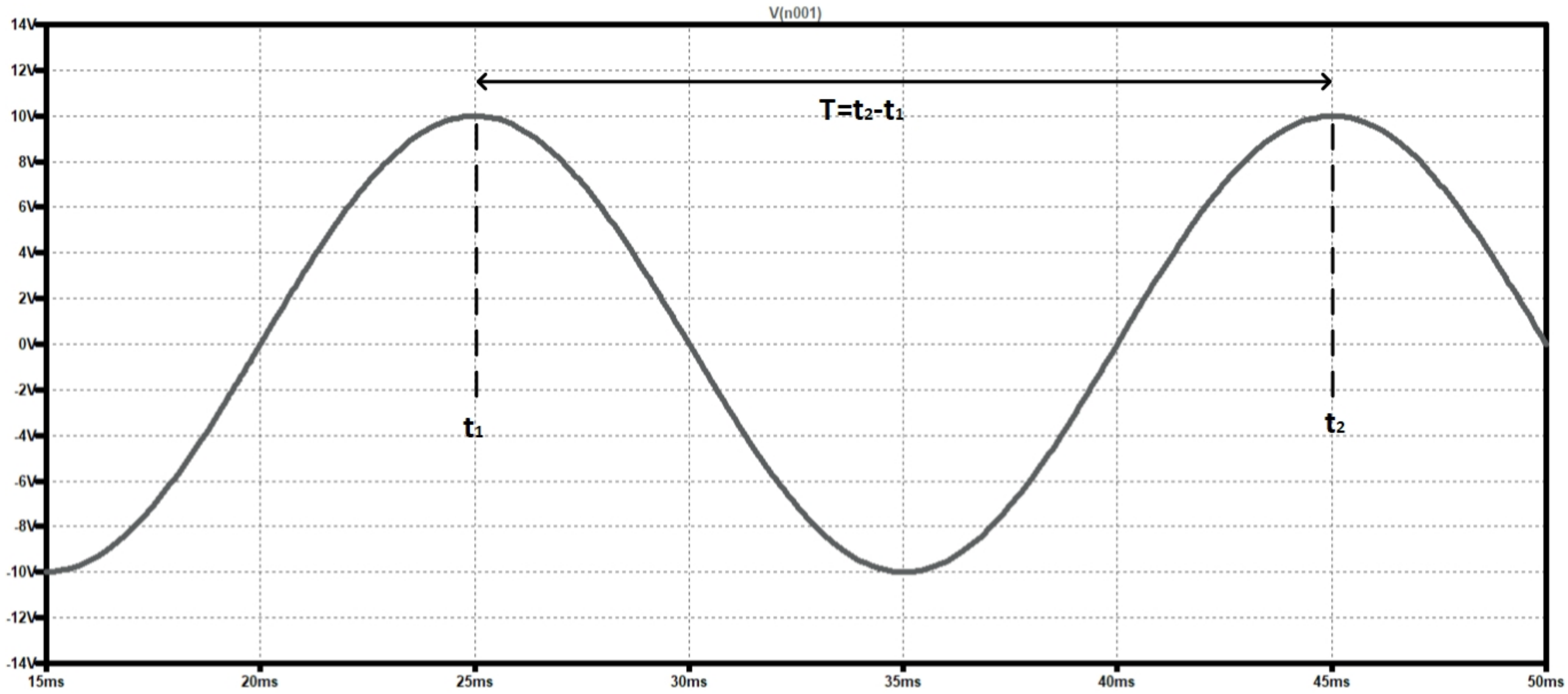
Συχνότητα $f = \frac{1}{T}$ *(sec^{-1} ή Hz)*

Ημιτονοειδή Σήματα

Χαρακτηριστικά ημιτονοειδών σημάτων

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + a)$$

α=0°

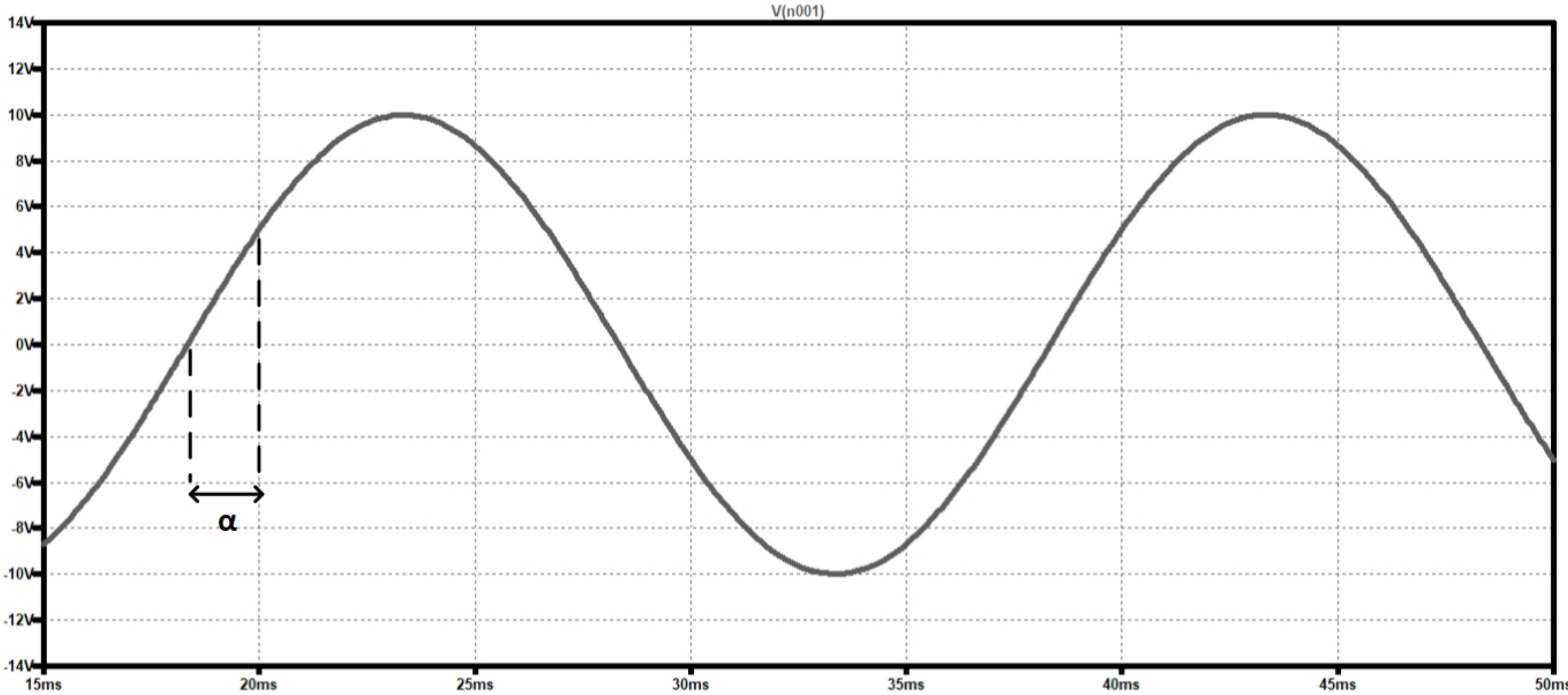


Ημιτονοειδή Σήματα

Χαρακτηριστικά ημιτονοειδών σημάτων

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + a)$$

α=30°



Ημιτονοειδή Σήματα

Χαρακτηριστικά ημιτονοειδών σημάτων

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + a)$$

Ενεργός τιμή (rms)

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

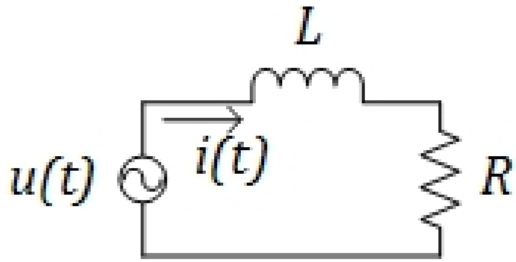
*Για **ημιτονοειδή μεγέθη και μό**νο ισχύει**:***

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \frac{\mathrm{U}_0}{\sqrt{2}}$$

Ημιτονοειδή Σήματα

Χαρακτηριστικά ημιτονοειδών σημάτων

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + a)$$



Υπολογισμός ρεύματος *i(t)*

Νόμος Τάσεων Kifchoff:

$$u(t) - u_L(t) - u_R(t) = 0$$

$$u(t) - L\frac{di}{dt} - iR = 0$$

Ημιτονοειδή Σήματα

$$\boldsymbol{u(t) - L\frac{di}{dt} - iR = 0}$$

- Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση 1ου βαθμού. Η λύση της είναι σχετικά εύκολη, όμως το κύκλωμα είναι εξαιρετικά απλό. Σε πιο σύνθετα κυκλώματα η λύση στο πεδίο του χρόνου μπορεί να γίνει εξαιρετικά δύσκολη.

- Η εξίσωση αυτή ωστόσο μπορεί με τη βοήθεια **φασόρων** να μετατραπεί σε αλγεβρική και η αντιμετώπισή της να απλοποιηθεί σημαντικά.

- Ένας **φάσορας** είναι ένας <u>μιγαδικός αριθμός</u> που παριστάνει την rms τιμή και τη φάση ενός ημιτονοειδούς μεγέθους.

Μιγαδικοί αριθμοί – Ορισμοί και ιδιότητες

Ένας μιγαδικός αριθμός $\dot{z}$ μπορεί να γραφεί σε καρτεσιανή μορφή ως εξής:

$$\dot{z} = x + jy$$

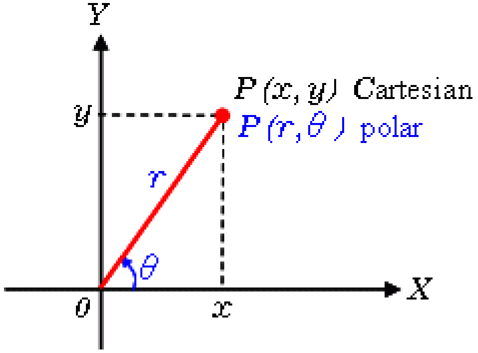
j^2=-1

x: $Re\{\dot{z}\}$

y: $Im\{\dot{z}\}$

Ένας μιγαδικός αριθμός $\dot{z}$ μπορεί να γραφεί σε πολική ή εκθετική μορφή ως εξής:

$$\dot{z} = r\angle\theta = re^{j\theta} = r(cos\theta + jsin\theta) = rcos\theta + jrsin\theta$$



Μιγαδικοί αριθμοί – Ορισμοί και ιδιότητες

$$\dot{z} = x + jy, \quad \dot{z} = r\angle\theta = re^{j\theta} = r(cos\theta + jsin\theta) = rcos\theta + jrsin\theta$$

- *Ποια σχέση συνδέει τα παραπάνω μεγέθη?*

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$

- *Γιατί χρειάζονται για τις πράξεις και οι δύο μορφές?*

Διότι η πρόσθεση και η αφαίρεση εκτελούνται πιο γρήγορα σε καρτεσιανή μορφή, ενώ ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση σε πολική.

Παράδειγμα:

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί: $\dot{z_1} = x_1 + jy_1 = r_1\angle\theta_1$ και $\dot{z_2} = x_2 + jy_2 = r_2\angle\theta_2$

- Πρόσθεση: $\dot{z_1} + \dot{z_2} = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
- Αφαίρεση: $\dot{z_1} - \dot{z_2} = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
- Πολλαπλασιασμός: $\dot{z_1}\dot{z_2} = r_1r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$
- Διαίρεση: $\dot{z_1}/\dot{z_2} = r_1/r_2\angle(\theta_1 - \theta_2)$

Φάσορες*

Εισαγωγή

Έστω η τάση της μορφής $u(t) = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + a)$ όπου U και α η ενεργός τιμή και η φάση αντίστοιχα.

Ισχύει ότι:

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left(U\sqrt{2}e^{j(\omega t+a)}\right) = Re\left(U\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\alpha}\right)$$

Ορίζουμε ως **φάσορα** της τάσης u(t):

$$\dot{\mathrm{U}} = Ue^{j\alpha} = U\angle\alpha$$

Άρα:

$$u(t) = \mathrm{Re}(\dot{U}\sqrt{2}e^{j\omega t})$$

*Βασική προϋπόθεση της παρακάτω ανάλυσης είναι ότι οι κυματομορφές του κυκλώματος που πρόκειται να αναλύσουμε είναι όλες ημιτονοειδείς με ίδια συχνότητα ω.

Φάσορες

Εισαγωγή

u(t): η αναπαράσταση του μεγέθους στο πεδίο του χρόνου

$\dot{U}$: η αναπαράσταση του μεγέθους στο πεδίο των φασόρων

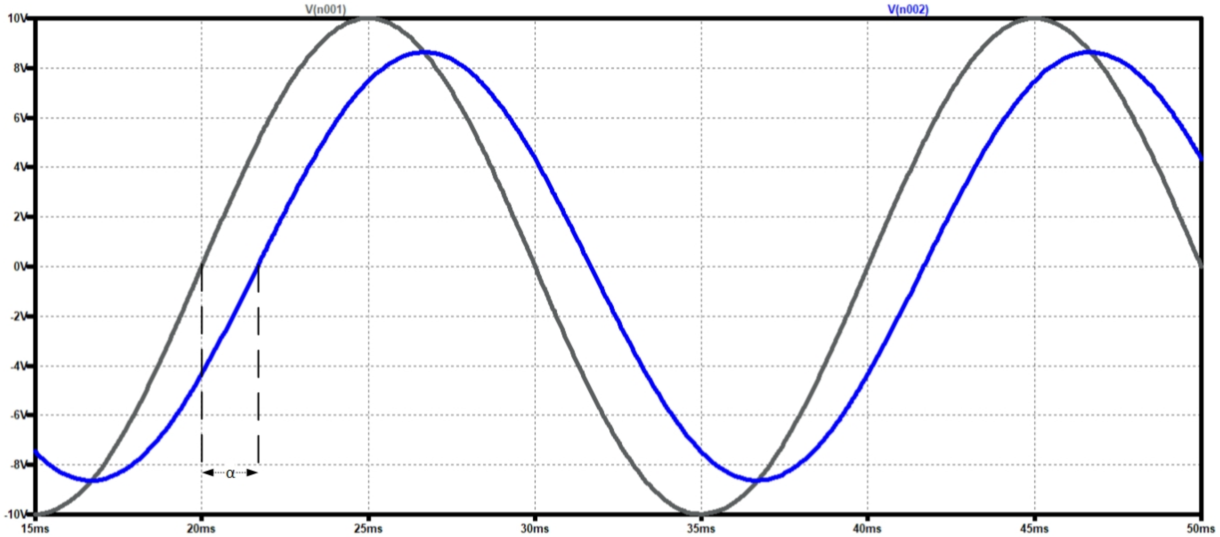
$$u(t) = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + a) \Leftrightarrow \dot{U} = U\angle\alpha$$

- Ο όρος $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ παραλείπεται αλλά εννοείται. Η συχνότητα δεν εμφανίζεται ωστόσο το πεδίο των φασόρων ονομάζεται και πεδίο της συχνότητας.

- Ο φάσορας παριστάνεται με τη μορφή διανύσματος με μέτρο ανάλογο του U και γωνία ως προς τον οριζόντιο άξονα ίση με α.

Φάσορες

Εισαγωγή



Φάσορες

Παράγωγος - Ολοκλήρωμα

$$u(t) = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + a) \Leftrightarrow \dot{U} = U\angle\alpha$$

$$u(t) = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + a) \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\omega\mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + a) = \omega\mathrm{U}\sqrt{2}\cos(\omega t + a + 90°) =$$
$$= Re\left(\omega U\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\alpha}e^{j90°}\right) = Re\left(j\omega\dot{U}\sqrt{2}e^{j\omega t}\right)$$

Επομένως προκύπτει ότι:

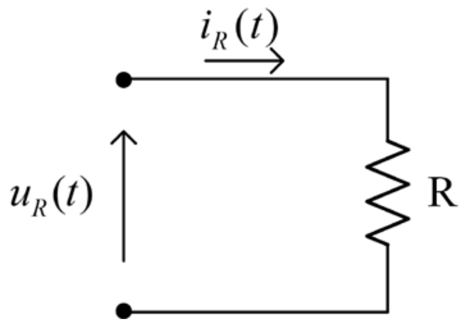
$$\frac{du}{dt} \Leftrightarrow j\omega\dot{U} \qquad \int u(t)dt \Leftrightarrow \frac{\dot{U}}{j\omega}$$

- Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο αντικαθίστανται στο πεδίο της συχνότητας από πολλαπλασιασμό και διαίρεση με $j\omega$ αντίστοιχα. Οι διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε απλές αλγεβρικές με μιγαδικούς.

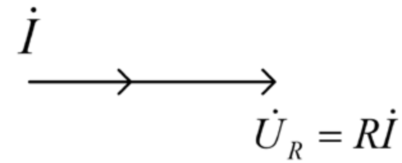
- *Χρήσιμη παρατήρηση*: Πολλαπλασιασμός φάσορα με j έχει ως αποτέλεσμα στροφή κατά 90° με φορά αντίθετη προς αυτή των δεικτών του ρολογιού. Διαίρεση με j (είναι ισοδύναμη με πολλαπλασιασμό με $-j$) οδηγεί σε στροφή κατά 90° με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

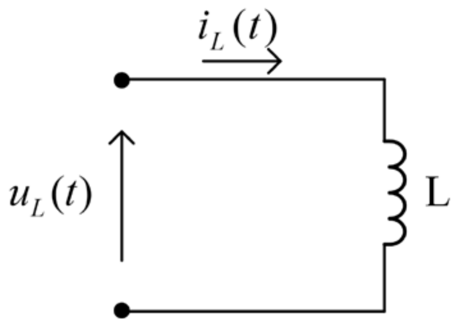
Φάσορες

Σχέση τάσης ρεύματος σε βασικά στοιχεία

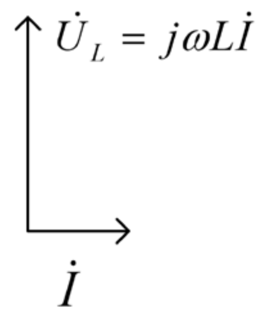


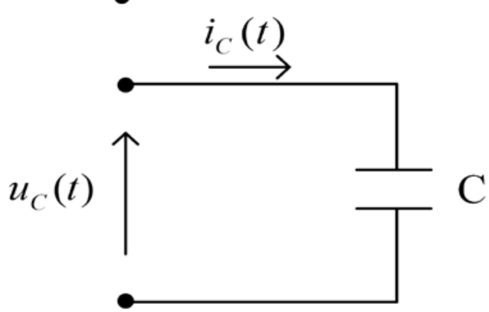
$$u_R(t) = Ri(t)$$
$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$



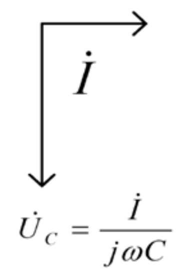


$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$
$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$$





$$i_C(t) = C\frac{dU_C}{dt}$$
$$\dot{I} = j\omega C\dot{U}_C \Rightarrow \dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C}$$



Φάσορες

Σύνθετη Αντίσταση

Ο νόμος του Ohm στο πεδίο της συχνότητας για κάθε τύπο φορτίου γράφεται ως εξής:

$$\dot{U} = \dot{Z}\dot{I}$$

Με Ż ορίζουμε τη σύνθετη αντίσταση. Μονάδα μέτρησης: Ohm (Ω).

Η σχέση των στοιχείων σε σχέση με τις σύνθετες αντιστάσεις ορίζεται ως εξής:

$$R \to \dot{Z} = R$$

$$L \to \dot{Z} = j\omega L$$

$$C \to \dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Παρατήρηση 1:
Η σύνθετη αντίσταση δεν είναι φάσορας γιατί δεν αντιπροσωπεύει ημιτονοειδή ποσότητα.
Παρατήρηση 2:
Για ω=0 (DC πηγές) ισχύει $j\omega L \to 0$ και $\frac{-j}{\omega C} \to \infty$, δηλαδή επαληθεύεται ότι ο επαγωγός στο DC λειτουργεί ως βραχυκύκλωμα ενώ ο πυκνωτής λειτουργεί ως ανοιχτοκύκλωμα.

Φάσορες

Σύνθετη Αντίσταση

Η σύνθετη αντίσταση μπορεί να γραφεί σε καρτεσιανή μορφή ως εξής:

$$\dot{Z} = R + jX$$

- Το πραγματικό μέρος R είναι η αντίσταση και το φανταστικό μέρος X η αντίδραση. Και τα δύο έχουν μονάδα το Ω.
- Η αντίδραση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Όταν είναι θετική λέμε ότι είναι επαγωγική και όταν είναι αρνητική λέμε ότι είναι χωρητική. Στην πρώτη περίπτωση το ρεύμα έπεται της τάσης και στη δεύτερη περίπτωση προηγείται.

Η σύνθετη αντίσταση εκφράζεται επίσης σε πολική μορφή ως

$$\dot{Z} = Z\angle\phi$$

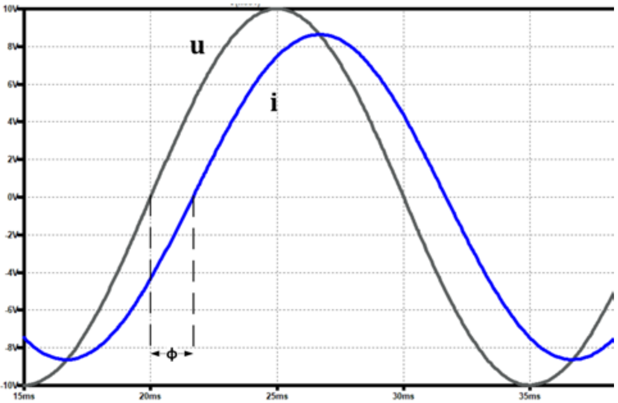
Η σχέση που συνδέει τις δύο εξισώσεις είναι:

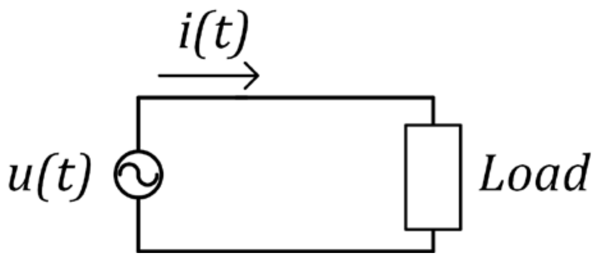
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{X}{R}$$

Φάσορες

Σύνθετη Αντίσταση





$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + a)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta)$$

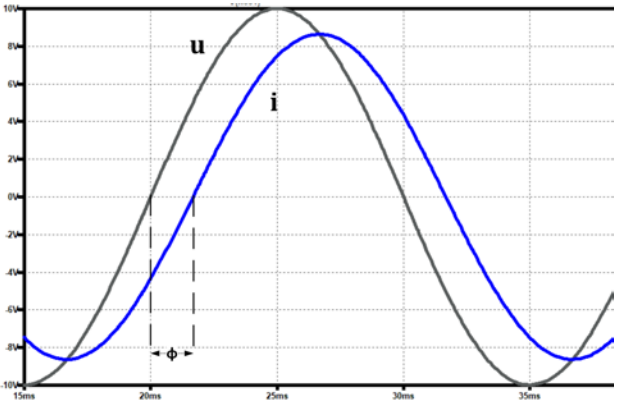
$$\phi = \alpha - \beta$$

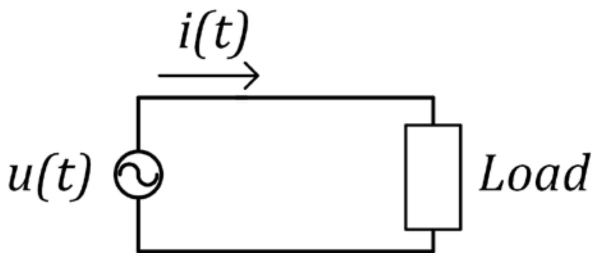
Ο φάσορας της τάσης είναι $\dot{U} = U\angle\alpha$ και ο αντίστοιχος του ρεύματος $\dot{\mathrm{I}} = \mathrm{I}\angle\beta$.
Η σύνθετη αντίσταση του φορτίου προκύπτει:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle a}{I\angle\beta} = \frac{U}{I}\angle(\alpha - \beta) = \frac{U}{I}\angle\phi$$

Φάσορες

Σύνθετη Αντίσταση





$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + a)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta)$$

$$\phi = \alpha - \beta$$

Ορίζεται επίσης η σύνθετη αγωγιμότητα $\dot{Y}$ ως το αντίστροφο της αντίστασης $\dot{Z}$. Μπορεί να γραφεί σε μιγαδική μορφή ως εξής:

$$\dot{\mathrm{Y}} = G + jB$$

όπου G η αγωγιμότητα και B η επιδεκτικότητα. Μονάδα μέτρησης: *Siemens* (*S*).

Φάσορες

Νόμοι Kirchhoff στο πεδίο της συχνότητας

Νόμος τάσεων του Kirchhoff : Αν $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι οι τάσεις κατά μήκος ενός κλειστού βρόχου τότε:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει και για τους φάσορες $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \cdots, \dot{U}_n$ των τάσεων δηλαδή:

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n = 0$$

Νόμος ρευμάτων του Kirchhoff: Αν $i_1, i_2, \ldots, i_n$ είναι τα ρεύματα που εισέρχονται ή εξέρχονται από μια κλειστή επιφάνεια σε ένα δίκτυο τη χρονική στιγμή t τότε

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει και για τους φάσορες $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \cdots, \dot{I}_n$ των ρευμάτων δηλαδή:

$$\dot{\mathrm{I}}_1 + \dot{\mathrm{I}}_2 + \cdots + \dot{\mathrm{I}}_n = 0$$

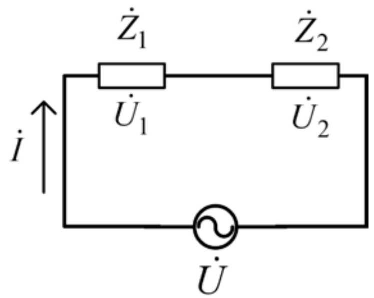
Φάσορες

Διαιρέτης τάσης

Αν θεωρήσουμε N σύνθετες αντιστάσεις $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \cdots, \dot{Z}_n$ συνδεδεμένες σε σειρά η ισοδύναμη αντίσταση στα άκρα του συνδυασμού τους είναι

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \cdots + \dot{Z}_n$$

Αν έχουμε μόνο δύο αντιστάσεις σε σειρά θα είναι:



$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1\dot{Z}_1, \dot{U}_2 = \dot{I}_2\dot{Z}_2 \text{ και } \dot{U} = \dot{I}(\dot{Z_1} + \dot{Z_2})$$

Με αντικατάσταση του ρεύματος από την τελευταία:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{Z}_1}{\left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2\right)}\dot{U} \qquad \dot{U}_2 = \frac{\dot{Z}_2}{\left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2\right)}\dot{U}$$

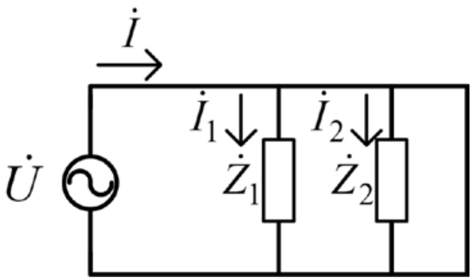
Φάσορες

Διαιρέτης ρεύματος

Αν θεωρήσουμε N σύνθετες αντιστάσεις $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \cdots, \dot{Z}_n$ συνδεδεμένες παράλληλα η ισοδύναμη αγωγιμότητα είναι

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\dot{Z}_{n_1}}$$

Αν έχουμε μόνο δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα θα είναι:



$$\dot{Z} = \frac{1}{\dfrac{1}{\dot{Z}_1} + \dfrac{1}{\dot{Z}_2}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

Επίσης ισχύει:

$$\dot{U} = \dot{I}\dot{Z} = \dot{I}_1 \dot{Z}_1 = \dot{I}_2 \dot{Z}_2$$

Με αντικατάσταση της $\dot{Z}$ προκύπτει:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{I} \qquad \dot{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{I}$$

Φάσορες

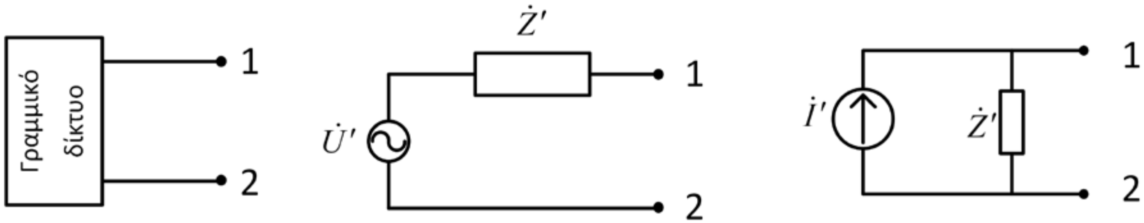
Θεώρημα Υπέρθεσης

- Σε ένα κύκλωμα που περιέχει πολλές ανεξάρτητες πηγές μπορούμε να πραγματοποιήσουμε υπολογισμούς θεωρώντας ότι λειτουργεί μία από αυτές και να αγνοήσουμε τις υπόλοιπες. Αν εκτελέσουμε αυτή τη διαδικασία για κάθε μία από τις πηγές ξεχωριστά και προσθέσουμε τα αποτελέσματα καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα για το κύκλωμα με όλες τις πηγές σε λειτουργία.
- Οι πηγές που αγνοούνται βραχυκυκλώνονται αν είναι πηγές τάσης και ανοιχτοκυκλώνονται αν είναι πηγές ρεύματος.
- ***Προσοχή***: Αν οι πηγές έχουν όλες την ίδια συχνότητα ω τότε εφαρμόζουμε την αρχή της υπέρθεσης στο πεδίο της συχνότητας. Αν έχουν διαφορετικές συχνότητες, τότε εξετάζουμε κάθε πηγή ξεχωριστά και προσθέτουμε τα αποτελέσματα στο πεδίο του χρόνου.
- Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται για υπολογισμό τάσεων και ρευμάτων σε γραμμικά κυκλώματα, ακόμη και αν αυτά έχουν κυματομορφές με αρμονικές.
- Η αρχή της υπέρθεσης ισχύει για τάσεις και ρεύματα, αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα για την ισχύ

Φάσορες

Θεωρήματα Thevenin και Norton

Ένα κύκλωμα που περιέχει διάφορες πηγές τάσης ή ρεύματος μπορεί να αντικατασταθεί από μία πηγή τάσης U' σε σειρά με σύνθετη αντίσταση Z' ή μία πηγή ρεύματος I' παράλληλα με την ίδια σύνθετη αντίσταση.



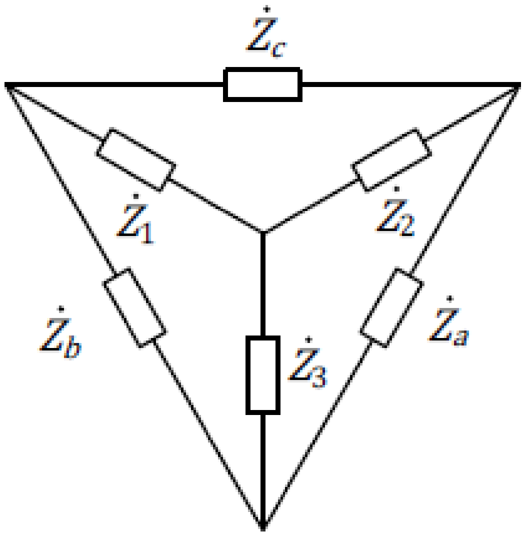
Με τους ακροδέκτες 1, 2 ανοιχτοκυκλωμένους, οπως φαίνεται από το 2ο κύκλωμα, προκύπτει η U' του ισοδυνάμου Thevenin. Με τους ακροδέκτες αυτούς ανοιχτοκυκλωμένους (3ο κύκλωμα), προκύπτει το I' του ισοδυνάμου Norton.

Αν τα κυκλώματα 2 και 3 είναι ισοδύναμα του ίδιου κυκλώματος, τότε είναι ισοδύναμα και μεταξύ τους. Επομένως

$$\dot{I}' = \frac{\dot{U}'}{\dot{Z}'}$$

Φάσορες

Αντιδράσεις Αστέρα - Τριγώνου



$$\dot{Z}_a = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1}$$

$$\dot{Z}_b = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}$$

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_3}$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_b\dot{Z}_c}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \dot{Z}_c}$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_c\dot{Z}_a}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \dot{Z}_c}$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_a\dot{Z}_b}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \dot{Z}_c}$$